INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Recursos digitais no ensino de Matemática em nível de Ensino Fundamental e Médio

Autores: Victor Fernando Pompêo Barbosa e Gustavo Rodrigues Basso
Supervisores: Christiane Neme Campos e Matheus Souza

Relatório Técnico - IC-PFG-16-21 - Projeto Final de Graduação

December - 2016 - Dezembro

Sumário

Recursos digitais no ensino de Matemática em nível de Ensino Fundamental e Médio

Victor Fernando Pompêo Barbosa* Gustavo Rodrigues Basso*
Christiane Neme Campos* Matheus Souza†

Resumo

Projetos de educação popular são iniciativas que se propõem a oferecer cursos de formação complementar, gratuitos ou de baixo custo, para a comunidade em que estão inseridos. Por conta de seu caráter não-lucrativo, é comum terem problemas de falta de material didático, dependendo de doações para funcionar. Tendo em vista essa necessidade e o potencial de influência benéfica da tecnologia na educação, este trabalho tem como objetivo a produção de recursos educacionais digitais de apoio às aulas de Matemática do Curso Exato, projeto de extensão comunitária da PREAC (Pró-Reitoria de Extensão e Assuntos Comunitários da Unicamp). O Curso Exato é um projeto de educação popular que busca o desenvolvimento acadêmico de alunos de Ensino Médio da rede pública da região de Campinas. O material desenvolvido deve constituir a base do "Mês da Matemática", um período de aulas dedicado inteiramente ao ensino de Matemática elementar, e é composto de: um conjunto de slides, a serem utilizados nas aulas teóricas; um conjunto de listas de exercícios, a serem utilizadas nas aulas práticas; indicações de ferramentas e recursos digitais que complementam o assunto de cada aula; e orientações para os professores de como utilizá-los.

1 Introdução

Para uma adequada compreensão do objetivo deste trabalho, três tópicos precisam ser delineados: o que são recursos educacionais digitais e por que sua utilização é benéfica ao aprendizado de alunos; o que é o Curso Exato; e o que é o Mês da Matemática, projeto pedagógico do Curso que irá se utilizar do material produzido.

1.1 Ferramentas digitais de aprendizado

O intenso desenvolvimento tecnológico vivenciado pelo mundo desde o fim do último século colocou à disposição da sociedade uma ampla gama de recursos computacionais que, por sua grande versatilidade e utilidade, passaram a permear o cotidiano das pessoas. Em alguns campos, como na Educação, o processo de adaptação a essa nova realidade ainda

*Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.
†Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.

não se concluiu e apresenta várias questões em aberto.

Um recurso digital é, do ponto de vista da Computação, um arquivo digital. Assim, recursos educacionais digitais são arquivos digitais utilizados como ferramenta de apoio a atividades educacionais. Isso pode incluir fotos, vídeos, animações, audiolivros, planilhas, slides, entre muitos outros [4].

Novas tecnologias criam oportunidades de aprendizado que desafiam as práticas tradicionais de colégios e universidades. Considerando o impacto que estas novas ferramentas têm no aprendizado dos alunos, Collins e Halverson [8] denominaram a reviravolta provocada na educação pelas novas tecnologias de *Revolução Educacional*. De fato, em 2010, Anderson [5] concluiu que estudantes, quando assessorados por instrumentos de aprendizado virtual, podem atingir pelo menos o mesmo nível de proficiência atingido no ensino tradicional, mas em um terço do tempo.

1.2 O Curso Exato

O Curso Exato é um projeto de extensão da Pró-Reitoria de Extensão e Assuntos Comunitários (PREAC-Unicamp). Composto por docentes da Unicamp e alunos da instituição, seu objetivo é contribuir para o desenvolvimento acadêmico de alunos da rede pública de ensino da região de Campinas, visando à consolidação e ao aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Médio. Isso é feito por meio de aulas teóricas e práticas de tópicos chave de disciplinas selecionadas do currículo. Atualmente, as disciplinas envolvidas no projeto são Matemática, Física, Química e Língua Portuguesa.

Nesse contexto, objetivo deste Projeto Final de Graduação (PFG) é desenvolver material de apoio às aulas de Matemática do Curso Exato. Este material é composto por um conjunto de *slides*, listas de exercícios de cada uma das aulas e orientações aos professores. Além disso, complementando o material básico, foram planejadas duas aulas interdisciplinares e incluídas sugestões de ferramentas digitais que possam enriquecer o aprendizado dos alunos.

1.3 O Mês da Matemática

O projeto pedagógico do Curso Exato estende-se por dois anos. Iniciado prioritariamente com estudantes do segundo ano do Ensino Médio, tem como objetivo fornecer uma base sólida e complementar à experiência acadêmica vivenciada pelos alunos em seus colégios.

Tradicionalmente, os estudantes que procuram o Curso Exato apresentam deficiências graves no aprendizado das disciplinas relacionadas ao projeto, particularmente em Matemática. Essas deficiências representam um desafio adicional pelo fato de as outras disciplinas de Ciências Exatas, Física e Química, necessitarem de um amplo ferramental matemático para o desenvolvimento de seu conteúdo. Como forma de endereçar esse problema, o primeiro mês de aulas possui uma programação especial. Nesse mês, o conteúdo é inteiramente dedicado ao ensino de Matemática, no chamado *Mês da Matemática*.

O *Mês da Matemática* tem como objetivo trabalhar conceitos de Matemática Elementar, como forma de embasar o trabalho desenvolvido nas áreas de Física, Química e também de Matemática durante os dois anos de curso. Ele é composto por quinze aulas, em que cada aula é dividida em dois blocos de uma hora e meia cada. No primeiro bloco ocorre uma aula expositiva, com a presença de um único professor. O segundo bloco, por sua vez, é dedicado a exercitar os conceitos expostos no primeiro. Para isso, um professor, assessorado por até cinco monitores, coordena uma aula prática com foco na resolução de exercícios. Estes exercícios são apresentados em uma lista e agrupados em três níveis de dificuldade. A cada meia hora, o professor seleciona um exercício de um dos três níveis para explicar na lousa. Em seguida, os alunos, individualmente ou em grupos, resolvem os outros exercícios daquele nível, auxiliados pelos monitores.

As aulas se iniciam com as quatro operações básicas e desenvolvem conteúdos de Matemática de Ensino Fundamental II. Ao fim do mês, espera-se que os alunos adquiram ferramentas suficientes que permitam às três disciplinas iniciar o desenvolvimento de suas teorias. O aproveitamento dos alunos é medido por um exame aplicado ao fim do período.

Neste PFG, temos como objetivo atender a necessidade do Curso Exato de elaboração de um material didático para o Mês da Matemática. Com base na ideia de Anderson [5] de que ferramentas digitais impulsionam o aprendizado escolar, será elaborado um conjunto de slides que deverão servir como base para as aulas do período. Além disso, o material contará com orientações didáticas para os professores do projeto e sugestões de ferramentas de vídeo, infográficos e recursos digitais para serem utilizados de maneira complementar às aulas regulares.

2 Considerações sobre o material desenvolvido

A discussão sobre o desenvolvimento deste PFG envolve essencialmente duas etapas. A primeira versa sobre a ementa do Mês da Matemática e qual o processo que levou à sua definição, enquanto a segunda, por sua vez, trata do planejamento aula a aula, com um detalhamento de qual o objetivo de cada uma. Ademais, além das aulas regulares do Mês da Matemática, foram planejadas outras duas aulas interdisciplinares, a serem ministradas durante o semestre regular. A discussão relativa a cada um destes tópicos será desenvolvida em subseções distintas.

2.1 A ementa do Mês da Matemática

Inicialmente, foi feito um levantamento dos dados necessários para o desenvolvimento deste PFG; esse levantamento consistiu, primariamente, na análise de edições anteriores do Mês da Matemática. Era de interesse a ementa abordada pelas aulas ministradas em anos anteriores, assim como o desempenho dos alunos no exame aplicado ao fim do período. A ementa da última edição do Mês da Matemática, em 2016, consistiu nos tópicos listados a seguir.

1. **Aritmética:** as quatro operações básicas; potenciação; radiciação.
2. **Frações e números decimais:** conceito; operações envolvendo frações e números decimais.
3. **Equações do primeiro grau:** resolução e modelagem de problemas de primeiro grau.
4. **Inequações do primeiro grau:** resolução e modelagem de problemas de primeiro grau.
5. **Sistemas de equações do primeiro grau:** o conceito de par ordenado; equações do primeiro grau com duas incógnitas; resolução e modelagem de problemas de primeiro grau.
6. **Razões e proporções:** o conceito de razão; razão entre grandezas; proporção; grandezas diretamente e inversamente proporcionais; regra de três simples e composta.
7. **Porcentagem:** o conceito de porcentagem; operações com porcentagens; cálculo de aumentos e descontos.
8. **Expressões algébricas:** definição de termo algébrico; polinômios com uma variável; grau de um polinômio; operações; produtos notáveis; fatoração; simplificação de frações algébricas.

