



Fluxos em Redes

K. Karam

C. N. Campos

Relatório Técnico - IC-PFG-18-09

Projeto Final de Graduação

2020 - Outubro

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO

The contents of this report are the sole responsibility of the authors.
O conteúdo deste relatório é de única responsabilidade dos autores.

Fluxos em Redes

K. Karam*

C. N. Campos*

Resumo

Redes de diversas naturezas, tais como redes elétricas, de telefonia e de transporte, são extremamente comuns em nosso cotidiano. A utilização destas redes consiste, usualmente, em transportar algo de um ponto a outro da forma mais eficiente possível, garantindo assim a otimização do uso de recursos da rede em questão. Muitos dos problemas surgidos no contexto destas redes podem ser modelados matematicamente e resolvidos utilizando-se conceitos e algoritmos da Teoria de Fluxos em Redes.

Este projeto insere-se na área de Teoria de Grafos e trata especificamente da Teoria de Fluxos em Redes. Apresentamos uma breve resenha de conceitos fundamentais da Teoria de Fluxos em Redes, bem como da Teoria de Emparelhamentos, tais como apresentados por Lovász e Plummer [2]. Além disso, conceitos da Teoria de Fluxos em Redes são aplicados na demonstração de alguns resultados básicos da Teoria de Emparelhamentos.

1 Introdução

Redes de diversas naturezas têm presença constante em nosso cotidiano. Como alguns exemplos, podemos citar redes elétricas, redes de telefonia, sistemas rodoviários, sistemas ferroviários, redes de distribuição de produtos, entre muitas outras. Em todos estes casos, a utilização da rede consiste em transportar algo de um ponto a outro, sejam pessoas, mercadorias, mensagens ou veículos. Usualmente, deseja-se que este transporte seja realizado da forma mais eficiente possível, a fim de garantir o oferecimento de um bom serviço e otimizar a utilização de recursos da rede em questão. Muitos problemas que surgem no contexto destas redes podem ser modelados matematicamente e resolvidos utilizando-se os conceitos e algoritmos desenvolvidos na Teoria de Fluxos em Redes. Esta teoria tem aplicações em diversas áreas do conhecimento como Matemática, Engenharia, Ciência da Computação, Administração, entre outras. Assim, o conhecimento da Teoria de Fluxos em Redes permite a um profissional tanto atuar em uma destas áreas quanto realizar pesquisas para contribuir no desenvolvimento da teoria.

A Teoria de Fluxos em Redes foi inicialmente desenvolvida por Ford e Fulkerson em um trabalho publicado em 1962 [3]. O objetivo deste projeto é apresentar uma breve resenha de conceitos fundamentais da área, com particular ênfase em suas propriedades estruturais. Além disso, aplicamos a Teoria de Fluxos em Redes na demonstração de alguns resultados fundamentais da Teoria de Emparelhamentos.

*Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas, 13081-970 Campinas, SP.

1.1 Definições Preliminares

Um *grafo* G é uma tripla ordenada $(V(G), E(G), \psi_G)$ na qual $V(G)$ é um conjunto não vazio de *vértices*, $E(G)$ é um conjunto de *arestas*, disjunto de $V(G)$, e ψ_G é uma *função de incidência* que associa a cada aresta de $E(G)$ um par não ordenado de vértices de $V(G)$, não necessariamente distintos. Um grafo é *finito* se $V(G)$ e $E(G)$ são finitos.

Dado um grafo G , sejam $e \in E(G)$ e $u, v \in V(G)$ tais que $\psi_G(e) = \{u, v\}$. Os vértices u e v são os *extremos* da aresta e . Dizemos que e *incide* ou é *incidente* em seus extremos u, v e vice-versa. Dois vértices incidentes em uma mesma aresta são ditos *adjacentes*, assim como duas arestas incidentes em um mesmo vértice são *adjacentes*. Se $\psi_G(e) = \{u, u\} = \{u\}$, então e é um *laço*. Arestas distintas que possuem os mesmos extremos são arestas *múltiplas* ou *paralelas*. Um *grafo simples* é um grafo que não possui laços nem arestas múltiplas. Neste caso, podemos nomear uma aresta utilizando seus extremos, fazendo $e = uv$. Nesta nomenclatura, a função de incidência ψ_G fica implícita.

Um grafo pode ser retratado por um *desenho*, no qual cada vértice é representado por um ponto e cada aresta por uma linha ligando os seus extremos. Na Figura 1, exibimos desenhos de alguns grafos. Todos os grafos da figura, com exceção do primeiro, são simples.

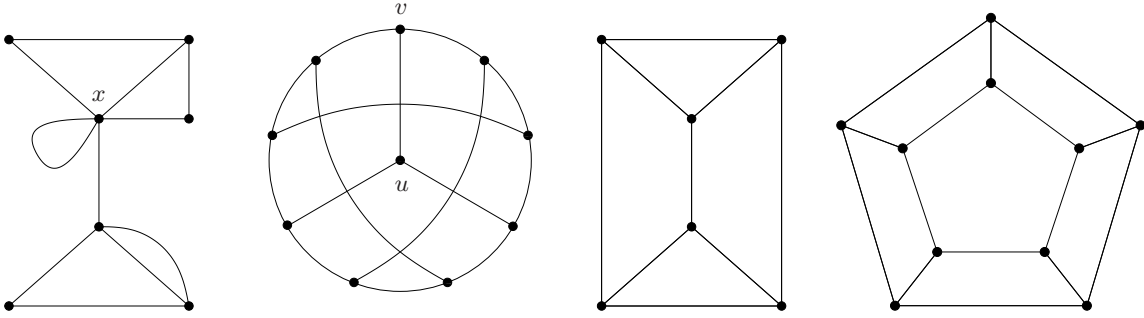


Figura 1: Desenhos de grafos.

Dois grafos G e H são *disjuntos* se $V(G) \cap V(H) = \emptyset$ e $E(G) \cap E(H) = \emptyset$. Por outro lado, se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ e ψ_H é a restrição de ψ_G a $E(H)$, então H é *subgrafo* de G . Denotamos isto por $H \subseteq G$. Ademais, se $V(H) = V(G)$, então H é subgrafo *gerador* de G . Um *subgrafo induzido* de G , denotado por $G[X]$, $X \subseteq V(G)$, é o subgrafo de G formado pelos vértices de X e por todas as arestas de G com os dois extremos em X .

Seja v um vértice de um grafo G . O *grau* de v , denotado por $d_G(v)$, é o número total de vezes em que arestas incidem em v . Quando estiver claro, pelo contexto, que $v \in V(G)$, o grau de v pode ser denotado por $d(v)$. Na Figura 1, todos os vértices dos três últimos grafos possuem grau três, enquanto o vértice x no primeiro desenho possui grau seis. Observe que o laço incide duas vezes no vértice x .

A vizinhança de um vértice v em um grafo G , denominada $\Gamma_G(v)$, é o conjunto de todos os vértices de G adjacentes a v . Podemos estender esta definição para qualquer $X \subseteq V(G)$. Neste caso, a vizinhança de X em G , $\Gamma_G(X)$, é o conjunto de todos os vértices de G adjacentes a pelo menos um vértice de X . Quando estiver claro a qual grafo estamos nos referindo, podemos escrever apenas $\Gamma(v)$ e $\Gamma(X)$.

A seguir, apresentamos alguns conceitos que são utilizados frequentemente neste trabalho. Um *conjunto independente de vértices*, ou apenas *conjunto independente*, é um conjunto $S \subseteq V(G)$ cujos elementos são dois a dois não adjacentes. O conjunto vazio e os conjuntos com um único vértice são conjuntos independentes *triviais*. Um problema fundamental da Teoria de Grafos é o de encontrar um conjunto independente de cardinalidade máxima em um grafo qualquer. O parâmetro $\alpha(G)$ denomina a cardinalidade de um *conjunto independente máximo* em um grafo G .

O conceito de independência também pode ser aplicado a conjuntos de arestas. Um *conjunto independente de arestas* de um grafo recebe o nome especial de *emparelhamento* e é definido da maneira a seguir. Dado um grafo G , $M \subseteq E(G)$ é um *emparelhamento* de G se, para todo par $e, f \in M$, e e f não são adjacentes. Se $v \in V(G)$ incide em $e \in M$, dizemos que M *satura* v e que v é *saturado* por M . Se u, v são os extremos de $e \in M$, dizemos que u, v são *emparelhados* por M e que M *emparelha* u, v . Se M é vazio ou contém uma única aresta, então M é, trivialmente, um emparelhamento. Assim como no caso dos conjuntos independentes de vértices, aqui também queremos determinar um emparelhamento de cardinalidade máxima, ou *emparelhamento máximo*, em um grafo. Denotamos por $\nu(G)$ a cardinalidade de um tal emparelhamento. Um emparelhamento M é *perfeito* se todos os vértices de G são saturados por M . A Figura 2 mostra exemplos de emparelhamentos, sendo os dois últimos perfeitos.

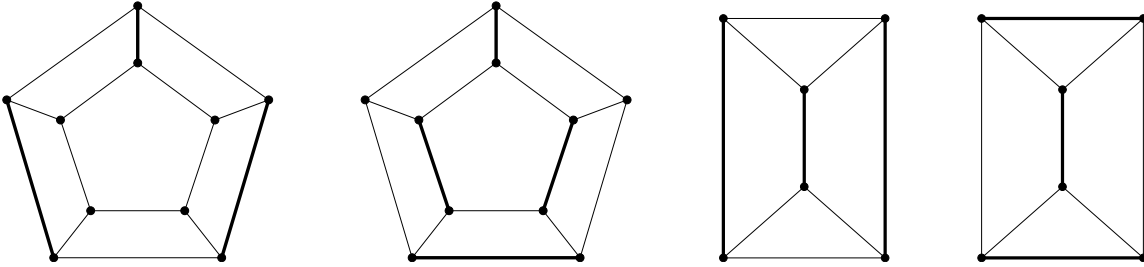


Figura 2: Exemplos de emparelhamentos, representados pelas arestas em negrito.

Por fim, introduzimos o conceito de cobertura. Uma *cobertura por vértices (das arestas)* de um grafo G é um conjunto $K \subseteq V(G)$ tal que toda aresta $e \in E(G)$ possui pelo menos um extremo $v \in K$. Dizemos que v *cobre* e e que e é *coberta* por v . Já uma *cobertura por arestas (dos vértices)* de G é um conjunto $K' \subseteq E(G)$ tal que todo vértice $v \in V(G)$ incide em pelo menos uma aresta $e \in K'$. Neste caso, dizemos que e *cobre* v e que v é *coberto* por e . Note que, se utilizarmos todos os vértices de $V(G)$, teremos, trivialmente, uma cobertura por vértices de G . Da mesma forma, uma cobertura por arestas é trivialmente formada pelo conjunto de todas as arestas de G . Assim, o problema de interesse aqui é a determinação de coberturas com cardinalidade mínima. O parâmetro $\tau(G)$ denota a cardinalidade de uma *cobertura por vértices mínima* de G , enquanto $\rho(G)$ é a cardinalidade de uma *cobertura por arestas mínima* de G .

1.2 Classes de Grafos

Em Teoria de Grafos, é frequente agruparmos grafos que possuem determinadas características estruturais em comum em uma *família* ou *classe*. Apresentamos a seguir algumas classes de grafos utilizadas na teoria desenvolvida neste trabalho.

Um *caminho* P_n é um grafo simples cujos vértices podem ser listados em uma sequência linear, $v_1 \dots v_n$, na qual dois vértices são adjacentes se e somente se são consecutivos na sequência. O primeiro e o último vértices da sequência são ditos *extremos* do caminho. Se x e y são os extremos do caminho P_n , então P_n é um *xy-caminho* ou um *yx-caminho* ou, ainda, um *caminho entre x e y*. Os vértices de $V(P_n) \setminus \{x, y\}$ são ditos *vértices internos* de P_n . O *tamanho* do caminho P_n é igual ao seu número de arestas, ou seja, $n - 1$.

Um *ciclo* C_n é um grafo cujos vértices podem ser listados em uma sequência cíclica, $v_1 \dots v_n$, de modo que dois vértices são adjacentes no grafo se e somente se são consecutivos na sequência e, além disso:

- (i) se $|V(C_n)| > 2$, então C_n é um grafo simples;
- (ii) se $|V(C_n)| = 2$, então $E(C_n)$ possui apenas duas arestas paralelas;
- (iii) se $|V(C_n)| = 1$, então $E(C_n)$ contém apenas um laço.