No entanto, o exame classificatório aplicado aos alunos ao fim do período acusou um aproveitamento insatisfatório. O domínio dos assuntos básicos se mostrou aquém do desejado, o que se refletiu em dificuldades profundas nas questões algébricas da prova.

Levando em conta esses resultados, fez-se necessário, então, reformular a ementa do Mês da Matemática. A decisão tomada envolveu limitar o escopo do Mês da Matemática, abordando menos temas, mas certificando-se de que os alunos adquirissem maestria dos assuntos tratados. Do universo dos conteúdos elencados, portanto, foi selecionada uma lista menor de tópicos, consistindo nos pré-requisitos mais essenciais para o início do desenvolvimento do trabalho das três disciplinas de Ciências Exatas. Esse subconjunto deveria preencher de modo satisfatório a carga horária do Mês, com um ritmo de aulas que fosse lento o suficiente para permitir que os alunos conseguissem absorver os conteúdos, mas rápido o suficiente para que eles não perdessem o interesse no assunto trabalhado. A escolha dos tópicos deveria, também, apresentar sinergia com o formato das aulas do Curso. A lista atualizada dos tópicos abordados está apresentada a seguir.

1. **Aritmética:** as quatro operações básicas; exponenciação; radiciação.

2. **Frações e números decimais:** conceito; operações envolvendo frações e números decimais.

3. **Expressões algébricas:** definição de termo algébrico; polinômios de uma variável; redução de termos semelhantes.

4. **Equações de primeiro grau:** Resolução e modelagem de problemas de primeiro grau.

O número de aulas do Mês da Matemática e a cadência planejada para os conteúdos deixou de fora da ementa da edição atual tópicos básicos de grande importância, como porcentagem e razões e proporções. Dada a sua importância, o semestre regular de Matemática inicia-se por seu estudo.

2.2 Das aulas e de seus objetivos

Os temas abordados foram divididos em 15 aulas regulares, as quais incluem subtópicos eventualmente necessários para a compreensão plena do tópico em questão. A preparação do material partiu do estudo e análise de materiais didáticos consagrados de Matemática de Ensino Fundamental e Médio, como as coleções *Matemática e Realidade* [10] e *Fundamentos de Matemática Elementar* [9]. À literatura especializada, aliaram-se materiais digitais dedicados ao assunto, como os sites *Math is Fun* [2], *Purple Math* [3] e *Khan Academy* [1].

Convém ressaltar que os autores deste PFG trabalharam, voluntariamente, como professores e coordenadores de Matemática no Curso Exato durante vários anos. Por isso, acompanharam de perto os diversos projetos pedagógicos do Curso e possuem conhecimento sobre o perfil dos alunos e suas necessidades. Esta experiência mostrou-se um recurso importante para a elaboração deste PFG.

Como dito anteriormente, o material desenvolvido consiste em um conjunto de slides, a serem utilizados pelos professores na exposição da teoria e encontrado no Apêndice A; listas de exercícios, a serem utilizadas em aulas práticas, para fixação dos conceitos, e presentes no Apêndice B.1; e orientações para os professores responsáveis pelas aulas, encontradas no Apêndice C.

A descrição do objetivo de cada aula foi feita utilizando a Taxonomia de Bloom [7], em sua versão revisada [6]. A estrutura inicial elaborada por Bloom divide o processo de aprendizagem em seis grandes níveis: conhecimento, compreensão, aplicação, análise, síntese e avaliação. Na revisão, as categorias foram alteradas de substantivos para verbos e redefinidas, como mostra a enumeração a seguir.

1. **Lembrar:** recuperar, reconhecer e identificar informações relevantes a partir da memória.

2. **Entender:** construir conhecimento a partir de mensagens orais, escritas ou gráficas, interpretando, exemplificando, classificando, sumarizando, inferindo, comparando e explicando.

3. **Aplicar:** implementar, executar ou utilizar um processo ou método abstrato em situação prática.

4. **Analisar:** separar material em suas partes constituintes, determinando como as partes se relacionam umas com as outras e com uma estrutura geral, diferenciando e organizando.

5. **Avaliar:** julgar o valor de materiais e métodos, considerando critérios ou objetivos específicos.

6. **Criar:** juntar elementos para formar um todo coeso e funcional, reorganizar elementos em novos padrões ou estruturas, gerando, planejando e produzindo.

Além disso, a versão revisada da taxonomia trata o processo de aprendizagem como algo bidimensional. Uma das dimensões, a *dimensão do conhecimento*, identifica o tipo de conhecimento a ser adquirido, enquanto a segunda, chamada de *dimensão do processo cognitivo*, identifica o processo utilizado na aprendizagem. A interseção das categorias gera as situações detalhadas na Tabela 2.2.

A dimensão do conhecimento	A dimensão do processo cognitivo					
	Lembrar	**Entender**	**Aplicar**	**Analisar**	**Avaliar**	**Criar**
Conhecimento factual	Recordar	Sumarizar	Classificar	Ordenar	Validar	Combinar
Conhecimento conceitual	Definir	Interpretar	Ilustrar	Explicar	Aferir	Modelar
Conhecimento procedural	Listar	Prever	Calcular	Comparar	Concluir	Compor
Conhecimento meta-cognitivo	Identificar	Executar	Construir	Investigar	Justificar	Formular

Tabela 1: Interseções possíveis entre categorias dos domínios de conhecimento e de processo cognitivo, segundo a Taxonomia Revisada de Bloom.

A utilização da Taxonomia de Bloom permite o estabelecimento de objetivos precisos para cada aula. A estrutura hierárquica do modelo direciona o encadeamento do conteúdo de forma lógica, exigindo a aquisição de habilidades sequencialmente, da mais simples para a mais complexa. Além disso, a organização dos objetivos ajuda os professores a planejar a aula adequadamente, projetando estratégias válidas de ensino e avaliação, e certificando-se de que a exposição e a prática estejam alinhadas com os objetivos propostos.

A descrição geral do conteúdo de cada aula e de seus objetivos pode ser encontrada na Tabela 2.2.

Aulas	Conteúdo	Objetivos
1-2	- Critérios de Divisibilidade - Números primos - MMC - MDC	O aluno deve ser capaz de: - **Definir** e **explicar** os conceitos de divisibilidade, números primos, MMC e MDC. - **Investigar** se um número é divisível por outro. - **Calcular** o MMC e o MDC de dois ou mais números dados. - **Aplicar** os conceitos para resolver problemas cotidianos, **formulando-os** em linguagem matemática.
3-5	- O conceito de fração - Frações equivalentes - Comparação de frações - Operações com frações	O aluno deve ser capaz de: - **Definir** frações. **Explicar** o que uma dada fração representa. **Ilustrar** como quantidades utilizadas no dia-a-dia podem ser expressas por meio de frações. - **Definir** o conceito de frações equivalentes. **Explicar** o que a equivalência representa. - **Comparar** frações de denominadores iguais. **Comparar** frações de denominadores diferentes. - **Definir** e **explicar** operações com frações. - **Aplicar** o resultado das operações para resolver problemas cotidianos, formulando-os em linguagem matemática.
6-7	- Números decimais - Frações decimais - Comparação entre decimais - Operações com decimais	O aluno deve ser capaz de: - **Descrever** a notação decimal e **ilustrá-la** com situações cotidianas. - **Definir** números decimais como frações decimais. - **Comparar** e **ordenar** números decimais. - **Calcular** operações aritméticas com números decimais.
8	- Revisão/exercícios de frações - Revisão/exercícios de números decimais	**Validar** os conceitos relativos a frações, números decimais e suas operações.
9	- Conjuntos numéricos - A reta numérica - Operações com números negativos	O aluno deve ser capaz de: - **Definir** e **explicar** as características dos elementos de cada um dos conjuntos numéricos trabalhados. - **Definir** e **explicar** a reta numérica. - **Definir**, **explicar** e **interpretar** números negativos. - **Aplicar** e **analisar** os conceitos apresentados a situações do mundo real.
10-11	- Potenciação - Radiciação	O aluno deve ser capaz de: - **Definir** e **explicar** as operações de potenciação e de radiciação com números reais. - **Interpretar** raízes não exatas: aproximações. - **Recordar** que raízes de números negativos não existem no conjunto dos números reais. **Justificar** esse fato. - **Aplicar** e **analisar** os conceitos apresentados a problemas do dia-a-dia.
12-13	- Expressões algébricas - Valor numérico de uma expressão algébrica - Redução de termos semelhantes - Operações com expressões algébricas	O aluno deve ser capaz de: - **Definir** e **explicar** os conceitos de variável de expressão algébrica. - **Identificar** as variáveis de uma expressão algébrica dada e **computar** o valor numérico desta expressão para um conjunto particular de valores das variáveis. - **Definir**, **explicar** e **identificar** termos semelhantes em expressões algébricas. - **Computar** a forma reduzida de uma expressão.
14-15	- Equações de primeiro grau - Modelagem de problemas	O aluno deve ser capaz de: - **Definir** e **explicar** o que é uma equação polinomial de primeiro grau. - **Definir** o que é uma solução da equação. - **Investigar** se um dado valor é uma solução de uma equação de primeiro grau. - **Interpretar**, de forma mais profunda, o significado da relação de igualdade expressa por uma equação e, com isso, **buscar** uma solução aplicando operações a ambos os membros da igualdade. - **Sumarizar/Formular/Modelar** problemas do cotidiano como equações do primeiro grau.