Muitos autores definem ciclo apenas para os casos em que $n \geq 3$. Neste texto, incluímos os casos para $n = 1$ e $n = 2$. O *tamanho* do ciclo C_n é igual à quantidade de suas arestas, ou seja, n . Se n é par (ímpar), dizemos que C_n é um ciclo *par* (*ímpar*).

Um *grafo-estrela* S_k é um grafo simples no qual um vértice, dito *central*, é adjacente a k outros vértices, chamados *pontas*, e as pontas são duas a duas não adjacentes.

Suponha que um grafo G contenha um subgrafo isomorfo¹ a um caminho. Neste caso, dizemos que G *possui* ou *contém* um caminho. Esta terminologia também se aplica a ciclos e grafos-estrela. Um grafo que não contém ciclos é um grafo *acíclico*.

Um grafo G é *conexo* se possui um uv -caminho para todo $u, v \in V(G)$. Uma *componente conexa* de G é um subgrafo conexo maximal de G , ou seja, um subgrafo conexo que não está propriamente contido em nenhum outro subgrafo conexo de G . Uma classe de grafos importante é a das árvores: um *árvore* T é um grafo conexo e acíclico. Uma *árvore geradora* de um grafo G é uma árvore $T \subseteq G$ com $V(T) = V(G)$. O conceito de floresta generaliza o conceito de árvore: uma *floresta* F é um grafo acíclico, não necessariamente conexo.

No contexto deste trabalho, tratamos em particular da classe dos grafos bipartidos. Um grafo G é *bipartido* se $V(G)$ pode ser particionado em duas *partes*, A e B , de forma que toda aresta de $E(G)$ possua um extremo em A e outro em B . A seguir, apresentamos algumas propriedades de vizinhanças em grafos bipartidos, que são utilizadas ao longo do texto.

Proposição 1.1. *Seja G um grafo bipartido, com partes A e B . Para quaisquer $X_1, X_2 \subseteq A$, valem as seguintes propriedades:*

- (i) $\Gamma(X_1 \cap X_2) \subseteq \Gamma(X_1) \cap \Gamma(X_2)$;
- (ii) $\Gamma(X_1 \cup X_2) = \Gamma(X_1) \cup \Gamma(X_2)$.

Demonstração. Suponha um grafo bipartido G com partes A e B . Sejam $X_1, X_2 \subseteq A$. Se $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, a primeira propriedade é trivialmente verdadeira. Do contrário, suponha

¹O leitor pode encontrar a definição de isomorfismo em Bondy e Murty [1] e em Lovász e Plummer [2]

$b \in \Gamma(X_1 \cap X_2)$. Existe $a \in X_1 \cap X_2$ tal que $ab \in E(G)$. Como $a \in X_1$, temos $b \in \Gamma(X_1)$. Analogamente, $b \in \Gamma(X_2)$. Portanto, $b \in \Gamma(X_1) \cap \Gamma(X_2)$.

Para a segunda propriedade, primeiramente tome $b \in \Gamma(X_1 \cup X_2)$. Existe uma aresta $ab \in E(G)$ tal que $a \in X_1 \cup X_2$. Suponha que $a \in X_1$ (o caso para $a \in X_2$). Então, $b \in \Gamma(X_1)$. Logo, $b \in \Gamma(X_1) \cup \Gamma(X_2)$. Portanto,

$$\Gamma(X_1 \cup X_2) \subseteq \Gamma(X_1) \cup \Gamma(X_2). \quad (1)$$

Por outro lado, suponha $b \in \Gamma(X_1) \cup \Gamma(X_2)$. Considere $b \in \Gamma(X_1)$, pois $b \in \Gamma(X_2)$ é análogo. Logo, existe $a \in X_1$ e adjacente a b . Note, então, que a pertence a $X_1 \cup X_2$. Por isto, $b \in \Gamma(X_1 \cup X_2)$. Portanto,

$$\Gamma(X_1) \cup \Gamma(X_2) \subseteq \Gamma(X_1 \cup X_2). \quad (2)$$

Por fim, de (1) e (2), concluímos que $\Gamma(X_1 \cup X_2) = \Gamma(X_1) \cup \Gamma(X_2)$. \square

A menos dos ciclos de tamanho ímpar, todas as classes de grafos descritas nesta seção são exemplos de grafos bipartidos. O Teorema 1.2 apresenta uma caracterização estrutural de grafos bipartidos. Este é um resultado clássico, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em Bondy e Murty [1].

Teorema 1.2. *Um grafo com dois ou mais vértices é bipartido se e somente se não contém um ciclo ímpar.* \square

1.3 Grafos Orientados

Um *grafo orientado*, ou *digrafo*, D é uma tripla ordenada $(V(D), A(D), \psi_D)$ na qual $V(D)$ é um conjunto não vazio de *vértices*, $A(D)$ é um conjunto de *arcos*, disjunto de $V(D)$, e ψ_D é uma *função de incidência* que associa a cada arco de $A(D)$ um par ordenado de vértices de $V(D)$. Um digrafo é *finito* se $V(D)$ e $A(D)$ são finitos. A Figura 3 mostra um exemplo de grafo orientado. Note que, no desenho de um digrafo, as arestas são representadas por flechas.

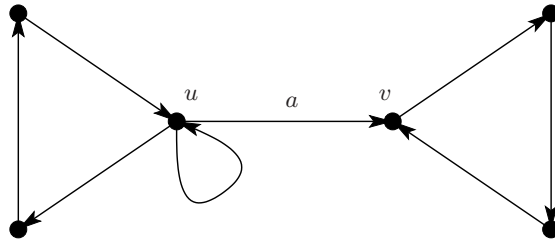


Figura 3: Um digrafo.

Seja a um arco de um digrafo D tal que $\psi_D(a) = (u, v)$, como na Figura 3. Quando não houver ambiguidade, podemos escrever $a = (u, v)$ ou $a = uv$. Os vértices u, v são os *extremos* de a . O arco a é *orientado de u para v*. Também dizemos que o arco a *parte* de u e *entra* em v . O vértice u é a *cauda* e v é a *cabeça* de a . O *grafo subjacente* de um digrafo

D é o grafo obtido a partir de D mantendo seu conjunto de vértices e substituindo cada arco por uma aresta (não orientada) com os mesmos extremos.

Em um digrafo D , o *grau de saída* $d_D^+(v)$ de um vértice v é o número de arcos que partem de v . Já o *grau de entrada*, $d_D^-(v)$, é o número de arcos que entram em v . Na Figura 3, por exemplo, note que $d_D^+(u) = 3$ e $d_D^-(u) = 2$, enquanto $d_D^+(v) = 2$ e $d_D^-(v) = 1$. A *vizinhança de saída* de v , denotada por $\Gamma_D^+(v)$, é o conjunto $\{u \in V(D) : (v, u) \in A(D)\}$. Já a *vizinhança de entrada* de v , denotada por $\Gamma_D^-(v)$, é o conjunto $\{u \in V(D) : (u, v) \in A(D)\}$. As definições de vizinhança são estendidas para quaisquer subconjuntos de $V(D)$. Assim, dado $X \in V(D)$, temos $\Gamma_D^-(X) = \{u \in V(D) : \exists v \in X, (u, v) \in A(D)\}$ e $\Gamma_D^+(X) = \{u \in V(D) : \exists v \in X, (v, u) \in A(D)\}$. Sempre que não houver ambiguidade, podemos denotar o grau de saída por $d^+(v)$ e o grau de entrada por $d^-(v)$, as vizinhanças de entrada por $\Gamma^-(v)$ e $\Gamma^-(X)$ e as vizinhanças de saída por $\Gamma^+(v)$ e $\Gamma^+(X)$.

Por fim, enfatizamos aqui que todos os grafos e digrafos tratados neste texto são **finitos**.

1.4 Estrutura do Texto

As próximas seções deste documento abordam tópicos essenciais da Teoria de Emparelhamentos e da Teoria de Fluxos em Redes tais como desenvolvidos por Lovász e Plummer [2]. A Seção 2 apresenta a Teoria de Emparelhamentos, com ênfase em grafos bipartidos, introduzindo alguns resultados fundamentais da área. A Seção 3 apresenta conceitos e resultados fundamentais da Teoria de Fluxos em Redes. A Seção 4 aplica a Teoria de Fluxos em Redes para obter demonstrações diferentes das apresentadas na Seção 2 para alguns resultados clássicos da Teoria de Emparelhamentos. Por fim, a Seção 5 traz as conclusões deste trabalho.

2 Emparelhamentos em Grafos Bipartidos

Embora esta seção aborde grafos bipartidos, inicialmente apresentamos alguns resultados fundamentais que valem para quaisquer grafos. Estes resultados são utilizados em diversas demonstrações ao longo do texto. Antes de apresentá-los, relembramos os seguintes parâmetros de um grafo G , definidos na Seção 1.1:

- (i) $\alpha(G)$ é a cardinalidade de um conjunto independente de vértices máximo;
- (ii) $\tau(G)$ é a cardinalidade de uma cobertura de arestas por vértices mínima;
- (iii) $\nu(G)$ é a cardinalidade de um emparelhamento máximo;
- (iv) $\rho(G)$ é a cardinalidade de uma cobertura de vértices por arestas mínima.

Os dois resultados a seguir, ditos *Identidades de Gallai*, relacionam estes parâmetros.

Lema 2.1. *Para todo grafo G , $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$.*

Demonstração. Seja G um grafo. Seja $S \subseteq V(G)$ um conjunto independente máximo de G . Seja $\bar{S} = V(G) \setminus S$. Como não há vértices adjacentes em S , cada aresta de G tem pelo menos um extremo em \bar{S} . Assim, \bar{S} é uma cobertura por vértices de G e, logo, $\tau(G) \leq |\bar{S}|$. Além disso, $\alpha(G) = |S|$. Portanto,

$$\alpha(G) + \tau(G) \leq |S| + |\bar{S}| = |V(G)| \quad (3)$$

Por outro lado, seja $K \subseteq V(G)$ uma cobertura mínima de G . Defina $\overline{K} = V(G) \setminus K$. Como K é cobertura, cada aresta de G tem pelo menos um extremo em K . Logo, não há aresta de G com ambos os extremos em \overline{K} e, portanto, não há vértices adjacentes em \overline{K} . Assim, \overline{K} é um conjunto independente e $\alpha(G) \geq |\overline{K}|$. Como $\tau(G) = |K|$, então

$$\alpha(G) + \tau(G) \geq |\overline{K}| + |K| = |V(G)| \quad (4)$$

De (3) e (4), concluímos $\alpha(G) + \tau(G) = |V(G)|$. \square

Lema 2.2. *Para todo grafo G sem vértices isolados, $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $\nu(G) + \rho(G) \geq |V(G)|$. Seja K' uma cobertura por arestas mínima de G . Seja G' o subgrafo de G com $V(G') = V(G)$ e $E(G') = K'$. Suponha que G' possua um caminho de tamanho três, com vértices internos u, v . Note que, neste caso, u e v são cobertos por duas arestas deste caminho. Assim, $K' \setminus \{uv\}$ também é cobertura de G . Isto contradiz a hipótese de que K' é cobertura mínima. Portanto, não há caminhos de tamanho maior que dois em G' . Por isto, não há vértices adjacentes em G' ambos com grau maior que um. Assim, se um vértice de G' tem grau maior que um, todos os seus vizinhos têm grau um, formando uma componente conexa isomorfa a um grafo-estrela. O grafo G' pode ainda ter componentes conexas com apenas dois vértices de grau um, que também são isomorfas ao grafo-estrela S_1 . Portanto, cada componente conexa de G' é isomorfa a um grafo estrela. Assim, cada componente conexa de G' com n' vértices tem $n' - 1$ arestas. Seja k a quantidade de componentes conexas de G' . Dessa forma, número de arestas em K' é igual a $|V(G)| - k$. Seja M um emparelhamento de G formado por uma única aresta de cada componente conexa de G' . Note que $|M| = k$. Logo,

$$\begin{aligned} |K'| &= |V(G)| - k \\ |K'| &= |V(G)| - |M| \\ |K'| + |M| &= |V(G)|. \end{aligned}$$

Como sabemos, $|K'| = \rho(G)$ e $|M| \leq \nu(G)$. Então, $|V(G)| = |K'| + |M| \leq \rho(G) + \nu(G)$. Portanto,

$$\rho(G) + \nu(G) \geq |V(G)|. \quad (5)$$

Por outro lado, seja M um emparelhamento máximo de G . Seja U o conjunto de vértices de G não saturados por M . Acrescente a M o menor número de arestas de modo a cobrir todos os vértices de U . Note que são necessárias no máximo $|U|$ arestas. O conjunto K' resultante deste procedimento é uma cobertura de G e $|K'| \leq |M| + |U|$. Como cada aresta de M satura exatamente dois vértices de G , temos $|V(G)| = 2|M| + |U|$. Além disso, sabemos que $\nu(G) = |M|$ e $\rho(G) \leq |K'|$. Assim, $\nu(G) + \rho(G) \leq |M| + |K'| \leq |M| + |M| + |U| = |V(G)|$. Portanto,

$$\nu(G) + \rho(G) \leq |V(G)|. \quad (6)$$

De (5) e (6), concluímos que $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$. \square

O próximo lema é bastante utilizado nas demonstrações subsequentes.

Lema 2.3. *Para todo grafo G , $\nu(G) \leq \tau(G)$.*

Demonstração. Sejam M um emparelhamento máximo e K uma cobertura por vértices mínima do grafo G . Cada aresta de M possui pelo menos um extremo em K . Uma vez que as arestas de M não possuem extremos em comum, K possui pelo menos $|M|$ vértices. Logo, $|M| \leq |K|$. Como $|M| = \nu(G)$ e $|K| = \tau(G)$, então $\nu(G) \leq \tau(G)$. \square

A partir de agora, passamos a nos restringir aos grafos bipartidos. A seguir, apresentamos três resultados fundamentais da Teoria de Emparelhamentos. O primeiro destes, o Teorema de König, mostra uma relação mais forte que o Lema 2.3 entre a cardinalidade de um emparelhamento máximo e a cardinalidade de uma cobertura mínima.

Teorema 2.4 (Teorema de König). *Para todo grafo bipartido G , $\nu(G) = \tau(G)$.*

Demonstração. Seja G um grafo bipartido. Pelo Lema 2.3, basta mostrar que $\tau(G) \leq \nu(G)$. Para isto, definimos G' um subgrafo minimal de G tal que

$$\tau(G') = \tau(G). \quad (7)$$

Ou seja, para todo $e \in E(G')$, $\tau(G' - e) < \tau(G')$. Vamos mostrar, por contradição, que $E(G')$ é um conjunto de arestas independentes.

Suponha que existam arestas distintas $e, f \in E(G')$, ambas incidentes em um vértice $v \in V(G')$. Sejam, ainda, $u, w \in V(G')$, com $u, w \neq v$, sendo u incidente em e e w incidente em f . Pela definição de G' , temos $\tau(G' - e) < \tau(G')$ e $\tau(G' - f) < \tau(G')$. Seja K_e uma cobertura por vértices de $G' - e$ tal que $|K_e| = \tau(G') - 1$. Defina K_f analogamente. Nenhum dos extremos de e pertence a K_e , pois, do contrário, K_e seria uma cobertura de G' com $|K_e| < \tau(G')$. Logo, $u, v \notin K_e$. Por outro lado, uma vez que $f \in E(G' - e)$, então K_e cobre f e, portanto, $w \in K_e$. Do mesmo modo, $v, w \notin K_f$, mas $u \in K_f$. Note, então, que v não está em nenhuma das duas coberturas e, ao mesmo tempo, cada um dos vértices u, w está exatamente uma das coberturas.

Seja $G'' = G'[(K_e \Delta K_f) \cup \{v\}]$ ². Note que $e, f \in E(G'')$. Faça $t = |K_e \cap K_f|$. O número de vértices em G'' , $|V(G'')|$, é tal que

$$\begin{aligned} |V(G'')| &= |K_e \Delta K_f| + 1, \\ |V(G'')| &= |K_e \cup K_f| - |K_e \cap K_f| + 1, \\ |V(G'')| &= |K_e| + |K_f| - 2|K_e \cap K_f| + 1, \\ |V(G'')| &= 2(\tau(G') - 1) - 2t + 1, \\ |V(G'')| &= 2(\tau(G') - 1 - t) + 1. \end{aligned}$$

O grafo G'' é subgrafo de G e, portanto, também é bipartido. Logo, uma das partes de G'' tem no máximo $\tau(G') - 1 - t$ vértices. Seja K'' o conjunto dos vértices desta parte. Observe que K'' é cobertura de G'' , com

$$|K''| \leq \tau(G') - 1 - t. \quad (8)$$

²A diferença simétrica $A \Delta B$ de dois conjuntos A, B é igual a $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Seja $K' = K'' \cup (K_e \cap K_f)$. Vamos mostrar que K' é cobertura de G' . Seja $e' \in E(G')$. Se $e' = e$ ou $e' = f$, então $e' \in E(G'')$ e, portanto, e' é coberta por K'' . Suponha $e' \neq e, f$. Então, a aresta e' é coberta tanto por K_e quanto por K_f . Logo, e' possui um extremo em K_e e um extremo em K_f . Se e' possui um extremo em $K_e \cap K_f$, então K' cobre e' . Senão, e' tem uma ponta em $K_e \setminus K_f$ e a outra ponta em $K_f \setminus K_e$. Neste caso, e' está em G'' e é coberta por K'' .

Como $K'' \subseteq V(G'')$ e $V(G'')$ não possui vértices de $K_e \cap K_f$, os conjuntos K'' e $K_e \cap K_f$ são disjuntos. Portanto,

$$\begin{aligned} |K'| &= |K'' \cup (K_e \cap K_f)|, \\ |K'| &= |K''| + |K_e \cap K_f|, \\ |K'| &= |K''| + t. \end{aligned}$$

Da equação acima e de (8), temos

$$\begin{aligned} |K'| &\leq \tau(G') - 1 - t + t, \\ |K'| &\leq \tau(G') - 1, \\ |K'| &< \tau(G'). \end{aligned}$$

Porém, como K' é cobertura de G' , $\tau(G') \leq |K'|$, contradizendo $|K'| < \tau(G')$. Concluimos, assim, que G' não possui arestas adjacentes. Logo, um emparelhamento máximo de G' é formado por todas as arestas de $E(G')$ e, então, $\nu(G') = |E(G')|$. Como $G' \subseteq G$, um emparelhamento em G' também é emparelhamento em G . Assim,

$$\nu(G') \leq \nu(G). \quad (9)$$

Além disso, uma cobertura mínima de G' é formada por exatamente um extremo de cada aresta de G' . Por isto,

$$\tau(G') = \nu(G'). \quad (10)$$

De (7), (9) e (10) concluimos que $\tau(G) \leq \nu(G)$. \square

O corolário a seguir, derivado do Teorema de König e das Identidades de Gallai, relaciona a cardinalidade de uma cobertura por arestas mínima com a cardinalidade de um conjunto independente de vértices máximo.

Corolário 2.5. *Para todo grafo bipartido G sem vértices isolados, $\rho(G) = \alpha(G)$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.1 e o Lema 2.2, $\alpha(G) + \tau(G) = \nu(G) + \rho(G)$. Além disso, pelo Teorema de König (Teorema 2.4), $\nu(G) = \tau(G)$. Juntando as duas equações, temos $\rho(G) = \alpha(G)$. \square

Outro resultado importante, o Teorema de Hall, está demonstrado a seguir utilizando o Teorema de König (Teorema 2.4).

Teorema 2.6 (Teorema de Hall). *Seja G um grafo bipartido, com partes A e B . O grafo G possui um emparelhamento de todos os vértices de A com vértices de B se e somente se $|\Gamma(X)| \geq |X|$ para todo $X \subseteq A$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que o grafo bipartido G possua um emparelhamento que cubra todos os vértices de A . Então, $\nu(G) = |A|$ e, pelo Teorema de König (Teorema 2.4), $\tau(G) = |A|$. Assim, $K = A$ é uma cobertura por vértices mínima de G . Tome $X \subseteq A$. Suponha que $|\Gamma(X)| < |X|$. Como G é bipartido, $\Gamma(X) \subseteq B$. Na cobertura K , os vértices de X cobrem as arestas entre X e $\Gamma(X)$, e apenas estas arestas. Se fizermos $K' = (K \setminus X) \cup \Gamma(X)$, temos uma nova cobertura de G . Como $X \subseteq K$ e $K \cap \Gamma(X) = \emptyset$,

$$\begin{aligned} |K'| &= |(K \setminus X) \cup \Gamma(X)|, \\ |K'| &= |(K \setminus X)| + |\Gamma(X)|, \\ |K'| &= |K| - |X| + |\Gamma(X)|, \\ |K'| &= |K| - (|X| - |\Gamma(X)|). \end{aligned}$$

Como $|\Gamma(X)| < |X|$, então $|K'| < |K|$. Isto é uma contradição, pois K é cobertura mínima de G . Portanto, $|\Gamma(X)| \geq |X|$ para todo $X \subseteq A$.

(\Leftarrow) Suponha que $|\Gamma(X)| \geq |X|$ para todo $X \subseteq A$. Vamos mostrar que $\nu(G) = |A|$. Para isto, suponha que $\tau(G) < |A|$. Seja K uma cobertura por vértices mínima de G . Como G é bipartido, $K = (K \cap A) \cup (K \cap B)$. Faça $U = A \setminus K$. Para que as arestas com extremos em U sejam cobertas, devemos ter $\Gamma(U) \subseteq K \cap B$. Então, $|K| = |K \cap A| + |K \cap B| \geq |K \cap A| + |\Gamma(U)|$. Como $U \subseteq A$, pela hipótese, $|\Gamma(U)| \geq |U|$. Assim, $|K| \geq |K \cap A| + |U| = |A|$. Porém, $|K| \geq |A|$ contradiz a suposição de que $\tau(G) < |A|$. Portanto, $\tau(G) \geq |A|$. Como A também é cobertura de G , concluímos que $\tau(G) = |A|$ e, pelo Teorema de König (Teorema 2.4), $\nu(G) = |A|$. \square

O Teorema de Frobenius completa os três resultados mais importantes desta seção. Este teorema é apresentado a seguir como um corolário do Teorema de Hall (Teorema 2.6).

Teorema 2.7 (Teorema de Frobenius). *Seja G um grafo bipartido, com partes A e B . O grafo G possui um emparelhamento perfeito se e somente se $|A| = |B|$ e $|\Gamma(X)| \geq |X|$ para todo $X \subseteq A$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que o grafo bipartido G possua um emparelhamento perfeito M . Assim, M satura todos os vértices de A . Pelo Teorema de Hall (Teorema 2.6), sabemos que $|\Gamma(X)| \geq |X|$ para todo $X \subseteq A$. Além disso, M também satura todos os vértices de B . Como G é bipartido, cada aresta de M tem um extremo em A e o outro em B . Assim, $|A| = |M|$ e $|B| = |M|$. Portanto, $|A|$ e $|B|$ são iguais.

(\Leftarrow) Para o mesmo grafo bipartido G , suponha $|A| = |B|$ e $|\Gamma(X)| \geq |X|$ para todo $X \subseteq A$. Novamente pelo Teorema de Hall, G possui um emparelhamento M que emparelha todos os vértices de A com vértices de B . Como $|A| = |B|$, todos os vértices de B são utilizados para emparelhar os vértices de A . Portanto, M é emparelhamento perfeito. \square

Neste ponto, está clara a relação de consequência entre os três teoremas. Menos óbvia, porém, é a relação de equivalência entre eles. Para mostrar esta relação, basta agora demonstrar o Teorema de König como consequência do Teorema de Frobenius. Antes disto,

vamos introduzir um conceito fundamental da Teoria de Emparelhamentos, que será utilizado na demonstração.

A ideia de caminhos com arestas que alternam entre pertencer e não pertencer a um dado emparelhamento aparece de forma recorrente em demonstrações de resultados relacionados a emparelhamentos. Seja G um grafo, **não necessariamente bipartido**, e seja M um emparelhamento em G . Um caminho $P = v_1v_2 \dots v_k$ em G é um *caminho M -alternante* se, para todo $i \in \{1, \dots, k-2\}$, a aresta v_iv_{i+1} pertence a M se e somente se a aresta $v_{i+1}v_{i+2}$ não pertence a M . Ademais, se v_1 e v_k não são saturados por M , o caminho P é um *caminho M -aumentante*. O teorema a seguir deixa clara a razão desta nomenclatura.

Teorema 2.8. *Sejam um grafo G e um emparelhamento M de G . O emparelhamento M é máximo se e somente se G não contém um caminho M -aumentante.*

Demonstração. (\Rightarrow) Dados G e M como na hipótese, suponha que exista um caminho M -aumentante P em G . Como P é um caminho M -alternante e ambas a primeira e última aresta de P não pertencem a M , então

$$|E(P) \setminus M| > |E(P) \cap M|. \quad (11)$$

Construa $M' \subseteq E(G)$, a partir de M , removendo as arestas de $E(P) \cap M$ e incluindo as arestas de $E(P) \setminus M$. Como P é alternante e seus extremos não são saturados por M , então M' também é um emparelhamento. Além dos vértices internos de P , observe que M' satura também os vértices extremos de P . De (11), inferimos que $|M'| > |M|$, contrariando o fato de M ser um emparelhamento máximo.