Tabela 2: Enumeração das aulas produzidas, com descrição do conteúdo abordado e objetivos segundo a taxonomia de Bloom.

2.3 Aulas interdisciplinares

Além da produção de material didático para o Mês da Matemática, o projeto envolveu a preparação de duas aulas extras, interdisciplinares, que serão integradas ao calendário do curso como aulas especiais, em dias a serem determinados.

O objetivo dessas aulas é relacionar a Matemática com outras disciplinas e/ou visualizar suas aplicações em situações concretas cotidianas. Com isso, espera-se desmistificar a Matemática e aumentar o interesse dos alunos pelo aprendizado da matéria.

Uma das aulas explora a relação da Matemática com a Música e está presente no Apêndice D. A outra, por sua vez, envolve a discussão de *Flatland: the Movie*[1], uma animação adaptada do livro homônimo de Edwin Abott, e e aborda a Matemática em conjunto com a Sociologia. Esta segunda aula pode ser encontrada no Apêndice E.

2.3.1 Matemática e a Música

O objetivo da aula é analisar a estrutura de escalas musicais como as conhecemos hoje, a partir de uma série de conceitos e operações matemáticas, como multiplicação e divisão de frações, razões, potenciação e números irracionais. Esta aula está organizada em três blocos, de forma incremental; cada parte depende de conceitos explorados no bloco anterior para a sua construção.

No primeiro bloco, são introduzidos conceitos elementares de Teoria Musical, como nomenclatura das notas e relações de intervalos musicais. Também é explorada, com um leve aprofundamento, a escala maior de Dó. No segundo bloco, é apresentado o conceito de som consonante e dissonante. Além disso, é apresentada a construção da *Escala Pitagórica*, o primeiro modelo de escala maior[2], por meio de elementos da Matemática como multiplicações de frações e razões.

A aula se encerra com o terceiro bloco, no qual o conceito de som como fenômeno físico é introduzido. Esta nova conceituação do som é essencial para analisá-lo como uma onda e, portanto, uma função periódica que pode ser caracterizada por sua frequência. Além disso, com esse novo ponto de vista, problemas presentes no modelo elaborado no segundo bloco são apresentados e discutidos. Soluções para tais problemas, baseadas na operação de potenciação e nos números irracionais, são apresentadas para finalizar este bloco e concluir a aula.

2.3.2 Flatland

O filme *Flatland* é uma animação baseada no livro homônimo de Edwin Abott, publicado no século XIX. A história baseia-se numa sociedade inserida em um mundo bidimen-

[1] `http://www.imdb.com/title/tt0814106/`

[2] *Escalas maiores* são todas as escalas que possuem como lei de formação: tom, tom, semitom, tom, tom, tom, semitom. O exemplo mais famoso de escala maior é a escala maior de Dó: Dó-Ré-Mi-Fá-Sol-Lá-Si-Dó.

sional, em que os indivíduos são figuras geométricas. A personagem principal, Hex, é uma criança-hexágono que começa a ponderar sobre a existência de uma terceira dimensão, algo considerado herético na sociedade rigidamente estratificada de Flatland. A sociedade é regida pelos círculos, que constituem o governo e usam os mecanismos clássicos de dominação para manter sua hegemonia sobre os outros habitantes de Flatland.

Por meio de conceitos matemáticos, que representam vários aspectos da sociedade em Flatland, o filme dá abertura para uma discussão sociológica abrangente. Ele traz à tona diversos temas importantes, como os aparelhos de hegemonia (questões como governo/Estado e igreja/religião surgem naturalmente na animação). Esta riqueza de conteúdo permitiu a elaboração de uma aula multidisciplinar que aborda Matemática em conjunto com a Sociologia.

O material referente à aula inclui orientações para os professores responsáveis por ministrá-la, detalhando o cronograma das atividades, bem como um questionário, a ser trabalhado com os alunos durante a aula. O questionário aborda questões cujo objetivo é ampliar a percepção dos alunos sobre pontos importantes do enredo, ao mesmo tempo em que instiga uma reflexão acerca da nossa sociedade.

Dada sua natureza interdisciplinar, o ideal é que esta aula seja ministrada por dois professores, um da área de Matemática e um da área de Sociologia. O material desenvolvido contou com a colaboração, indispensável, do Prof. Sávio Cavalcante, do IFCH-Unicamp, iniciando uma parceria inédita no projeto. O Prof. Sávio demonstrou um grande interesse pelo projeto e por ministrar esta aula para os educandos do projeto. A primeira instância desta aula deve ocorrer no primeiro semestre de 2017.

3 Considerações finais

A execução de uma tarefa como a proposta constitui um desafio incomum, considerando-se seus vários aspectos. O conteúdo das aulas, que envolve majoritariamente assuntos normalmente ensinados na segunda etapa do Ensino Fundamental, é direcionado, nesse contexto, a um público diferente do usual. O público alvo, alunos concluintes de Ensino Médio de escola pública, que de modo geral possuem grandes dificuldades em Matemática, exigiu uma adaptação na abordagem do tema em relação à literatura tradicional, voltada para alunos mais jovens.

Dessa maneira, o material produzido apresenta um ritmo e uma linguagem particulares, adaptados ao contexto do Curso Exato. A medida precisa em que este ritmo e esta linguagem diferem de outros materiais é resultado de anos de experimentação e de melhorias direcionadas pelo desempenho de iniciativas anteriores. De maneira alguma, no entanto, este material deve ser encarado como um empreendimento completo. Essa produção constitui apenas uma iteração no processo de busca por um modelo educacional que melhor complemente o sistema público de ensino.

Ainda assim, a produção desse material tem objetivos claros. O ensino em iniciativas voluntárias como o Curso Exato enfrenta dificuldades conjunturais relativas à natureza do projeto. Entre essas dificuldades, pode-se citar uma taxa alta de evasão, falta de perspectivas acadêmicas futuras e frequente aversão às disciplinas estudadas. Espera-se que o material, por ter sido produzido tendo em mente o público e o contexto do Curso, seja mais eficiente no combate a algumas dessas dificuldades. Especificamente, espera-se que a aquisição de uma base sólida em Matemática Elementar funcione, para os alunos, como um catalisador para a absorção bem sucedida de tópicos mais avançados.

Ademais, é importante salientar que o material foi produzido tanto para os alunos como para os professores. Sendo uma iniciativa voluntária, o Curso Exato aceita como membros de seu corpo docente graduandos de uma vasta gama de perfis distintos. De um modo geral, são voluntários ansiosos pela oportunidade de doar seu conhecimento para uma causa social, mas com muito pouca experiência. É comum que voluntários cheguem ao Curso, pretendendo ocupar uma vaga de professor, sem nunca antes terem ministrado aulas.

Dessa maneira, é fundamental que tenham em mãos um material que também considere a inexperiência de seus utilizadores, que muitas vezes não têm sequer formação relativa à área de Educação. As orientações aos professores levam em conta essa particularidade e direcionam a atenção dos educadores aos conceitos mais importantes de cada aula, fornecendo indicações de materiais adicionais que também podem ser utilizados para enriquecer a exposição.

Por fim, as aulas extracurriculares pretendem motivar os alunos sobre aplicações práticas dos conhecimentos desenvolvidos em sala de aula. Relacionar o ensino de Matemática com situações cotidianas pode aumentar o interesse dos alunos pela disciplina e constitui um dos seis princípios chave para o ensino efetivo de Matemática, como descrito por Sullivan [12].

Referências

[1] Khan academy. `http://khanacademy.org/`, 2016.

[2] Math is fun. `http://www.mathisfun.com/`, 2016.

[3] Purple math. `http://www.purplemath.com/`, 2016.

[4] Recursos educacionais digitais. `http://www.utfpr.edu.br/estrutura-universitaria/pro-reitorias/prograd/cotedu/recursos-educacionais-digitais/apresentacao`, January 2017.

[5] John R. Anderson, Albert T. Corbett, Kenneth R. Koedinger, and Ray Pelletier. Cognitive tutors: Lessons learned. *The Journal of the Learning Sciences*, 4(2):167–207, 1995.

[6] L.W. Anderson, D.R. Krathwohl, and B.S. Bloom. *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives.* Longman, 2001.

[7] B.S. Bloom, M.D. Engelhart, E.J. Furst, W.H. Hill, and D.R. Krathwohl. *Taxonomy of Educational Objectives: The Classification of Educational Goals. Cognitive domain. Handbook 1.* David McKay Company, 1960.

[8] A. Collins and R. Halverson. The second educational revolution: rethinking education in the age of technology. *Journal of Computer Assisted Learning*, 26(1):18–27, 2010.

[9] Gelson Iezzi et al. *Fundamentos de Matemática Elementar*. Editora Atual, 2013.

[10] Gelson Iezzi et al. *Matemática e Realidade*. Editora Atual, 2013.

[11] Elon Lages Lima. *Matemática e Ensino*. Editora SBM, 2007.

[12] Peter Sullivan. Teaching mathematics: Using research-informed strategies. *Australian Education Review*, 59:26, 2011.

Apêndices

A Aulas do Mês da Matemática

Mês da Matemática
Aula 1: Divisibilidade, fatores e múltiplos

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso

Curso Exato

Divisibilidade

Definição

Definição

Um número inteiro é dito divisível por outro se o resto da divisão entre os dois é zero.

Quando um número a é divisível por um número b, dizemos que a é múltiplo de b.

Exemplos:

- 15 é divisível por 3 e múltiplo de 3.
- 18 não é múltiplo de 4 nem divisível por 4.

Em algumas situações, é útil ser capaz de dizer se a divisão é exata *antes* de ela ser calculada.

Motivação

(ESPM-modificada) Um colégio de Ensino Médio tem alunos de 1^a, 2^a e 3^a séries. Na 2^a série, há 200 alunos; na 3^a, 160 alunos e há 600 alunos no colégio. Sobre o número de alunos da 1^a série, pode-se afirmar que:

a) é múltiplo de 15 e de 8
b) é múltiplo de 15 e não de 8
c) não é múltiplo de 15, nem de 8
d) não é múltiplo de 15 mas é múltiplo de 8
e) é múltiplo de 18

Regras de divisibilidade

Divisibilidade por 2

Regra

Um número será divisível por 2 quando o seu último algarismo for 0, 2, 4, 6 ou 8.
Ou seja: um número é divisível por 2 se for um **número par**.

Exemplos:

- 2310 é divisível por 2.
- 214 594 é divisível por 2.
- 5 819 459 não é divisível por 2.
- 12 428 924 895 não é divisível por 2.

Exercício

Descobrir se cada um dos números a seguir é divisível por 2.

- 235 $\Rightarrow$ Não!
- 347 948 $\Rightarrow$ Sim!
- 3 129 594 $\Rightarrow$ Sim!
- 58 419 489 $\Rightarrow$ Não!
- 142 425 123 $\Rightarrow$ Não!
- 491 148 582 $\Rightarrow$ Sim!
- 19 539 862 111 $\Rightarrow$ Não!

Divisibilidade por 3

Regra

Um número é divisível por 3 quando a soma de seus algarismos é um número divisível por 3.

Exemplos:

- 576 é divisível por 3: $5+7+6=12$.
- 2 310 é divisível por 3: $2+3+1+0=6$.
- 3 457 não é divisível por 3: $3+4+5+7=19$.

O processo pode ser repetido!

- 412 731 823 016 não é divisível por 3:
  $4+1+2+7+3+1+8+2+3+0+1+6=38 \Rightarrow 3+8=11$

Exercício

Descobrir se cada um dos números a seguir é divisível por 3.

- 235 $\Rightarrow 2+3+5=10 \Rightarrow$ Não!
- 347 948 $\Rightarrow 3+4+7+9+4+8=35 \Rightarrow 3+5=8 \Rightarrow$ Não!
- 3 129 594 $\Rightarrow 3+1+2+9+5+9+4=33 \Rightarrow 3+3=6 \Rightarrow$ Sim!
- 58 419 489
  $\Rightarrow 5+8+4+1+9+4+8+9=48 \Rightarrow 4+8=12 \Rightarrow$ Sim!
- 142 425 123
  $\Rightarrow 1+4+2+4+2+5+1+2+3=24 \Rightarrow 2+4=6 \Rightarrow$ Sim!
- 491 148 582
  $\Rightarrow 4+9+1+1+4+8+5+8+2=42 \Rightarrow 4+2=6 \Rightarrow$ Sim!

Divisibilidade por 4

Regra

Um número é divisível por 4 quando os seus dois últimos algarismos formam um número divisível por 4.

Exemplos:

- 2 305 920 é divisível por 4.
- 12 420 503 888 é divisível por 4.
- 34 514 710 não é divisível por 4.
- 193 412 045 581 302 não é divisível por 4.

Exercício

Descobrir se cada um dos números a seguir é divisível por 4.

- 235 $\Rightarrow$ Não!
- 347 948 $\Rightarrow$ Sim!
- 3 129 594 $\Rightarrow$ Não!
- 58 419 488 $\Rightarrow$ Sim!
- 142 425 123 $\Rightarrow$ Não!
- 491 148 582 $\Rightarrow$ Não!

Divisibilidade por 5

Regra

Um número é divisível por 5 quando o seu último dígito é 0 ou 5.

Exemplos:

- 2 305 920 é divisível por 5.
- 319 259 124 531 595 é divisível por 5.
- 34 514 711 não é divisível por 5.
- 21 494 591 596 123 não é divisível por 5.

Exercício

Descobrir se cada um dos números a seguir é divisível por 5.

- 255 $\Rightarrow$ Sim!
- 951 638 $\Rightarrow$ Não!
- 6 528 720 $\Rightarrow$ Sim!
- 68 158 134 $\Rightarrow$ Não!
- 142 711 535 $\Rightarrow$ Sim!
- 527 815 312 $\Rightarrow$ Não!

Divisibilidade por 6

Regra

Um número é divisível por 6 quando é divisível, ao mesmo tempo, por 2 e por 3.

Ou seja: para um número ser múltiplo de 6, seu último dígito deve ser par e a soma de seus algarismos deve ser múltiplo de 3.

Exemplos:

- $2\,305\,920 \begin{cases} \text{é divisível por 2} \\ \text{é divisível por 3} \end{cases} \Rightarrow \text{é divisível por 6}$
- $3\,156\,022 \begin{cases} \text{é divisível por 2} \\ \text{não é divisível por 3} \end{cases} \Rightarrow \text{não é divisível por 6}$
- $69\,150\,927 \begin{cases} \text{não é divisível por 2} \\ \text{é divisível por 3} \end{cases} \Rightarrow \text{não é divisível por 6}$
- $34\,514\,711 \begin{cases} \text{não é divisível por 2} \\ \text{não é divisível por 3} \end{cases} \Rightarrow \text{não é divisível por 6}$

Exercício

Descobrir se cada um dos números a seguir é divisível por 6.

- $254 \begin{cases} \text{é divisível por 2} \\ \text{não é divisível por 3} \end{cases} \Rightarrow \text{não é divisível por 6}$
- $951\,636 \begin{cases} \text{é divisível por 2} \\ \text{é divisível por 3} \end{cases} \Rightarrow \text{é divisível por 6}$
- $6\,528\,723 \begin{cases} \text{não é divisível por 2} \\ \text{é divisível por 3} \end{cases} \Rightarrow \text{não é divisível por 6}$
- $68\,158\,134 \begin{cases} \text{é divisível por 2} \\ \text{é divisível por 3} \end{cases} \Rightarrow \text{é divisível por 6}$

Divisibilidade por 8

Regra

Um número é divisível por 8 quando os seus três últimos algarismos formam um número divisível por 8.

Exemplos:

- 23 059 120 é divisível por 8.
- 210 139 581 413 728 é divisível por 8.
- 345 147 105 não é divisível por 8.
- 21 951 852 592 034 604 não é divisível por 8.

Exercício

Descobrir se cada um dos números a seguir é divisível por 8.

- 1 255 $\Rightarrow$ Não!
- 951 638 $\Rightarrow$ Não!
- 6 528 720 $\Rightarrow$ Sim!
- 68 158 134 $\Rightarrow$ Não!
- 142 711 535 $\Rightarrow$ Não!
- 527 815 312 $\Rightarrow$ Sim!

Divisibilidade por 9

Regra

Um número é divisível por 9 quando a soma de seus algarismos é um número divisível por 9.

Exemplos:

- 231 093 é divisível por 9: $2+3+1+0+9+3=18$.
- 295 461 780 627 654 é divisível por 9: $2+9+5+4+6+1+7+8+0+6+2+7+6+5+4=72$.
- 3 457 não é divisível por 9: $3+4+5+7=19$.
- 4 591 583 059 483 não é divisível por 9: $4+5+9+1+5+8+3+0+5+9+4+8+3=64$.

Assim como no caso de divisibilidade por 3, o processo também pode ser repetido.

Exemplos:

- 999 999 999 001 não é divisível por 9: $9+9+9+9+9+9+9+9+9+0+0+1=109 \Rightarrow 1+0+9=10$.
- 999 999 999 999 999 é divisível por 9: $9+9+9+9+9+9+9+9+9+9+9+9+9+9+9=135 \Rightarrow 1+3+5=9$.

Exercício

Descobrir se cada um dos números a seguir é divisível por 9.