(\Leftarrow) Dados o grafo G e um emparelhamento M , suponha que não haja caminho M -aumentante em G . Seja M^* um emparelhamento máximo de G . Considere o grafo G_Δ formado pelos vértices de $V(G)$ e as arestas de $M \Delta M^*$, descartando-se eventuais vértices isolados. Cada vértice de G_Δ incide em no máximo uma aresta de M e no máximo uma aresta de M^* e, portanto, tem grau no máximo dois. Logo, cada componente conexa de G_Δ é ou um caminho ou um ciclo, com arestas alternadamente em M e em M^* . Cada um dos ciclos tem tamanho par. Por isto, $|E(C) \cap M| = |E(C) \cap M^*|$, para todo ciclo C de G_Δ . Seja P um caminho de G_Δ . Se o tamanho de P for par, então, como P é M -alternante e M^* -alternante, $|E(P) \cap M| = |E(P) \cap M^*|$. Suponha que o tamanho de P seja ímpar. Neste caso, $|E(P) \cap M| \neq |E(P) \cap M^*|$. Como M^* é máximo, P não é caminho M^* -aumentante. Assim, ambos os extremos de P são saturados por M^* . Logo, não são saturados por M . Isto implica que P é caminho M -aumentante em G , contrariando a suposição de que não há caminho M -aumentante em G . Portanto, G_Δ não possui caminhos de tamanho ímpar. Desta forma, $M \Delta M^*$ tem o mesmo número de arestas em M e em M^* , ou seja, $|(M \Delta M^*) \setminus M^*| = |(M \Delta M^*) \setminus M|$. Assim,

$$\begin{aligned} |M| &= |(M \Delta M^*) \setminus M^*| + |M \cap M^*| \\ &= |(M \Delta M^*) \setminus M| + |M \cap M^*| \\ &= |M^*|. \end{aligned}$$

Logo, M é um emparelhamento máximo. □

Agora, estamos prontos para demonstrar o Teorema de König (Teorema 2.4) a partir do Teorema de Frobenius (Teorema 2.7).

Demonstração. (Teorema de Frobenius \Rightarrow Teorema de König)

Suponha G um grafo bipartido, com partes A e B . Queremos mostrar que $\nu(G) = \tau(G)$. Seja M um emparelhamento máximo de G . Chame de U_A (U_B) o conjunto dos vértices de A (B) não saturados por M . Defina $A' = A \setminus U_A$ e $B' = B \setminus U_B$.

Vamos construir uma cobertura por vértices de G . Comece fazendo $K' := A'$. Note que G não possui arestas entre U_A e U_B , pois do contrário poderíamos aumentar M acrescentando qualquer uma destas arestas. Todas as arestas entre A' e B' e as arestas entre A' e U_B são adjacentes a algum vértice de K' . O mesmo não é verdade para as arestas entre U_A e B' . A seguir, modificamos K' a fim de obter uma cobertura K de G .

Seja R'_A o conjunto dos vértices de A' alcançáveis a partir de U_A por um caminho M -alternante em G . Seja $a' \in R'_A$. Existe um caminho M -alternante P entre $a \in U_A$ e a' . Como G é bipartido e a aresta de P incidente em a não pertence a M , então a aresta de P incidente em a' está em M . Se houvesse $a'b \in E(G)$ com $b \in U_B$, teríamos um caminho M -aumentante acrescentando $a'b$ a P . Assim,

$$\Gamma_G(R'_A) \cap U_B = \emptyset. \quad (12)$$

Faça $K := (K' \setminus R'_A) \cup \Gamma_G(R'_A)$. Veja que K cobre todas as arestas entre A' e B' , uma vez que as arestas incidentes em R'_A também incidem em $\Gamma_G(R'_A)$, e cobre todas as arestas entre A' e U_B , já que nenhuma destas arestas incide em R'_A . Agora, seja $e = ab'$, com $a \in U_A$ e $b' \in B'$. Pela definição de B' , existe $a' \in A'$ tal que $a'b' \in M$. Assim, o caminho $ab'a'$ é M -alternante e, por isso, $a' \in R'_A$ e $b' \in \Gamma_G(R'_A)$. Logo, $b' \in K$ e a aresta e está coberta. Deste modo, todas as arestas entre U_A e B' são cobertas por K . Assim, concluímos que K é cobertura de G .

Por último, vamos mostrar que $|K| = |M|$. Para isto, tome $b \in \Gamma_G(R'_A)$. Seja $a_1 \in R'_A$ adjacente a b . Suponha que b seja emparelhado por M com $a_2 \notin R'_A$. Seja P um caminho M -alternante entre U_A e a_1 . Adicionando o caminho a_1ba_2 a P , temos um caminho M -alternante entre U_A e a_2 , contradizendo $a_2 \notin R'_A$. Logo, todo vértice de $\Gamma_G(R'_A)$ está emparelhado com um vértice de R'_A , implicando em

$$|\Gamma_G(R'_A)| \leq |R'_A|. \quad (13)$$

Agora, denote por G' o subgrafo de G obtido pela remoção dos vértices de U_A e de U_B . Observe que M é um emparelhamento perfeito de G' . Além disso, G' também é bipartido, com partes A' e B' . Pelo Teorema de Frobenius (Teorema 2.7), $|\Gamma_{G'}(R'_A)| \geq |R'_A|$. De (12), inferimos que $\Gamma_{G'}(R'_A) = \Gamma_G(R'_A)$. Logo,

$$|\Gamma_G(R'_A)| \geq |R'_A|. \quad (14)$$

De (13) e (14), concluímos que $|\Gamma_G(R'_A)| = |R'_A|$. Assim, pela construção de K , temos $|K| = |K'|$. Como $|K'| = |A'| = |M|$, então $|K| = |M|$.

Uma vez que K é uma cobertura por vértices e M é um emparelhamento máximo de G , mostramos que $\nu(G) \geq \tau(G)$. Lembre-se que, pelo Lema 2.3, $\nu(G) \leq \tau(G)$. Portanto, $\nu(G) = \tau(G)$, tal como enunciado pelo Teorema de König (Teorema 2.4). \square

Com esta última demonstração, fechamos o ciclo de equivalências entre o Teorema de König (Teorema 2.4), o Teorema de Hall (Teorema 2.6) e o Teorema de Frobenius (Teorema 2.7).

2.1 O Método Húngaro

Até este ponto, nos concentramos na existência e cardinalidade de emparelhamentos máximos, bem como na relação entre esta cardinalidade e a cardinalidade de coberturas por vértices mínimas. Para completar nosso estudo de emparelhamentos máximos em grafos bipartidos, vamos tratar do problema de encontrar um emparelhamento máximo.

Apresentamos o *Método Húngaro*, devido a König e Egerváry, para a construção de emparelhamentos máximos em grafos bipartidos. O algoritmo derivado deste método utiliza os conceitos de caminhos alternantes e caminhos aumentantes, definidos anteriormente. Neste processo, também é utilizada a definição a seguir.

Definição 2.9. *Seja G um grafo bipartido, com partes A e B . Seja M um emparelhamento qualquer de G . Chamamos de U_A o conjunto dos vértices de A não saturados por M e de U_B o conjunto dos vértices de B não saturados por M . Definimos uma floresta F contida em G e maximal em relação às seguintes propriedades:*

- (i) *Para todo vértice $b \in B \cap V(F)$, $d_F(b) = 2$ e existe $e \in M \cap E(F)$ incidente em b .*
- (ii) *Cada componente de F contém um vértice de U_A .*

Por sua maximalidade, a floresta F da Definição 2.9 contém todos os vértices de U_A . Para ver isto, suponha $a \in U_A \setminus V(F)$. Agora, defina o grafo F' com $V(F') = V(F) \cup \{a\}$ e $E(F') = E(F)$. Como $a \notin V(F)$, o vértice a é um vértice isolado em F' e, portanto, F' também é uma floresta contida em G . As propriedades (i) e (ii) da Definição 2.9 estão satisfeitas por F' e, ademais, $F \subset F'$. Logo, F não é maximal. Por fim, uma floresta F (não necessariamente maximal) que satisfaça as propriedades pode ser trivialmente obtida fazendo $V(F) = U_A$ e $E(F) = \emptyset$.

Dado um emparelhamento M qualquer em um grafo G , a ideia do algoritmo que será descrito é encontrar um caminho M -aumentante que conecte um vértice de U_A a um vértice de U_B . Neste procedimento, consideramos o conjunto R_A dos vértices de A alcançáveis a partir de U_A por um caminho M -alternante. Se F é uma floresta como na Definição 2.9, podemos mostrar que $R_A = V(F) \cap A$. Para isto, suponha $v \in R_A \setminus V(F)$. Existe um caminho M -alternante P entre algum $a \in U_A$ e v . Considerando os vértices de P ordenados a partir de a , tome o último vértice a' de P que esteja em $V(F)$. Adicionando a F a parte do caminho P entre a' e v , obtemos uma nova floresta F' tal que $F \subset F'$. Além disso, como P é M -alternante, a propriedade (i) da Definição 2.9 é satisfeita por F' . Portanto, F não é maximal. Logo, todos os vértices de R_A pertencem a $V(F)$.

O lema a seguir é essencial para a definição do algoritmo do Método Húngaro.

Lema 2.10. *Sejam G , A , B , M , U_A , U_B e F como na Definição 2.9. O emparelhamento M é um emparelhamento máximo se e somente se não existe um vértice de U_B adjacente a algum vértice de F .*

Demonstração. (\Rightarrow) Sejam G , A , B , M , U_A , U_B e F como na Definição 2.9. Suponha $b \in U_B$ adjacente a $v \in V(F)$. Como G é bipartido, $v \in A$. Pela propriedade (ii) da Definição 2.9, sabemos que existe em F um caminho P de v até $a \in U_A$. Dentre todos os vértices de U_A que satisfazem esta condição, escolha aquele que minimiza $|E(P)|$. Logo, não existem vértices internos em P pertencem a U_A . Percorrendo o caminho P de a até v , inferimos, pela propriedade (i), que P é M -alternante. Como $a \in U_A$, a aresta de P incidente em a não pertence a M . Como ambos $a, v \in A$ e G é bipartido, o tamanho de P é par. Por isso, a aresta de P com extremo v pertence a M . Além disso, $bv \notin M$, pois $b \in U_B$. Assim, adicionando o vértice b e a aresta bv ao caminho P , temos um caminho M -aumentante. Pelo Teorema 2.8, M não é um emparelhamento máximo.

(\Leftarrow) Suponha que não exista vértice de U_B adjacente a algum vértice de F . Primeiramente, defina $X = A \setminus V(F)$ e $Y = B \cap V(F)$. Agora, faça $K = X \cup Y$. Vamos mostrar que $|K| = |M|$ e K é uma cobertura por vértices de G .

Como $U_A \subseteq V(F)$, então $X \cap U_A = \emptyset$. Além disso, como todo vértice de $B \cap V(F)$ é saturado por M , então $Y \cap U_B = \emptyset$. Logo, M satura K inteiramente. Suponha $xy \in M$, com $x \in X$ e $y \in Y$. Então, $x \notin V(F)$ e $y \in V(F)$. Pela propriedade (ii), como $y \in V(F)$, a aresta xy está em F e, conseqüentemente, $x \in V(F)$, uma contradição. Logo, cada aresta de M satura no máximo um vértice de K . Assim, $|M| \geq |K|$. Suponha, agora, que exista $e \in M$ tal que e não tem extremos em K . Sejam $a \in A$ e $b \in B$ os extremos de e . Então, pela construção de K , $a \in V(F)$ e $b \notin V(F)$. Pela propriedade (ii), existe um caminho P em F de a até algum vértice $a_1 \in U_A$. Como G é bipartido e os extremos de P estão ambos em A , P tem tamanho par. Além disso, pela propriedade (i), sabemos que P é M -alternante. Como e não está em F , percorrendo P de a até a_1 , observamos que a aresta de P com extremos a não está em M , mas a aresta de P incidente em a_1 está em M . Assim, a_1 é saturado por M , uma contradição. Portanto, toda aresta de M possui pelo menos um extremo em K e, conseqüentemente, $|K| \geq |M|$. Com isso, sabendo também que $|M| \geq |K|$, concluímos que $|M| = |K|$.