- 235 $\Rightarrow 2+3+5=10 \Rightarrow$ Não!
- 347 948 $\Rightarrow 3+4+7+9+4+8=35 \Rightarrow 3+5=8 \Rightarrow$ Não!
- 3 429 594 $\Rightarrow 3+4+2+9+5+9+4=36 \Rightarrow$ Sim!
- 58 419 489 $\Rightarrow 5+8+4+1+9+4+8+9=48 \Rightarrow 4+8=12 \Rightarrow$ Não!
- 142 455 123 $\Rightarrow 1+4+2+4+5+5+1+2+3=27 \Rightarrow$ Sim!
- 491 148 585 $\Rightarrow 4+9+1+1+4+8+5+8+5=45 \Rightarrow$ Sim!

Divisibilidade por 10

Regra

Um número é divisível por 10 quando o seu último dígito é 0.

Exemplos:

- 2 305 920 é divisível por 10.
- 248 139 412 485 210 é divisível por 10.
- 34 514 711 não é divisível por 10.
- 192 582 519 582 484 não é divisível por 10.

Exercício

Descobrir se cada um dos números a seguir é divisível por 10.

- 255 ⇒ Não!
- 951 638 ⇒ Não!
- 6 528 720 ⇒ Sim!
- 68 158 134 ⇒ Não!
- 142 711 530 ⇒ Sim!
- 527 815 312 ⇒ Não!

Agora podemos voltar ao problema anterior:

Motivação

(ESPM-modificada) Um colégio de Ensino Médio tem alunos de 1^a, 2^a e 3^a séries. Na 2^a série, há 200 alunos; na 3^a, 160 alunos e há 600 alunos no colégio. Sobre o número de alunos da 1^a série, pode-se afirmar que:

a) é múltiplo de 15 e de 8
b) é múltiplo de 15 e não de 8
c) não é múltiplo de 15, nem de 8
d) não é múltiplo de 15 mas é múltiplo de 8
e) é múltiplo de 18

- Há $200 + 160 = 360$ alunos entre a 2^a e 3^a séries.
- Como há 600 alunos no colégio, há $600 - 360 = 240$ alunos na 1^a série.
- Uma divisão simples nos mostra que 240 é divisível por 8;
- Como $15 = 3 \times 5$, um número é divisível por 15 quando for, simultaneamente, divisível por 3 e 5.
- Somando $2 + 4 + 0$, obtemos 6, o que mostra que 240 é divisível por 3. Além disso, seu último dígito é 0, o que mostra que 240 é divisível por 5. Portanto, 240 é divisível por 15.

Motivação

(ESPM-modificada) Um colégio de Ensino Médio tem alunos de 1^a, 2^a e 3^a séries. Na 2^a série, há 200 alunos; na 3^a, 160 alunos e há 600 alunos no colégio. Sobre o número de alunos da 1^a série, pode-se afirmar que:

a) é múltiplo de 15 e de 8
b) é múltiplo de 15 e não de 8
c) não é múltiplo de 15, nem de 8
d) não é múltiplo de 15 mas é múltiplo de 8
e) é múltiplo de 18

Portanto, a resposta certa é **A**.

Fatores

Definição

Quando um número a é divisível por um número b, dizemos que b é um fator de a.

Exemplos:

- Como 18 é divisível por 9, 9 é um fator de 18.
- Como 18 não é divisível por 7, 7 não é um fator de 18.

Saber de fatores pode ajudar muito em cálculos grandes!

Quando um número é divisível por outro... ele também é divisível por todos os fatores desse número!

Exemplos:

- Se um número é divisível por 6, ele também é divisível por 2 e por 3.
- Se um número é divisível por 18, ele também é divisível por 2, 3, 6 e 9.
- Se um número é divisível por 35, ele também é divisível por 5 e 7.
- Se um número é divisível por 100, ele também é divisível por 2, 4, 5, 10, 20, 25 e 50.

Números primos

Definição

Definição

Um número natural é um número primo se ele tiver exatamente dois divisores: o número 1 e ele mesmo.

Além disso, um número é dito composto quando ele possui mais de dois divisores.

Exemplos:

- 2 é um número primo, pois possui apenas 2 divisores: 1 e 2.
- 5 é um número primo, pois possui apenas 2 divisores: 1 e 5.
- 6 é um número composto, pois possui mais de 2 divisores: 1, 2, 3 e 6.
- 1 possui um único divisor: 1. Por isso, não é nem primo nem composto.

Problema

Como *listar* todos os números primos?

É impossível listar todos os números primos, porque eles são infinitos!

Existe, no entanto, um método para encontrarmos consistentemente novos números primos.

O crivo de Eratóstenes

Na tabela a seguir, estão representados os números naturais de 2 a 50:

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Começando pelo primeiro número da tabela, apague todos os seus outros múltiplos.

O primeiro número da tabela é 2; então apagamos todos os outros números pares.

	2	3		5		7		9	
11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	

Repita o procedimento para cada um dos próximos números da tabela.

O próximo número da tabela é 3; então apagamos todos os múltiplos de 3, que não ele mesmo.

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23		25				29	
31				35		37			
41		43				47		49	

Quando o procedimento tiver sido repetido para todos os números da tabela, todos os que restarem são números primos.

	2	3		5		7			
11		13				17		19	
		23						29	
31						37			
41		43				47			

Problema

Como *reconhecer* um número primo?

Ou seja: dado um número, como saber se ele é primo ou composto?

Para saber se um número é primo, devemos dividi-lo sucessivamente pelos primos conhecidos (por 2, por 3, por 5...).

1. Se algum resto for 0, o número não é primo.
2. Se nenhum resto é zero, o número é primo.

Como saber até que número devemos testar?

Exemplo

O número 127 é primo?

- $127 \div 2 : Q = 63, R = 1$
- $127 \div 3 : Q = 25, R = 1$
- $127 \div 5 : Q = 18, R = 2$
- $127 \div 7 : Q = 18, R = 1$
- $127 \div 11 : Q = 11, R = 6$

Basta testar até que o quociente seja menor ou igual ao divisor!

Como na última divisão o quociente ficou igual ao divisor, sem que nenhuma das divisões tenha encontrado resto 0, o número 127 é primo.

Exemplo

O número 143 é primo?

- $143 \div 2 : Q = 71, R = 1$
- $143 \div 3 : Q = 47, R = 2$
- $143 \div 5 : Q = 28, R = 3$
- $143 \div 7 : Q = 20, R = 3$
- $143 \div 11 : Q = 13, R = 0$

Como encontramos um resto igual a 0, sabemos que 143 não é primo.

Exercício

Descobrir quais dos números a seguir são primos.

- 97
- 133
- 211
- 371

Exercício

Descobrir quais dos números a seguir são primos.

- 97 $\Rightarrow$ Primo
- 133 $\Rightarrow$ Composto
- 211 $\Rightarrow$ Primo
- 371 $\Rightarrow$ Composto

Decomposição em fatores primos

Todo número natural pode ser escrito como um **produto de fatores primos.**

É como se os números primos fossem os bloquinhos que formam todos os outros números!

Chamamos de *decomposição em fatores primos* o processo de escrever um número como um produto de fatores primos.

Exemplos:

- $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$
- $20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$
- $350 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7$
- $235\,068 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 1\,031 = 2^2 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 1\,031$
- $218\,702\,160 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 73 \cdot 73 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 73^2$
- $22\,128\,471\,984 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1\,567 \cdot 294\,199 = 2^4 \cdot 3 \cdot 1\,567 \cdot 294\,199$
- 2
- 5

Para decompor um número em fatores primos, tentamos dividi-lo por cada um dos números primos.

- Se a divisão for possível, anotamos o divisor como sendo um dos fatores primos e repetimos o processo para o quociente.
- Se a divisão não for possível, tentamos o próximo primo.
- Continuamos o processo até que o quociente seja igual a 1.

Como exemplo, tentaremos fatorar o número 45.

- Começamos tentando dividir 45 por 2, o que não é possível.
- O próximo primo é 3. Como $4 + 5 = 9$, é possível dividi-lo por 3: o quociente é 15. Anotamos 3 e repetimos o processo tentando fatorar o número 15.

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & \end{array}$$

- 15 pode ser dividido por 3, resultando num quociente igual a 5.

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & \end{array}$$

- Como 5 é um número primo, não podemos dividi-lo por nada além de si mesmo:

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

- O produto dos números da direita é a fatoração desejada.

Portanto, podemos escrever $45 = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 3^2 \cdot 5$ e essa é a decomposição em fatores primos de 45.

Tentaremos agora fatorar o número 84.

- Começamos dividindo 84 por 2. Anotamos 2 à direita da barra, escrevemos o quociente e repetimos o processo tentando fatorar 42.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & \end{array}$$

- 42 ainda pode ser dividido por 2, resultando num quociente igual a 21.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & \end{array}$$

- 21 não pode mais ser dividido por 2; o próximo primo a ser tentado é 3.

- 21 pode ser dividido por 3, resultando num quociente igual a 7.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & \end{array}$$

- Como 7 é um número primo, não podemos dividi-lo por nada além de si mesmo:

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

Portanto, podemos escrever $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ e essa é a decomposição em fatores primos de 84.

Exercício

Decompor em fatores primos os seguintes números:

a) $72 = 2^3 \cdot 3^2$

b) $96 = 2^5 \cdot 3$

c) $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

d) $234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$

e) $630 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

f) $1820 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$

Mês da Matemática
Aula 2: Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso

Curso Exato

Mínimo Múltiplo Comum

Definição

Múltiplos de um número natural são todos os números obtidos ao multiplicar esse número por cada um dos outros números naturais.

Exemplos:

- Múltiplos de 2: $0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots$
- Múltiplos de 3: $0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots$
- Múltiplos de 10: $0, 10, 20, 30, 40, \ldots$

Há números que sejam múltiplos, simultaneamente, de 2 e de 3?

Sim! Esses números são chamados de múltiplos comuns de 2 e de 3.

Em alguns casos, é útil saber identificar qual é o mínimo múltiplo comum (MMC) entre dois (ou mais) números.

Motivação

(PUCCAMP) De uma estação rodoviária, partem ônibus para São Paulo a cada 30 minutos, para Araraquara a cada 6 horas e para Ribeirão Preto a cada 8 horas. No dia 05/12, às 7h, partiram ônibus para as três cidades. Essa coincidência deverá ter ocorrido uma outra vez às:

a) 19h do dia 05/12
b) 23h do dia 05/12
c) 12h do dia 06/12
d) 15h do dia 06/12
e) 7h do dia 06/12

Decomposição simultânea

Podemos descrever um método para encontrar o MMC entre dois ou mais números. Como exemplo, vamos encontrar o MMC de 20, 25 e 36.

1. Montamos o esquema usual de fatoração.

$$\begin{array}{ccc|} 20, & 25, & 36 \end{array}$$

2. Ao encontrar um primo que divida algum dos números, devemos colocá-lo do lado direito do traço. Ele não precisa ser fator comum!

$$\begin{array}{ccc|c} 20, & 25, & 36 & 2 \end{array}$$

3. Embaixo de cada número que seja divisível por esse fator primo, colocamos o quociente da divisão.

$$\begin{array}{ccc|c} 20, & 25, & 36 & 2 \\ 10, & , & 18 & \end{array}$$

4. Os números que não são divisíveis são copiados na linha de baixo.

$$\begin{array}{ccc|c} 20, & 25, & 36 & 2 \\ 10, & 25, & 18 & \end{array}$$

5. Continuamos a divisão até que nenhum dos três números seja divisível por 2.

$$\begin{array}{rrr|l} 20, & 25, & 36 & 2 \\ 10, & 25, & 18 & 2 \\ 5, & 25, & 9 & \end{array}$$

6. Procuramos, então, um próximo primo que divida algum dos três números. Como 9 é múltiplo de 3, podemos usar o número 3.

$$\begin{array}{rrr|l} 20, & 25, & 36 & 2 \\ 10, & 25, & 18 & 2 \\ 5, & 25, & 9 & 3 \\ 5, & 25, & 3 & \end{array}$$

7. Continuamos o processo até chegar no quociente 1 para todos os números:

$$\begin{array}{rrr|l} 20, & 25, & 36 & 2 \\ 10, & 25, & 18 & 2 \\ 5, & 25, & 9 & 3 \\ 5, & 25, & 3 & 3 \\ 5, & 25, & 1 & 5 \\ 1, & 5, & 1 & 5 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

8. O produto dos números da direita é o MMC dos números da esquerda.

Ou seja: $MMC(20,\ 25,\ 36) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900$.

Encontraremos agora o MMC entre 18, 24 e 30.

1. Os três números são divisíveis por 2; escrevemos 2 do lado direito do traço e efetuamos as divisões, escrevendo os quocientes.

$$\begin{array}{rrr|l} 18, & 24, & 30 & 2 \\ 9, & 12, & 15 & \end{array}$$

2. Repetimos o processo até que não haja nenhum número par.

$$\begin{array}{rrr|l} 18, & 24, & 30 & 2 \\ 9, & 12, & 15 & 2 \\ 9, & 6, & 15 & 2 \\ 9, & 3, & 15 & \end{array}$$

3. Continuamos o processo usando cada um dos outros primos, até chegar no quociente 1 para todos os números:

$$\begin{array}{rrr|l} 18, & 24, & 30 & 2 \\ 9, & 12, & 15 & 2 \\ 9, & 6, & 15 & 2 \\ 9, & 3, & 15 & 3 \\ 3, & 1, & 5 & 3 \\ 1, & 1, & 5 & 5 \\ 1, & 1, & 1 & \end{array}$$

4. O produto dos números da direita é o MMC dos números da esquerda.

Ou seja: $MMC(18,\ 24,\ 30) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

Agora podemos voltar ao problema anterior:

Motivação

(PUCCAMP) De uma estação rodoviária, partem ônibus para São Paulo a cada 30 minutos, para Araraquara a cada 6 horas e para Ribeirão Preto a cada 8 horas. No dia 05/12, às 7h, partiram ônibus para as três cidades. Essa coincidência deverá ter ocorrido uma outra vez às:

a) 19h do dia 05/12
b) 23h do dia 05/12
c) 12h do dia 06/12
d) 15h do dia 06/12
e) 7h do dia 06/12

- Todas as saídas de ônibus para Ribeirão Preto e Araraquara coincidem com saídas de ônibus para São Paulo.
- O número que expressa de quanto em quanto tempo coincidem saídas de ônibus para Araraquara e Ribeirão Preto é o MMC de 6 e 8.

$$\begin{array}{r|l} 6,\ 8 & 2 \\ 3,\ 4 & 2 \\ 3,\ 2 & 2 \\ 3,\ 1 & 3 \\ 1,\ 1 & \end{array}$$

- Assim, saem ônibus simultaneamente para São Paulo, Ribeirão Preto e Araraquara a cada $2^3 \cdot 3 = 24h$. Assim, a próxima coincidência ocorrerá 24h depois, ou seja: às 7h do dia 06/12.

Motivação

(PUCCAMP) De uma estação rodoviária, partem ônibus para São Paulo a cada 30 minutos, para Araraquara a cada 6 horas e para Ribeirão Preto a cada 8 horas. No dia 05/12, às 7h, partiram ônibus para as três cidades. Essa coincidência deverá ter ocorrido uma outra vez às:

a) 19h do dia 05/12
b) 23h do dia 05/12
c) 12h do dia 06/12
d) 15h do dia 06/12
e) 7h do dia 06/12

Portanto, a resposta certa é **E**.

Exercício

Encontrar o mínimo múltiplo comum dos números a seguir.

- 6, 8 $\Rightarrow MMC(6,\ 8) = 2^3 \cdot 3 = 24$
- 24, 36 $\Rightarrow MMC(24,\ 36) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$
- 12, 15, 18 $\Rightarrow MMC(12,\ 15,\ 18) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$
- 210, 360 $\Rightarrow MMC(210,\ 360) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$
- 12, 14, 16 e 18 $\Rightarrow MMC(12,\ 14,\ 16,\ 18) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 = 1008$

Outros tipos de problemas também podem ser resolvidos utilizando o conceito de MMC.

Problema

Pães de hambúrguer são vendidos em embalagens de 4 unidades. Já os hambúrgueres, em embalagens de 6 unidades. Se eu não quero que falte pães e nem hambúrgueres, qual a quantidade mínima de embalagens que devo comprar?

- O número de hambúrgueres que podem ser comprados é múltiplo de 4;
- o número de pães é múltiplo de 6.
- Portanto, para que os números coincidam, o número de pães/hambúrgueres que devem ser comprados é o MMC entre 4 e 6.

- Calculamos o MMC entre 4 e 6:

$$\begin{array}{r|l} 4,\ 6 & 2 \\ 2,\ 3 & 2 \\ 1,\ 3 & 3 \\ 1,\ 1 & \end{array}$$

- Assim, devem ser comprados $2^2 \cdot 3 = 12$ pães e hambúrgueres.
- Isso resulta em $12 \div 4 = 3$ pacotes de hambúrgueres e $12 \div 6 = 2$ pacotes de pães.
- Portanto, o menor número de embalagens que evita sobras é $2+3 = 5$.

Máximo Divisor Comum

Definição

Divisores de um número natural são todos os números pelos quais ele é divisível.

Exemplos:

- Divisores de 24: $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$
- Divisores de 42: $1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42$
- Divisores de 45: $1, 3, 5, 9, 15, 45$

Há números que sejam divisores, simultaneamente, de 24 e de 42?

Sim! Esses números são chamados de divisores comuns de 24 e de 42.

Em alguns casos, é útil saber identificar qual é o maior divisor comum (MDC) entre dois (ou mais) números.

Motivação

(UNESP) Durante um evento, o organizador pretende distribuir, como brindes, a alguns dos participantes, caixas (kits) com o mesmo conteúdo, formado de camisetas e chaveiros. Sabe-se que ele possui exatamente 200 camisetas e 120 chaveiros.

a) Decomponha os números 200 e 120 em fatores primos.

b) Determine o número máximo de caixas, com o mesmo conteúdo, que o organizador conseguirá formar utilizando todos os chaveiros e camisetas disponíveis.