Para mostrar que K é uma cobertura por vértices de G , suponha que exista $e \in E(G)$ sem extremos em K . Sejam $a \in A$ e $b \in B$ os extremos de e . Por construção, $b \notin V(F)$ e $a \in V(F)$. Lembre-se que, pela hipótese, não existe vértice de U_B adjacente a algum vértice de F . Sendo a, b adjacentes, $b \notin U_B$ e, portanto, existe $f \in M$ tal que $f = a'b$. Pelo demonstrado anteriormente, um dos extremos de f está em K . Assim, $a' \in K \cap A$. Pela construção de K , $a' \notin V(F)$ e, conseqüentemente, $a' \neq a$. Se adicionarmos o caminho aba' a F , temos uma floresta que contém propriamente F e satisfaz as propriedades da Definição 2.9. Isto contradiz a maximalidade de F . Portanto, cada aresta de $E(G)$ possui pelo menos um extremo em K e, por isso, K é uma cobertura por vértices de G .

Pelo Lema 2.3, $\nu(G) \leq \tau(G)$. Mas, $\tau(G) \leq |K| = |M|$. Logo, $|M| \geq \tau(G) \geq \nu(G)$ e, assim, $|M| \geq \nu(G)$. Pela definição de $\nu(G)$, $|M| = \nu(G)$. Portanto, M é um emparelhamento máximo de G . \square

O Teorema de König (Teorema 2.4) pode ser obtido a partir do Lema 2.10. Para verificar isto, seja G um grafo bipartido com partes A, B . Referindo-se à Definição 2.9, suponha que M seja emparelhamento máximo. Do Lema 2.10, sabemos que nenhum vértice de U_B é adjacente a algum vértice de F . Da demonstração do Lema 2.10, sabemos que existe uma

cobertura por vértices K de G tal que $|K| = |M|$. Como $\tau(G) \leq |K|$ e $|M| = \nu(G)$, então $\tau(G) \leq \nu(G)$. Pelo Lema 2.3, $\nu(G) \leq \tau(G)$. Portanto, $\tau(G) = \nu(G)$, como queríamos demonstrar.

Descrevemos a seguir o algoritmo para a construção de um emparelhamento máximo em um grafo bipartido G com partes A, B .

1. Seja M um emparelhamento qualquer de G . Inicialmente, M pode ser vazio ou conter apenas uma aresta.
2. Usando as estruturas descritas na Definição 2.9 para o emparelhamento M , construa uma floresta maximal F tal como na definição, pelo procedimento a seguir:
 - (i) Seja uma árvore inicial F tal que $V(F) = U_A$ e $E(F) = \emptyset$.
 - (ii) Escolha um vértice $a \in V(F)$ e adicione a F todos os caminhos M -alternantes possíveis partindo de a e com o outro extremo em A , sem violar as propriedades da Definição 2.9 à medida em que os caminhos forem sendo incluídos.
 - (iii) Repita o passo anterior uma vez para cada vértice de U_A .
3. Caso exista uma aresta entre um vértice de U_B e um vértice de $V(F) \cap A$, obtenha um emparelhamento M' como na primeira parte de demonstração do Lema 2.10. Faça $M := M'$ e volte para o passo 2.
4. Caso contrário, pelo Lema 2.10, M é um emparelhamento máximo.

Considere a floresta F e o emparelhamento máximo M resultantes ao final do algoritmo. Faça $X := A \setminus V(F)$ e $Y := B \cap V(F)$, como na segunda parte da demonstração do Lema 2.10. Tal como na hipótese do lema, não há vértices de U_B adjacentes a nenhum vértice de $V(F) \cap A$. Logo, $X \cup Y$ é uma cobertura por vértices de G . Além disso, ainda pela demonstração, $|X \cup Y| = |M|$ e, assim, $|X \cup Y| = \nu(G)$. Portanto, pelo Teorema de König (Teorema 2.4), $X \cup Y$ é uma cobertura por vértices mínima de G .

3 Fluxos em Redes

Sejam um digrafo D e um conjunto $S \subseteq V(D)$. O *corte de saída* de S , denotado por $\nabla^+(S)$, é o conjunto dos arcos de D com a cauda em S e a cabeça em $V(D) \setminus S$. Já o *corte de entrada* de S , denotado por $\nabla^-(S)$, é o conjunto dos arcos de D com a cabeça em S e a cauda em $V(D) \setminus S$. Para um vértice $v \in V(D)$, definimos também seu *corte de saída* $\nabla^+(v) := \nabla^+(\{v\})$ e seu *corte de entrada* $\nabla^-(v) := \nabla^-(\{v\})$.

Agora, considere um digrafo D com dois vértices destacados, s e t , sendo s chamado de *origem* e t , *destino*. Seja $c: A(D) \rightarrow \mathbb{R}_+$ uma função que associa a cada arco (u, v) de D um número real não negativo $c(u, v)$ chamado de *capacidade* do arco. Uma *rede* é uma tupla (D, c, s, t) . Quando claro no contexto, nos referimos a D como uma rede, deixando s, t e c subentendidos. Uma função $f: A(D) \rightarrow \mathbb{R}_+$ é um *fluxo* desta rede se f satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) $f(u, v) \leq c(u, v)$ para todo arco $(u, v) \in A(D)$;
- (ii) $\sum_{a \in \nabla^-(v)} f(a) = \sum_{a \in \nabla^+(v)} f(a)$ para todo $v \in V(D) \setminus \{s, t\}$ (*conservação do fluxo*).

O valor do fluxo f é definido como

$$\text{val}(f) := \sum_{a \in \nabla^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^-(s)} f(a).$$

Podemos mostrar que $\text{val}(f) = \sum_{a \in \nabla^-(t)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^+(t)} f(a)$. Para isto, considere o somatório

$$F = \sum_{v \in V(D)} \left(\sum_{a \in \nabla^+(v)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^-(v)} f(a) \right).$$

Note que, neste somatório, cada arco de $A(D)$ aparece exatamente duas vezes e com sinais contrários. Por isso, $F = 0$. Além disto, pela conservação do fluxo, $\sum_{a \in \nabla^+(v)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^-(v)} f(a) = 0$, para todo $v \in V(D) \setminus \{s, t\}$. Logo,

$$\begin{aligned} F &= \sum_{v \in V(D)} \left(\sum_{a \in \nabla^+(v)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^-(v)} f(a) \right) \\ &= \sum_{v \in \{s, t\}} \left(\sum_{a \in \nabla^+(v)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^-(v)} f(a) \right) = 0 \\ &= \sum_{a \in \nabla^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^-(s)} f(a) + \sum_{a \in \nabla^+(t)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^-(t)} f(a) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{a \in \nabla^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^-(s)} f(a) = \sum_{a \in \nabla^-(t)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^+(t)} f(a)$.

Seja $S \subseteq V(D)$ tal que $s \in S$ e $t \in V(D) \setminus S$. Dizemos que S *separa* s e t e que S é um conjunto (s, t) -*separador*. Quando s e t estão subentendidos, podemos dizer que S é um conjunto *separador*. Além disso, o corte $\nabla^+(S)$ é dito um (s, t) -*corte* ou, simplesmente, *corte* de D . A *capacidade* do corte $\nabla^+(S)$, denotada por $\text{cap}(S)$, é igual a $\sum_{a \in \nabla^+(S)} c(a)$. Observe que, como D é um digrafo finito, há um número finito de cortes em D . Desta forma, supondo todos os arcos de D com capacidade finita, existe uma capacidade mínima bem definida dentre as capacidades de todos os cortes de D . Os cortes de D com capacidade mínima são chamados de *cortes mínimos*.

A existência de um fluxo f com valor mínimo dentre todos os fluxos de uma rede D qualquer é um problema trivial, visto que basta tomarmos $f(a) = 0$ para todo $a \in A(D)$ e, assim, teremos $\text{val}(f) = 0$. Um *fluxo máximo* de D é um fluxo f tal que $\text{val}(f)$ é maior ou igual ao valor de todos os fluxos de D . O Lema 3.1, demonstrado a seguir, estabelece uma relação entre o valor de um fluxo qualquer e os cortes de uma rede D .

Lema 3.1. *Sejam um fluxo f e um corte $\nabla^+(S)$ em uma rede D . Então,*

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(S).$$

Ademais, a igualdade $\text{val}(f) = \text{cap}(S)$ ocorre se e somente se cada arco de $\nabla^+(S)$ tiver fluxo igual à sua capacidade e cada arco de $\nabla^-(S)$ tiver fluxo igual a zero.

Demonstração. Lembre que $val(f) = \sum_{a \in \nabla^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^-(s)} f(a)$. Pela conservação do fluxo,

$$\begin{aligned} val(f) &= \left(\sum_{a \in \nabla^+(s)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^-(s)} f(a) \right) + \sum_{v \in S \setminus \{s\}} \left(\sum_{a \in \nabla^+(v)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^-(v)} f(a) \right) \\ val(f) &= \sum_{v \in S} \left(\sum_{a \in \nabla^+(v)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^-(v)} f(a) \right). \end{aligned}$$

Note que os arcos que possuem ambos os seus extremos em S cancelam-se na soma acima, restando apenas os arcos que possuem exatamente um extremo em S . Logo,

$$val(f) = \sum_{a \in \nabla^+(S)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^-(S)} f(a). \quad (15)$$

Pela definição de fluxo, $0 \leq f(a) \leq c(a)$ para todo $a \in A(D)$. Então,

$$val(f) = \sum_{a \in \nabla^+(S)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^-(S)} f(a) \leq \sum_{a \in \nabla^+(S)} f(a) \leq \sum_{a \in \nabla^+(S)} c(a) = cap(S).$$

Portanto, $val(f) \leq cap(S)$. Por fim, note que $val(f) = cap(S)$ na expressão acima se e somente se $f(a) = c(a)$ para todo $a \in \nabla^+(S)$ e $f(a) = 0$ para todo $a \in \nabla^-(S)$. \square

Pelo Lema 3.1, o valor de qualquer fluxo da rede D é limitante inferior da capacidade de todos os cortes da rede. Assim, se f^* é um fluxo máximo de D , temos $val(f^*) \leq cap(S)$, para todo corte $\nabla^+(S)$ de D . Ao mesmo tempo, qualquer fluxo f da rede D tem seu valor limitado superiormente pela capacidade de um corte mínimo $\nabla^+(S_*)$. Ou seja, $val(f) \leq cap(S_*)$. Logo, dados f um fluxo qualquer e $\nabla^+(S)$ um corte qualquer de D , temos

$$val(f) \leq val(f^*) \leq cap(S_*) \leq cap(S),$$

Por isso, nos casos em que ocorrer a igualdade $val(f) = cap(S)$, f será um fluxo máximo e $\nabla^+(S)$ será um corte mínimo da rede. Esta consequência importante do Lema 3.1 está enunciada a seguir.

Teorema 3.2. *Sejam f um fluxo e $\nabla^+(S)$ um corte em uma rede D . Se $val(f) = cap(S)$, então f é um fluxo máximo e $\nabla^+(S)$ é um corte mínimo de D .*

Neste ponto, podemos questionar se, dada um rede arbitrária, a igualdade $val(f) = cap(S)$ ocorre. E, caso ocorra, em quais condições? A ideia de caminhos “aumentantes”, introduzida a seguir, é fundamental para esta questão. Este conceito também é central nos algoritmos de construção de fluxo máximo.

Seja f um fluxo em uma rede D . Seja $v \in V(D)$. Um caminho f -aumentante para v é um caminho $P = v_0 \dots v_k$ (no grafo subjacente de D) tal que:

- $v_0 = s$;

- $v_k = v$;
- para todo $i \in \{0, \dots, k-1\}$,
 - (i) $(v_i, v_{i+1}) \in A(D)$ e $f(v_i, v_{i+1}) < c(v_i, v_{i+1})$ ou
 - (ii) $(v_{i+1}, v_i) \in A(D)$ e $f(v_{i+1}, v_i) > 0$.

Quando temos um caminho f -aumentante para t (o destino da rede), dizemos que o caminho é apenas f -aumentante (na rede D). Quando f estiver subentendido, também podemos dizer que o caminho é, simplesmente, *aumentante*. O lema a seguir torna clara a razão deste nome, uma vez que explicita a relação entre caminhos aumentantes e fluxos máximos.

Lema 3.3. *Um fluxo f em uma rede D é máximo se e somente se não existe caminho f -aumentante em D .*

Demonstração. (\Rightarrow) Suponha que exista um caminho f -aumentante P em D . Seja $P = v_0 \dots v_k$. Considere $i \in \{0, \dots, k-1\}$. Defina $\epsilon_1 = \min_i \{c(v_i, v_{i+1}) - f(v_i, v_{i+1}) : (v_i, v_{i+1}) \text{ é arco de } P\}$ e $\epsilon_2 = \min_i \{f(v_{i+1}, v_i) : (v_{i+1}, v_i) \text{ é arco de } P\}$. Pela definição de caminho aumentante, $\epsilon_1 > 0$ e $\epsilon_2 > 0$. Seja $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$. Obtenha um novo fluxo f' em D a partir de f aumentando de ϵ o fluxo de f nos arcos (v_i, v_{i+1}) de P e diminuindo de ϵ o fluxo f dos arcos (v_{i+1}, v_i) de P . Observe que, neste processo, para cada vértice interno de P , o balanço do fluxo de saída e de entrada continua igual a zero. Portanto, a propriedade de conservação do fluxo é mantida para todos estes vértices. Já ambos o fluxo que sai de s e o fluxo que entra em t aumentam em ϵ . Assim, $val(f') = val(f) + \epsilon$ e, portanto, $val(f') > val(f)$. Logo, f não é fluxo máximo.

(\Leftarrow) Agora, suponha que não haja caminho f -aumentante em D . Defina X_f o conjunto de todos os vértices $v \in V(D)$ tais que existe um caminho f -aumentante para v . Por hipótese, $t \notin X_f$. Assim, X_f é conjunto separador. Logo, $val(f) = \sum_{a \in \nabla^+(X_f)} f(a) - \sum_{a \in \nabla^-(X_f)} f(a)$ (veja a equação (15) na demonstração do Lema 3.1). Pela construção de X_f , todo arco a com apenas a cauda em X_f tem $f(a) = c(a)$, caso contrário teríamos um caminho f -aumentante para a cabeça de a , que está fora de X_f , contradizendo a definição de X_f . De forma similar, todo arco que possui apenas a cabeça em X_f tem fluxo igual a zero. Portanto,

$$val(f) = \sum_{a \in \nabla^+(X_f)} c(a) = cap(X_f).$$

Então, pelo Lema 3.1, f é fluxo máximo. □

Neste ponto, estamos prontos para demonstrar um dos resultados mais importantes da área de Teoria de Fluxos em Redes.

Teorema 3.4. *Em uma rede D qualquer, o valor de um fluxo máximo é igual à capacidade de um corte mínimo.*

Demonstração. Seja f um fluxo máximo na rede (D, c, s, t) . Seja X_f o conjunto de todos os vértices de D para os quais existe caminho f -aumentante. Pelo Lema 3.3, $t \notin X_f$. Da demonstração do mesmo lema, sabemos também que $val(f) = cap(X_f)$. Seja γ a capacidade de um (s, t) -corte mínimo de D . Assim, $cap(X_f) \geq \gamma$ e, logo, $val(f) \geq \gamma$. Ao mesmo tempo, pelo Lema 3.1, temos $val(f) \leq \gamma$. Portanto, $val(f) = \gamma$. □

3.1 Algoritmos de Fluxos

Até aqui, demonstramos a existência de fluxos máximos de maneira não construtiva. Nesta seção, tratamos de maneiras de efetivamente encontrar um fluxo máximo em uma rede. Em 1962, Ford e Fulkerson [3] propuseram um procedimento baseado na afirmação de que um fluxo f é máximo se e somente se não existem caminhos f -aumentantes na rede (Lema 3.3). O *Algoritmo de Ford e Fulkerson* está descrito a seguir.

1. Defina um fluxo inicial qualquer f_0 (por exemplo, igual a zero em todos os arcos).
2. Faça $k := 0$.
3. Procure um caminho f_k -aumentante P .
4. Se P existir, aumente o fluxo f_k ao longo das arestas de P (tal como na demonstração do Lema 3.3, somando ou subtraindo ϵ do fluxo em cada arco de P) obtendo, assim, um fluxo f_{k+1} com $val(f_{k+1}) > val(f_k)$.
5. Caso não exista caminho f_k -aumentante, f_k é máximo. Termine o procedimento.
6. Faça $k := k + 1$ e volte para o passo 3.

Para analisar o funcionamento do algoritmo, primeiramente considere o caso em que todas as capacidades da rede D são inteiras. Seja um fluxo inicial f_0 igual a zero (e, portanto, inteiro) nesta rede. Para cada $a \in A(D)$, a diferença entre $c(a)$ e $f_0(a)$ é um número inteiro. Logo, se houver um caminho f_0 -aumentante P , o valor com o qual aumentamos o fluxo ao longo dos arcos de P é inteiro. Assim, o fluxo f_1 resultante da primeira iteração é inteiro. Considere a k -ésima iteração do algoritmo, tendo um fluxo inteiro f_{k-1} como entrada. Pelo mesmo raciocínio anterior, se houver um caminho $f_{(k-1)}$ -aumentante, o fluxo será aumentado em um valor inteiro, resultando em um fluxo f_k inteiro. Assim, temos uma sequência $val(f_0) < val(f_1) < val(f_2) < \dots$ de valores inteiros. Pelo Lema 3.1, esta sequência é limitada superiormente. Isto implica que a sequência obrigatoriamente terminará em algum fluxo f_k inteiro, com $val(f_k)$ menor ou igual ao limitante superior. Não há caminho f_k -aumentante, pois do contrário a sequência continuaria aumentando. Portanto, f_k é um fluxo máximo em D . Além disso, como $val(f_k)$ é inteiro e a cada passo do algoritmo o fluxo é aumentado de um valor inteiro, o algoritmo termina em um número finito de passos.

O argumento acima demonstra a correção do Algoritmo de Ford e Fulkerson em redes nas quais todas as capacidades são inteiras. O teorema a seguir é uma consequência importante deste argumento.

Teorema 3.5. *Seja uma rede com todas as capacidades inteiras. Existe um fluxo máximo com valores inteiros em todos os arcos.* \square

Se as capacidades de uma rede tiverem valores racionais, o Algoritmo de Ford e Fulkerson também termina em um número finito de passos. Para verificar isto, basta multiplicar todas as capacidades por um mesmo número de modo a torná-las inteiras. Porém, há duas situações nas quais o algoritmo pode falhar. Na primeira, se as capacidades da rede forem números reais (ou seja, podem incluir números irracionais), o algoritmo poderá convergir para um fluxo com valor menor do que o de um fluxo máximo. No outro caso, se o fluxo

inicial não for zero, mesmo que todas as capacidades sejam infinitas, o algoritmo poderá convergir para um valor finito. A seguir, descrevemos um exemplo deste segundo caso.

Seja a rede D apresentada na Figura 4, com o fluxo inicial f_0 mostrado na figura, sendo α a raiz positiva da equação $x^3 + x - 1 = 0$. Observe que $1/2 < \alpha < 1$. Além disso, todos os arcos de D possuem capacidade infinita. Considere a seguinte sequência de quatro caminhos entre s e t no grafo subjacente de D :

1. $P_1 = scdabt$,
2. $P_2 = scbadt$,
3. $P_3 = sabcdt$,
4. $P_4 = sadcbt$.

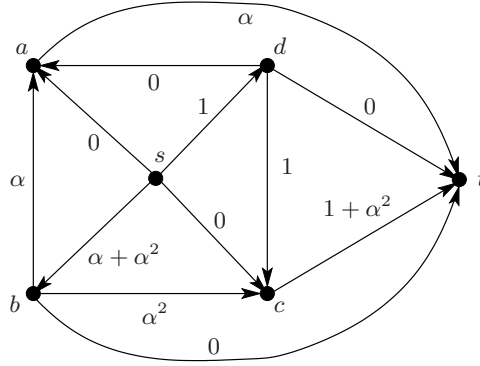
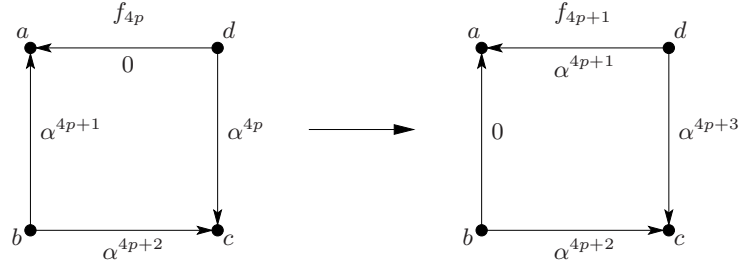


Figura 4: Rede D com fluxo inicial f_0 .

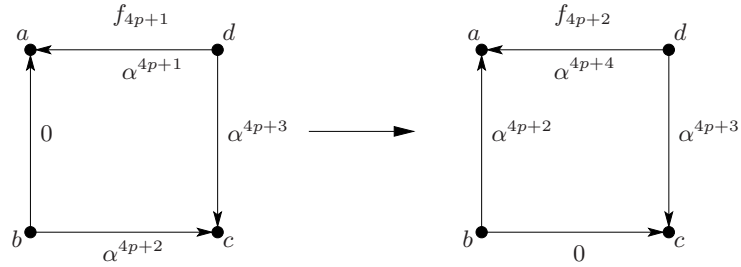
Podemos executar o Algoritmo de Ford e Fulkerson em D escolhendo esta sequência de caminhos repetidamente. Em cada iteração k , sendo $k = 4p + q$, com $p \geq 0$ e $1 \leq q \leq 4$, adicionamos α^k ao fluxo dos arcos ao longo do caminho, construindo, assim, um novo fluxo f_k a partir do fluxo anterior f_{k-1} . A Figura 5 mostra quatro iterações utilizando os caminhos da sequência, partindo de um fluxo inicial f_{4p} exibido na figura. Observe que s é cauda de todos os arcos que incidem neste vértice e t é cabeça de todos os arcos incidentes em t . Assim, tais arcos não limitam a quantidade adicionada ao valor do fluxo a cada iteração e, por isso, estão suprimidos na figura.

Na Figura 5, note que cada um dos quatro caminhos da sequência é de fato um caminho aumentante na iteração correspondente da figura. Na primeira iteração, aumentamos o fluxo f_{4p} em α^{4p+1} ao longo do caminho P_1 para obter o fluxo f_{4p+1} . Continuamos assim sucessivamente até a quarta iteração, na qual o fluxo f_{4p+3} é aumentado ao longo de P_4 em α^{4p+4} , obtendo o fluxo f_{4p+4} . Observe que, para $p = 0$, o fluxo inicial f_{4p} da figura é igual ao fluxo f_0 na Figura 4. Por fim, o fluxo resultante da última iteração da Figura 5 é igual ao fluxo da primeira iteração da figura se substituirmos p por $p+1$ em f_{4p} ($f_{4p+4} = f_{4(p+1)}$). Assim, podemos utilizar os quatro caminhos da sequência por um número infinito de vezes, sempre obtendo um fluxo com valor maior que o do fluxo anterior.

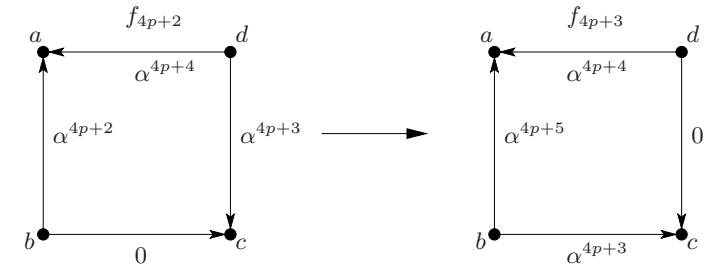
Pelo processo descrito, partindo do fluxo inicial f_0 , a cada iteração k , com $k \geq 1$, aumentamos o valor de f_{k-1} em α^k , obtendo f_k . Pela Figura 4, veja que $val(f_0) = 1 + \alpha + \alpha^2$.



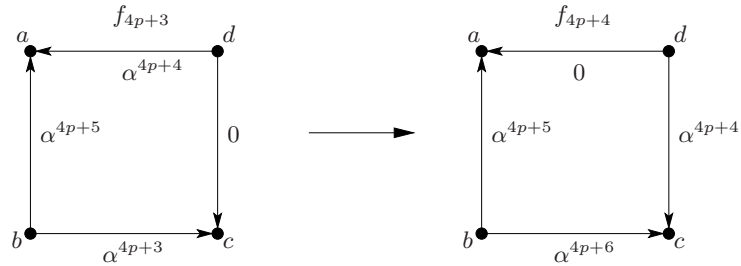
(a) 1: aumentando o valor de f_{4p} em α^{4p+1} ao longo de $scdabt$.



(a) 2: aumentando o valor de f_{4p+1} em α^{4p+2} ao longo de $schadt$.



(a) 3: aumentando o valor de f_{4p+2} em α^{4p+3} ao longo de $sabcdt$.



(a) 4: aumentando o valor de f_{4p+3} em α^{4p+4} ao longo de $sadcbt$.

Figura 5: Iterações do Algoritmo de Ford e Fulkerson.