Decomposição simultânea

Vamos encontrar o MDC de 60, 80 e 100.

1. Montamos o esquema usual de fatoração.
2. Procuramos um primo que divida todos os números.
3. Escrevemos o primo do lado direito do traço e embaixo de cada número escrevemos o quociente da divisão.

$$\begin{array}{rrr|l} 60, & 80, & 100 & 2 \\ 30, & 40, & 50 & \end{array}$$

4. Repetimos o processo até que algum dos números não seja divisível por esse primo.

$$\begin{array}{rrr|l} 60, & 80, & 100 & 2 \\ 30, & 40, & 50 & 2 \\ 15, & 20, & 25 & \end{array}$$

5. Devemos então buscar o próximo primo que divida todos os números.

6. Continuamos o processo até os números não terem mais fator comum.

60,	80,	100	2
30,	40,	50	2
15,	20,	25	5
3,	4,	5	

7. Como 3, 4 e 5 não possuem fatores em comum, o processo chega ao fim e o produto dos números da direita é o MDC dos números da esquerda.

   Ou seja: $MDC(60,\ 80,\ 100) = 2^2 \cdot 5 = 20$.

Como outro exemplo, encontraremos agora o MDC de 168 e 264.

1. Os dois números são divisíveis por 2, então escrevemos 2 do lado direito do traço e efetuamos as divisões.

168,	264	2
84,	132	

2. Continuamos com o processo até que algum dos números não seja mais par.

168,	264	2
84,	132	2
42,	66	2
21,	33	

3. O próximo primo a ser testado é 3. Os dois números são divisíveis por 3; então colocamos 3 do lado direito do traço e efetuamos as divisões.

168,	264	2
84,	132	2
42,	66	2
21,	33	3
7,	11	

4. Como 7 e 11 não possuem fatores em comum (ambos são primos), o processo chegou ao fim e o produto dos números da direita é o MDC dos números da esquerda.

   Ou seja: $MDC(168,\ 264) = 2^3 \cdot 3 = 24$.

Agora podemos voltar ao problema anterior:

Motivação

(UNESP) Durante um evento, o organizador pretende distribuir, como brindes, a alguns dos participantes, caixas (kits) com o mesmo conteúdo, formado de camisetas e chaveiros. Sabe-se que ele possui exatamente 200 camisetas e 120 chaveiros.

a) Decomponha os números 200 e 120 em fatores primos.

b) Determine o número máximo de caixas, com o mesmo conteúdo, que o organizador conseguirá formar utilizando todos os chaveiros e camisetas disponíveis.

a) Decompondo ambos os números:

200	2	120	2
100	2	60	2
50	2	30	2
25	5	15	3
5	5	5	5
1		1	

Assim, sabemos que $200 = 2^3 \cdot 5^2$ e $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

b) Se n representar o número de caixas disponíveis, teremos $\frac{200}{n}$ camisetas e $\frac{120}{n}$ chaveiros por caixa.

   O número máximo de caixas será o maior n que divide 200 e 120 simultaneamente: em outras palavras, será o MDC de 200 e 120.

120,	200	2
60,	100	2
30,	50	2
15,	25	5
3,	5	

   Portanto, serão formadas no máximo $2^3 \cdot 5 = 40$ caixas de mesmo conteúdo, utilizando todos os chaveiros e camisetas disponíveis.

Exercício

Encontrar o máximo divisor comum dos números a seguir.

- 33, 55 $\Rightarrow MDC(33,\ 55) = 11$
- 45, 135 $\Rightarrow MDC(45,\ 135) = 3^2 \cdot 5 = 45$
- 10, 60, 70 $\Rightarrow MDC(10,\ 60,\ 70) = 2 \cdot 5 = 10$
- 14, 28, 84 $\Rightarrow MDC(14,\ 28,\ 84) = 2 \cdot 7 = 14$
- 20, 45, 105 $\Rightarrow MDC(20,\ 45,\ 105) = 5$

Outros tipos de problemas também podem ser resolvidos utilizando o conceito de MDC.

Problema

Para a confecção de sacolas são utilizados dois rolos de fios de nylon. Esses rolos, que medem 450 cm e 756 cm cada um, serão divididos em pedaços iguais e do maior tamanho possível. Sabendo que não deve haver sobras, quantos pedaços serão obtidos?

- Como não deve haver sobras, o tamanho de cada pedaço deve ser um divisor de 450 e 756.
- Assim, o maior tamanho de pedaço possível é o MDC dos dois números.

- Calculamos o MDC entre 450 e 756:

$$\begin{array}{rr|l} 450, & 756 & 2 \\ 225, & 378 & 3 \\ 75, & 126 & 3 \\ 25, & 42 & \end{array}$$

- Assim, o maior pedaço possível mede $2 \cdot 3^2 = 18$ cm.
- Isso resulta em $450 \div 18 = 25$ pedaços utilizando o primeiro rolo e $756 \div 18 = 42$ usando o segundo.
- Portanto, o número total de pedaços do maior tamanho possível é $25 + 42 = 67$.

Mês da Matemática
Aula 3: Frações

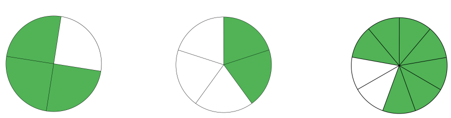
Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso

Curso Exato

O conceito de fração

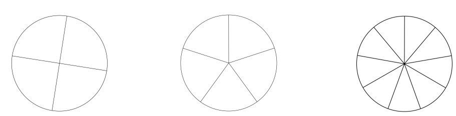
Introdução

Frações representam partes de um todo.

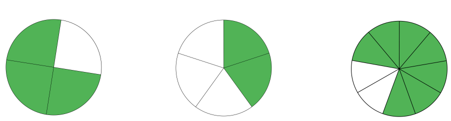


$\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{7}{9}$

Esses são os 'todos'...



E essas são as frações.

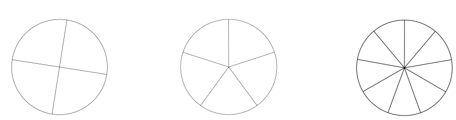


$\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{7}{9}$

Escrevemos frações usando numeradores e denominadores.

O denominador fica embaixo e representa em quantas partes dividimos o todo.

O numerador fica em cima e representa o número de partes da fração.

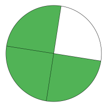


$\frac{}{4}$ $\frac{}{5}$ $\frac{}{9}$

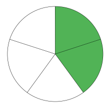
Escrevemos frações usando numeradores e denominadores.

O denominador fica embaixo e representa em quantas partes dividimos o todo.

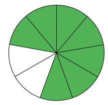
O numerador fica em cima e representa o número de partes da fração.



$\frac{3}{4}$



$\frac{2}{5}$



$\frac{7}{9}$

A leitura de frações depende de qual é o denominador. Dizemos o número que está em seu numerador, seguido do nome dado ao seu denominador.

Se o denominador é uma potência de 10, lê-se de uma forma similar a números decimais:

$\frac{1}{10}$: um décimo

$\frac{1}{100}$: um centésimo

$\frac{1}{1.000}$: um milésimo

$\frac{1}{10.000}$: um décimo de milésimo

$\frac{1}{100.000}$: um centésimo de milésimo

$\frac{1}{1.000.000}$: um milionésimo

Um inteiro

Três quartos

Seis sétimos

Um meio ou metade

Quatro quintos

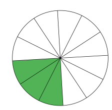
Sete oitavos

Dois terços

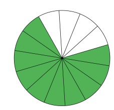
Cinco sextos

Oito nonos

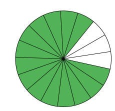
Quando o denominador é maior que 10, dizemos o número que está em seu numerador, seguido do seu denominador + "avos".



Três doze avos



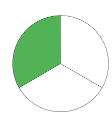
Dez catorze avos



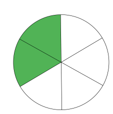
Catorze dezessete avos

Frações equivalentes

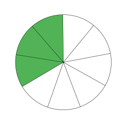
Frações diferentes podem representar a mesma quantia!



$\frac{1}{3}$



$\frac{2}{6}$

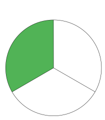


$\frac{3}{9}$

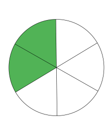
Quando isso acontece, dizemos que as frações são equivalentes.

Podemos gerar frações equivalentes ao multiplicar tanto o denominador quanto o numerador de uma fração por um mesmo número.

$$\frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$$



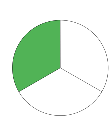
$\frac{1}{3}$



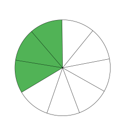
$\frac{2}{6}$

Podemos gerar frações equivalentes ao multiplicar tanto o denominador quanto o numerador de uma fração por um mesmo número.

$$\frac{1 \times 3}{3 \times 3} = \frac{3}{9}$$



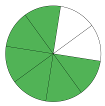
$\frac{1}{3}$



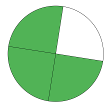
$\frac{3}{9}$

Também podemos gerar frações equivalentes ao dividir tanto o denominador quanto o numerador de uma fração por um mesmo número.

$$\frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$$



$\frac{6}{8}$



$\frac{3}{4}$

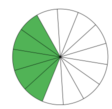
Exercício

Determinar se cada par de frações a seguir é equivalente.