Mostramos a seguir que o valor de f_k possui um limitante superior finito.

$$\begin{aligned}
 val(f_k) &= val(f_0) + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^k \\
 &= (1 + \alpha + \alpha^2) + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^k \\
 &= (1/\alpha)(\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^k) \\
 &= (1/\alpha)(\alpha + \alpha^2 + (1 - \alpha) + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^k)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1/\alpha)(1 + 2\alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^k) \\
&< (1/\alpha)(1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^k).
\end{aligned}$$

O segundo termo da multiplicação acima é igual à soma de um número finito de termos de uma progressão geométrica com razão igual a α e menor que 1, sendo o primeiro termo da progressão igual a 1. Logo, esta soma é menor do que $\frac{1}{1-\alpha}$. Portanto,

$$val(f_k) < \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha^3} = \alpha^{-4}.$$

Como $\alpha > 1/2$, então $\alpha^{-4} < (1/2)^{-4} = 16$. Logo, $val(f_k) < 16$, para todo $k \geq 1$. Deste modo, temos um exemplo no qual o Algoritmo de Ford e Fulkerson não termina e o valor do fluxo converge para um número finito, mesmo que a rede tenha capacidades infinitas.

Edmonds e Karp propuseram um algoritmo para encontrar um fluxo máximo que sempre termina em um número finito de passos, independente das capacidades dos arcos. O *Algoritmo de Edmonds e Karp* é muito parecido com o Algoritmo de Ford e Fulkerson. A diferença está na escolha do caminho em cada iteração k , que deve sempre ser um caminho $f_{(k-1)}$ -aumentante *mínimo*, ou seja, com o menor número de arcos possível.

Dada uma rede D com um fluxo f , vamos descrever como encontrar um caminho f -aumentante mínimo em D . Primeiramente, construa um novo digrafo D_1 com $V(D_1) = V(D)$. Para cada par $u, v \in V(D)$, acrescente um arco com origem u e orientado para v se, e somente se:

- $(u, v) \in A(D)$ e $f(u, v) < c(u, v)$, ou
- $(v, u) \in A(D)$ e $f(v, u) > 0$.

Pela definição de caminho f -aumentante, um caminho direcionado de s para t em D_1 corresponde a um caminho f -aumentante em D , e vice-versa. Então, para encontrar um caminho f -aumentante mínimo em D , basta encontrar um caminho orientado mínimo de s a t em D_1 . Tal caminho pode ser encontrado com uma *busca em largura* em D_1 .

Iniciamos uma busca em largura no digrafo D_1 definido acima escolhendo como vértice inicial a origem s da rede. Na primeira iteração, identificamos todos os vértices de $\Gamma^+(s)$. Para cada vértice v assim identificado, também marcamos o arco (s, v) . Definimos um conjunto S_1 formado por s e por todos os vértices identificados. Na i -ésima iteração, considere o conjunto S_{i-1} obtido na iteração anterior. Formamos S_i adicionando a S_{i-1} cada vértice v de $V(D_1) \setminus S_{i-1}$ que pertença a $\Gamma^+(u)$ para algum $u \in S_{i-1}$. Ao adicionar o vértice v , também marcamos o arco (u, v) . Este procedimento é repetido até que o vértice t seja alcançado, digamos, na k -ésima iteração. Neste ponto, temos uma árvore T formada pelos vértices identificados e pelas arestas marcadas. Em T , existe um único caminho P de s a t . Suponha que P não seja um caminho mínimo de s a t . Por construção, P tem tamanho $k-1$. Seja Q um caminho mínimo de s a t , com tamanho $l-1$. Logo, $l < k$. Faça $Q = x_1x_2 \dots x_l$, sendo $x_1 = s$ e $x_l = t$. Para $1 \leq i \leq l$, cada vértice x_i é identificado pelo algoritmo na i -ésima iteração. Portanto, t é identificado na l -ésima iteração, contradizendo o fato de que o algoritmo para na k -ésima iteração.

A correção do Algoritmo de Edmonds e Karp é consequência do resultado a seguir, cuja demonstração está além do escopo deste texto e pode ser encontrada no texto de Lovász e Plummer [2].

Teorema 3.6. *Considere o Algoritmo de Ford e Fulkerson. Suponha que, a cada iteração k do algoritmo, $k \geq 1$, o fluxo f_k seja obtido a partir de f_{k-1} aumentando o fluxo dos arcos ao longo de um caminho $f_{(k-1)}$ -aumentante com um número mínimo de arcos. Se $p = |V(D)|$, o algoritmo encontra um fluxo máximo em menos de $p^3/2$ iterações. \square*

4 Aplicação da Teoria de Fluxos em Redes à Teoria de Emparelhamentos

Nesta seção, retomamos alguns resultados da Teoria de Emparelhamentos, abordada na Seção 2. Novas demonstrações para estes resultados são obtidas aqui utilizando-se a Teoria de Fluxos em Redes, desenvolvida na Seção 3. Apresentamos, ainda, outros problemas relacionados à Teoria de Emparelhamentos, que generalizam o conceito de emparelhamento. Iniciamos com uma demonstração do Teorema 2.4 (Teorema de König).

Teorema 4.1 (Teorema de König). *Para todo grafo bipartido G , $\tau(G) = \nu(G)$.*

Demonstração. Dado um grafo bipartido G com partes X e Y , construa uma rede D a partir de G da seguinte forma:

1. substitua cada aresta de G por um arco com os mesmos extremos, apontando de X para Y , e com capacidade infinita;
2. adicione dois novos vértices, s e t ;
3. para cada $x \in X$, inclua um arco (s, x) com capacidade igual a um;
4. para cada $y \in Y$, adicione um arco (y, t) com capacidade também igual a um.

Seja M^* um emparelhamento máximo de G . Defina uma função $f: A(D) \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que: para cada aresta de M^* com extremos $x \in X$ e $y \in Y$, faça $f(s, x) := 1$, $f(x, y) := 1$ e $f(y, t) := 1$; para cada arco (u, v) restante de D , faça $f(u, v) := 0$. Assim, cada vértice saturado por M^* possui exatamente um arco de entrada com valor igual a um e um arco de saída com valor igual a um. Todos os outros vértices, a menos de s e t , incidem apenas em arcos com valor zero. Logo, f é fluxo de D . Ademais, note que $val(f) = |M^*|$. Vamos mostrar que f é um fluxo máximo de D . Para isto, suponha que exista um caminho f -aumentante $P = sxyt$ em D , com $x \in X$, $y \in Y$. Pelas construções de D e de f , todos os arcos de P têm fluxo zero e x, y não são saturados por M^* . Logo, $M^* \cup \{(x, y)\}$ é emparelhamento e tem cardinalidade maior que $|M^*|$, uma contradição. Portanto, D não possui caminho f -aumentante e, pelo Lema 3.3, f é fluxo máximo de D .

Seja K uma cobertura por vértices de G . Em D , faça $S := \{s\} \cup (X \setminus K) \cup (Y \cup K)$ e $T := (X \cap K) \cup (Y \setminus K) \cup \{t\}$. Note que $T = V(D) \setminus S$. Uma vez que K cobre todas as arestas de G , não há arestas entre $X \setminus K$ e $Y \setminus K$. Além disso, os arcos de D entre $X \cap K$ e $Y \cap K$ apontam de T para S . Assim, os arcos de D que apontam de S para T são exatamente os arcos entre $\{s\}$ e $X \cap K$ e os arcos entre $Y \cap K$ e $\{t\}$. Logo, o corte $\nabla^+(S)$ é formado por $|K|$ arcos com capacidade um. Então, $cap(\nabla^+(S)) = |K|$.

Por outro lado, seja $\nabla^+(S)$ um (s, t) -corte de D com capacidade finita. Faça $K := (X \setminus S) \cup (Y \cap S)$. Como $\nabla^+(S)$ é finito, não existem arcos que partem de $X \cap S$ para $Y \setminus S$. Assim, todas as arestas que partem de $X \cap S$ apontam para $Y \cap S$. Portanto, K cobre todas as arestas de G . Além disso, veja que todos os arcos que partem de $\nabla^+(S)$ apontam ou de

s para $X \setminus S$, ou de $Y \cap S$ para t . Pela construção de D , temos $|K|$ arcos de capacidade um no corte. Assim, $|K| = \text{cap}(\nabla^+(S))$.

Pelo exposto acima, a partir de uma cobertura mínima por vértices K_\star de G , construímos um (s, t) -corte mínimo de D com capacidade igual a $|K_\star|$. Além disso, a partir de um emparelhamento máximo M^\star de G , construímos um fluxo máximo de D com valor igual a $|M^\star|$. Pelo Teorema 3.4, $|K_\star| = |M^\star|$ e, portanto, $\tau(G) = \nu(G)$. \square

Dado um grafo G , seja $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Um f -fator de G é um subgrafo gerador F de G tal que $d_F(v) = f(v)$ para todo $v \in V(G)$. Quando a função f é constante e igual a k , também dizemos que um f -fator é um k -fator. Note que um emparelhamento perfeito de G é o conjunto de arestas de um 1-fator de G .

O teorema a seguir provê uma caracterização para grafos bipartidos que contenham um f -fator. Dados dois conjuntos de vértices X e Y , denotamos por $q(X, Y)$ o número de arestas com um extremo em X e outro em Y .

Teorema 4.2. *Seja G um grafo bipartido com partes A e B . Suponha uma função $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+$. O grafo G contém um f -fator se e somente se*

$$(i) \sum_{x \in A} f(x) = \sum_{y \in B} f(y) \text{ e}$$

$$(ii) \text{ para todo } X \subseteq A \text{ e } Y \subseteq B,$$

$$\sum_{x \in X} f(x) \leq q(X, Y) + \sum_{y \in B \setminus Y} f(y).$$

Demonstração. (\Rightarrow) Seja G um grafo bipartido, com partes A e B , e seja $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Suponha que G contenha um f -fator F . Cada aresta de F tem exatamente um extremo em A e cada vértice $v \in A$ incide em exatamente $f(v)$ arestas de F . Por isso, $\sum_{v \in A} f(v) = |E(F)|$. Analogamente, $\sum_{w \in B} f(w) = |E(F)|$. Assim, a condição (i) é satisfeita.

Sejam $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$. Entre X e Y , existem $q(X, Y)$ arestas em G . Logo, $q(X, Y)$ é limitante superior do número de arestas entre X e Y em F . Também em F , entre A e $B \setminus Y$, existem exatamente $\sum_{y \in B \setminus Y} f(y)$ arestas. Então, este número é limitante superior para o número de arestas entre X e $B \setminus Y$ em F . Assim, o número de arestas de F incidentes em X é no máximo $q(X, Y) + \sum_{y \in B \setminus Y} f(y)$. Por fim, o número de arestas de F que incidem em X é igual a $\sum_{x \in X} f(x)$ e, então, a condição (ii) é satisfeita.

(\Leftarrow) No mesmo grafo G , suponha agora que (i) e (ii) sejam satisfeitas. Construa uma rede D a partir de G como descrito a seguir. Primeiramente, troque cada aresta $xy \in E(G)$, com $x \in A$ e $y \in B$, por um arco (x, y) com capacidade $c(x, y) = 1$. Em seguida, adicione dois vértices, s e t . Para cada $x \in A$, insira um arco (s, x) com capacidade $c(s, x) = f(x)$ e, para cada $y \in B$, insira um arco (y, t) com $c(y, t) = f(y)$. Agora, suponha que D admita um fluxo inteiro f^\star com valor igual a $\sum_{x \in A} f(x)$ (e, portanto, também igual a $\sum_{y \in B} f(y)$). Deste modo, $f^\star(s, x) = f(x)$, para todo $x \in A$. Então, pela conservação do fluxo, temos $f(x) = \sum_{y \in \Gamma^+(x)} f^\star(x, y)$. Analogamente, $f(y) = \sum_{x \in \Gamma^-(y)} f^\star(x, y)$. Assim, para construir um f -fator de G , basta escolher as arestas $xy \in E(G)$ tais que $f^\star(x, y) = 1$ em D . Vamos mostrar que tal fluxo existe em D .

Seja $S \subseteq V(D)$ um conjunto (s, t) -separador. Faça $X := S \cap A$ e $Y := B \setminus S$. Vamos calcular $\text{cap}(S)$ particionando o corte $\nabla^+(S)$ em três partes. Os arcos entre s e $A \setminus X$ contribuem com $\sum_{v \in A \setminus X} f(v)$. Para os arcos entre X e Y , todos com capacidade um, temos $q(X, Y)$. Já os arcos de $B \setminus Y$ para t contribuem com $\sum_{w \in B \setminus Y} f(w)$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{cap}(S) &= \sum_{v \in A \setminus X} f(v) + q(X, Y) + \sum_{w \in B \setminus Y} f(w) \\ &\geq \sum_{v \in A \setminus X} f(v) + \sum_{v \in X} f(v) && \text{(de (ii))} \\ &= \sum_{v \in A} f(v). \end{aligned}$$

Como S é arbitrário, mostramos que qualquer (s, t) -corte de D , incluindo um corte mínimo, tem capacidade maior ou igual a $\sum_{v \in A} f(v)$. Seja f^* um fluxo máximo de D . Nessas condições, pelo Teorema 3.4, $\text{val}(f^*) \geq \sum_{v \in A} f(v)$. Ao mesmo tempo, se fizermos $S = \{s\}$, então $\text{cap}(S) = \sum_{v \in A} f(v)$. Assim, pelo Lemma 3.1, $\text{val}(f^*) \leq \sum_{v \in A} f(v)$. Portanto, $\text{val}(f^*) = \sum_{v \in A} f(v)$. Por fim, pelo Teorema 3.5, D admite um fluxo máximo inteiro. Concluimos, então, que existe em D um fluxo inteiro com valor igual a $\sum_{v \in A} f(v)$. \square

Lembre-se que o Teorema de Frobenius (Teorema 2.7) nos dá uma caracterização para grafos bipartidos que possuem um emparelhamento perfeito. Retomamos aqui o Teorema de Frobenius, demonstrando-o como um caso especial do Teorema 4.2.

Teorema 4.3 (Teorema de Frobenius). *Seja G um grafo bipartido, com partes A e B . O grafo G possui um emparelhamento perfeito se e somente se $|A| = |B|$ e $|\Gamma(X)| \geq |X|$ para todo $X \subseteq A$.*

Demonstração. Seja G um grafo bipartido, com partes A e B . Suponha que G possua um emparelhamento perfeito M . Note que M é o conjunto de arestas de um 1-fator de G . Assim, podemos utilizar o Teorema 4.2, restringindo-nos ao caso em que $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+$ é constante e igual a 1. Em primeiro lugar, note que, neste caso, a condição (i) do Teorema 4.2 é equivalente a $|A| = |B|$.

Agora, vamos mostrar que a condição (ii) do Teorema 4.2 é satisfeita se e somente se $|X| \leq |\Gamma(X)|$ para todo $X \subseteq A$. Primeiramente, suponha verdadeira a condição (ii) do Teorema 4.2. Considere $X \subseteq A$. Fazendo $Y := B \setminus \Gamma(X)$, temos $q(X, Y) = 0$ e $B \setminus Y = \Gamma(X)$. Pela condição (ii), temos

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X} f(x) &\leq q(X, Y) + \sum_{y \in B \setminus Y} f(y), \\ |X| &\leq 0 + \sum_{y \in \Gamma(X)} f(y), \\ |X| &\leq |\Gamma(X)|. \end{aligned}$$

Por outro lado, suponha $|\Gamma(X)| \geq |X|$ para todo $X \subseteq A$. Tome $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$ quaisquer. Assim, $\Gamma(X) \cap Y$ contém um número de vértices menor ou igual a $q(X, Y)$. Além disso,

$\Gamma(X) \setminus Y \subseteq B \setminus Y$. Portanto,

$$\begin{aligned} |\Gamma(X) \cap Y| + |\Gamma(X) \setminus Y| &\leq q(X, Y) + |B \setminus Y|, \\ |\Gamma(X)| &\leq q(X, Y) + |B \setminus Y|, \\ |\Gamma(X)| &\leq q(X, Y) + \sum_{y \in B \setminus Y} f(y). \end{aligned}$$

Sabendo que $|\Gamma(X)| \geq |X|$, temos

$$\begin{aligned} |X| &\leq q(X, Y) + \sum_{y \in B \setminus Y} f(y), \\ \sum_{x \in X} f(x) &\leq q(X, Y) + \sum_{y \in B \setminus Y} f(y), \end{aligned}$$

satisfazendo a condição (ii) do Teorema 4.2.

Mostramos que, no caso especial em que f é constante e igual a 1, o Teorema 4.2 é equivalente ao Teorema de Frobenius. Portanto, o Teorema de Frobenius é um corolário do Teorema 4.2. \square

Existe um outro conceito que generaliza as definições de emparelhamento e emparelhamento perfeito. Considere novamente um grafo bipartido G , com uma função $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Seja M_f uma coleção das arestas de G , com repetições de arestas permitidas. Considere, ainda, $w(uv)$ o número de vezes que $uv \in E(G)$ aparece em M_f . A coleção de arestas M_f é um f -emparelhamento se, para todo $v \in V(G)$,

$$\sum_{u \in \Gamma(v)} w(uv) \leq f(v).$$

Se a igualdade ocorrer para todos os vértices de G , então M_f é um f -emparelhamento perfeito. Se não houverem repetições em um f -emparelhamento perfeito M_f , então M_f é o conjunto das arestas de um f -fator. Veja que um emparelhamento (perfeito) nada mais é do que um f -emparelhamento (perfeito) com f constante e igual a um.

O resultado a seguir nos dá um conjunto de condições necessárias e suficientes para a existência de um f -emparelhamento perfeito em grafos bipartidos. A demonstração apresentada é similar à do Teorema 4.2, com diferença nas capacidades de alguns arcos da rede utilizada na demonstração.

Teorema 4.4. *Seja G um grafo bipartido com partes A, B e seja $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+$. O grafo G possui um f -emparelhamento perfeito se e somente se*

- (i) $\sum_{x \in A} f(x) = \sum_{y \in B} f(y)$ e
- (ii) para todo $X \subseteq A$, $\sum_{x \in X} f(x) \leq \sum_{y \in \Gamma(X)} f(y)$.

Demonstração. (\Rightarrow) Seja G um grafo bipartido com partes A, B e seja $f: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Suponha que G contenha um f -emparelhamento perfeito M_f . Cada aresta de M_f tem

exatamente um extremo em A e cada vértice $v \in A$ incide em exatamente $f(v)$ arestas de M_f , considerando as repetições. Por isso, $\sum_{v \in A} f(v) = |M_f|$. Analogamente, $\sum_{w \in B} f(w) = |M_f|$. Assim, a condição (i) é satisfeita.

Ainda em G , seja $X \subseteq A$. A quantidade de arestas de M_f que incidem em algum vértice de X , levando em conta as repetições, é igual a $\sum_{x \in X} f(x)$. Todas estas arestas incidem em vértices de $\Gamma(X)$. Com as repetições, temos $\sum_{y \in \Gamma(X)} f(y)$ arestas de M_f incidindo em vértices de $\Gamma(X)$, aí contidas todas as arestas que partem de X . Por isso, $\sum_{x \in X} f(x) \leq \sum_{y \in \Gamma(X)} f(y)$ e, assim, a condição (ii) está satisfeita.

(\Leftarrow) No mesmo grafo G , suponha as condições (i) e (ii) satisfeitas. Construa uma rede D a partir de G da seguinte forma:

1. troque cada aresta $xy \in E(G)$, com $x \in A$ e $y \in B$, por um arco (x, y) com capacidade $c(x, y) = f(y)$;
2. adicione dois vértices, s e t ;
3. para cada $x \in A$, insira um arco (s, x) com capacidade $c(s, x) = f(x)$;
4. para cada $y \in B$, insira um arco (y, t) com $c(y, t) = f(y)$;

Agora, suponha que D admita um fluxo inteiro f^* com valor igual a $\sum_{x \in A} f(x)$ (e, de (i), também igual a $\sum_{y \in B} f(y)$). Deste modo, $f^*(s, x) = f(x)$, para todo $x \in A$. Então, pela conservação do fluxo, $f(x) = \sum_{y \in \Gamma^+(x)} f^*(x, y)$. Analogamente, $f(y) = \sum_{x \in \Gamma^-(y)} f^*(x, y)$ para todo $y \in B$. Assim, para construir um f -emparelhamento perfeito M_f de G , basta adicionar à coleção M_f cada aresta $xy \in E(G)$ um número de vezes igual a $f^*(x, y)$, resultando em $w(xy) = f^*(x, y)$. Vamos mostrar que tal fluxo existe em D .

Seja $S \subseteq V(D)$ um conjunto (s, t) -separador. Faça $X := S \cap A$, $Y_1 := B \cap S$ e $Y_2 := B \setminus S$. Vamos calcular um limitante inferior para $cap(S)$ particionando o corte $\nabla^+(S)$ em algumas partes. Os arcos entre s e $A \setminus X$ contribuem com $\sum_{v \in A \setminus X} f(v)$. Para os arcos entre X e $Y_2 \cap \Gamma(X)$, temos pelo menos $\sum_{w \in Y_2 \cap \Gamma(X)} f(w)$, pois cada vértice de $Y_2 \cap \Gamma(X)$ pode ser extremo de mais de um arco. Já os arcos de $Y_1 \cap \Gamma(X)$ para t , contribuem com $\sum_{w \in Y_1 \cap \Gamma(X)} f(w)$ e os arcos de $Y_1 \setminus \Gamma(X)$ para t contribuem com $\sum_{w \in Y_1 \setminus \Gamma(X)} f(w)$. Logo,

$$\begin{aligned}
cap(S) &\geq \sum_{v \in A \setminus X} f(v) + \sum_{w \in Y_2 \cap \Gamma(X)} f(w) + \sum_{w \in Y_1 \cap \Gamma(X)} f(w) + \sum_{w \in Y_1 \setminus \Gamma(X)} f(w) \\
&= \sum_{v \in A \setminus X} f(v) + \sum_{w \in \Gamma(X)} f(w) + \sum_{w \in Y_1 \setminus \Gamma(X)} f(w) \\
&\geq \sum_{v \in A \setminus X} f(v) + \sum_{w \in \Gamma(X)} f(w) \\
&\geq \sum_{v \in A \setminus X} f(v) + \sum_{v \in X} f(v) && \text{(de (ii))} \\
&= \sum_{v \in A} f(v).
\end{aligned}$$

Como S é arbitrário, mostramos que qualquer (s, t) -corte de D , inclusive cortes mínimos, tem capacidade maior ou igual a $\sum_{v \in A} f(v)$. Seja f^* um fluxo máximo de D . Pelo Teorema 3.4, inferimos que $val(f^*) \geq \sum_{v \in A} f(v)$. Ao mesmo tempo, fazendo $S = \{s\}$, temos $cap(S) = \sum_{v \in A} f(v)$. Logo, pelo Lemma 3.1, $val(f^*) \leq \sum_{v \in A} f(v)$. Portanto,

$val(f^*) = \sum_{v \in A} f(v)$. Por fim, o Teorema 3.5 nos garante que D admite um fluxo máximo inteiro, com valor igual a $\sum_{v \in A} f(v)$. \square

As aplicações da Teoria de Fluxos em Redes abordadas nesta seção ilustram a utilidade que a área de Fluxos em Redes pode ter no desenvolvimento de outros tópicos da Teoria de Grafos.

5 Conclusões

Neste projeto, apresentamos um desenvolvimento de conceitos básicos da Teoria de Emparelhamentos e da Teoria de Fluxos em Redes. Este desenvolvimento contém tanto definições de conceitos e demonstrações de resultados fundamentais, quanto descrições de algoritmos para problemas de cada área, a saber: a construção de emparelhamentos máximos em grafos bipartidos e a determinação de fluxos máximos em digrafos arbitrários.

Em seguida, a Teoria de Fluxos em Redes foi aplicada na obtenção de demonstrações de resultados da Teoria de Emparelhamentos. Esta aplicação incluiu a demonstração de resultados relativos aos conceitos de f -fator e f -emparelhamento, que generalizam a ideia de emparelhamento.

Com isto, esperamos que este projeto tenha alcançado seu objetivo de oferecer uma breve resenha dos conceitos fundamentais da Teoria de Fluxos em Redes. Ademais, mostramos exemplos de como esta teoria pode ser aplicada a outras áreas da Teoria de Grafos. Por fim, o estudo de Fluxos em Redes pode servir como preparação para o estudo de tópicos mais avançados em Fluxos Inteiros, uma outra área da Teoria de Grafos. Os resultados da área de Fluxos Inteiros podem também ser relacionados à Teoria de Emparelhamentos, bem como a outras áreas clássicas da Teoria de Grafos, como coloração de vértices e coloração de arestas.

Referências

- [1] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph Theory*, volume 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, London, 1 edition, 2008.
- [2] L. Lovász and M. D. Plummer. *Matching Theory*. AMS Chelsea Publishing, Rhode Island, USA, 2009.
- [3] L. R. Ford and D. R. Fulkerson. *Flows in Networks*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2010.