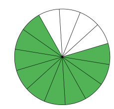
- $\frac{3}{6}$ e $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ Não!
- $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ $\Rightarrow$ Sim!
- $\frac{2}{3}$ e $\frac{6}{9}$ $\Rightarrow$ Sim!
- $\frac{1}{4}$ e $\frac{4}{12}$ $\Rightarrow$ Não!
- $\frac{6}{8}$ e $\frac{9}{12}$ $\Rightarrow$ Sim!

Denominadores comuns

Como comparar frações e dizer qual delas é maior?



$\frac{5}{14}$



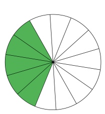
$\frac{10}{14}$

Nesse caso, elas possuem o mesmo denominador.

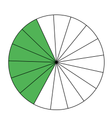
Por isso, é fácil ver que $\frac{10}{14} > \frac{5}{14}$.

No entanto, o que fazer quando os denominadores são diferentes?

Qual das frações abaixo é maior?



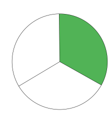
$\frac{5}{14}$



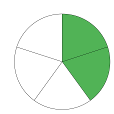
$\frac{6}{17}$

Para comparar frações de denominadores diferentes, devemos encontrar frações equivalentes às duas, que tenham um denominador comum.

Considere inicialmente as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$.



$\frac{1}{3}$



$\frac{2}{5}$

Qual é maior?

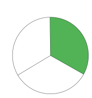
Para responder a essa pergunta, procuramos por frações equivalentes a $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$ que tenham o mesmo denominador.

Esse denominador será um múltiplo comum de 3 e 5!

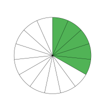
Múltiplos de 3:	3	6	9	12	15	18	21
Múltiplos de 5:	5	10	15	20	25	30	35

Podemos obter um denominador comum procurando pelo mínimo múltiplo comum entre os dois denominadores.

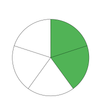
Quando representamos as frações no mesmo denominador, fica fácil de dizer qual é maior.



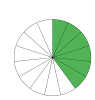
$\frac{1}{3}$ $=$



$\frac{5}{15}$



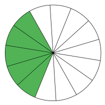
$\frac{2}{5}$ $=$



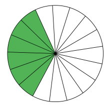
$\frac{6}{15}$

Visualmente, percebemos que $\frac{2}{5} > \frac{1}{3}$, pois $\frac{6}{15} > \frac{5}{15}$.

Agora podemos voltar para nosso problema inicial, das frações $\frac{5}{14}$ e $\frac{6}{17}$.



$\frac{5}{14}$



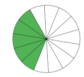
$\frac{6}{17}$

Qual é maior?

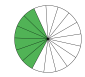
Fatorando 14 e 17, descobrimos que $MMC(14, 17) = 2 \cdot 7 \cdot 17 = 238$.

$$\begin{array}{r|l} 14,\ 17 & 2 \\ 7,\ 17 & 7 \\ 1,\ 17 & 17 \\ 1,\ 1 & \end{array}$$

Portanto:



$\frac{5}{14} = \frac{85}{238}$ $>$



$\frac{6}{17} = \frac{84}{238}$

Exercício

Comparar as frações a seguir, preenchendo as lacunas com $>$, $<$ ou $=$.

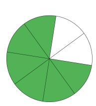
- $\frac{3}{5}$ ___ $\frac{2}{5}$
- $\frac{3}{5} > \frac{2}{5}$
- $\frac{5}{17}$ ___ $\frac{8}{17}$
- $\frac{5}{17} < \frac{8}{17}$
- $\frac{1}{3}$ ___ $\frac{3}{5}$
- $\frac{1}{3} < \frac{3}{5}$
- $\frac{10}{15}$ ___ $\frac{8}{12}$
- $\frac{10}{15} = \frac{8}{12}$
- $\frac{4}{5}$ ___ $\frac{3}{4}$
- $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$
- $\frac{2}{3}$ ___ $\frac{4}{7}$
- $\frac{2}{3} > \frac{4}{7}$

Simplificação de frações

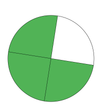
Às vezes encontramos frações que podem ser simplificadas.

Isso significa que existe uma fração equivalente a ela, em que o denominador é um número menor.

Por exemplo:



$\frac{6}{8}$ $=$



$\frac{3}{4}$

Quando uma fração não pode ser simplificada, dizemos que é uma fração irredutível.

Para obter uma fração irredutível, basta dividir o numerador e o denominador de qualquer fração por seu máximo divisor comum.

$$\frac{6}{8} \Rightarrow \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4}$$

Como $MDC(6, 8) = 2$, dividimos o numerador e o denominador por 2.

$$\frac{12}{20} \Rightarrow \frac{12 \div 4}{20 \div 4} = \frac{3}{5}$$

Como $MDC(12, 20) = 4$, dividimos o numerador e o denominador por 4.

$$\frac{15}{25} \Rightarrow \frac{15 \div 5}{25 \div 5} = \frac{3}{5}$$

Como $MDC(15, 25) = 5$, dividimos o numerador e o denominador por 5.

$$\frac{32}{64} \Rightarrow \frac{32 \div 32}{64 \div 32} = \frac{1}{2}$$

Como $MDC(32, 64) = 32$, dividimos o numerador e o denominador por 32.

$$\frac{24}{32} \Rightarrow \frac{24 \div 8}{32 \div 8} = \frac{3}{4}$$

Como $MDC(24, 32) = 8$, dividimos o numerador e o denominador por 8.

$$\frac{60}{75} \Rightarrow \frac{60 \div 15}{75 \div 15} = \frac{4}{5}$$

Como $MDC(60, 75) = 15$, dividimos o numerador e o denominador por 15.

Exercício

Simplificar cada fração a seguir.

- $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$
- $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$
- $\frac{16}{20} = \frac{4}{5}$
- $\frac{32}{48} = \frac{2}{3}$
- $\frac{30}{42} = \frac{5}{7}$

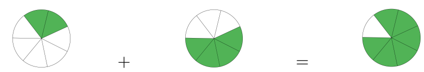
Mês da Matemática
Aula 4: Operações com Frações – parte 1

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso

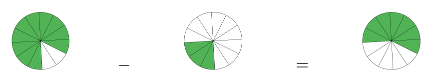
Curso Exato

Adição e subtração

Quando as duas frações têm o mesmo denominador, somar/subtrair é muito simples.



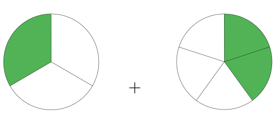
$\frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$



$\frac{10}{12} - \frac{3}{12} = \frac{7}{12}$

Basta somar/subtrair os numeradores e manter o denominador.

Quando os denominadores são diferentes, precisamos encontrar frações equivalentes que tenham um denominador comum.

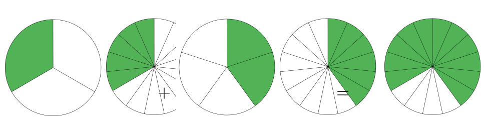


$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = ?$

- No nosso caso, temos $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$. O MMC de 3 e 5 é 15.
- Queremos encontrar frações equivalentes a $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{5}$ com denominador igual a 15.
- Começamos descobrindo por quanto devemos multiplicar cada um dos denominadores para obter 15.
- Multiplicamos os numeradores de cada fração pelo mesmo número.

$$\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1 \times 5}{3 \times 5} = \frac{5}{15} \qquad \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{2 \times 3}{5 \times 3} = \frac{6}{15}$$

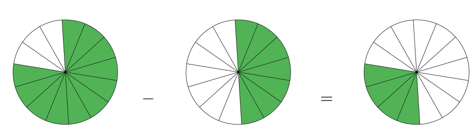
- Depois, basta somar: $\frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{11}{15}$.



$\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$

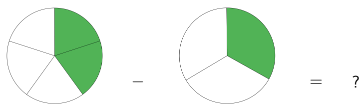
Portanto, $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}$.

O mesmo processo vale para a subtração.



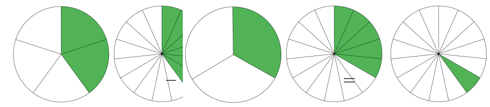
$\frac{11}{14} - \frac{7}{14} = \frac{4}{14}$

Quando os denominadores são diferentes:



$\frac{2}{5}$ $\frac{1}{3}$

$$\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{2\times 3}{5\times 3} = \frac{6}{15} \qquad \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1\times 5}{3\times 5} = \frac{5}{15} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{6}{15} - \frac{5}{15} = \frac{1}{15}$$



$\frac{2}{5}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{15}$

Outros exemplos:

1. Calcule $\frac{3}{5} + \frac{8}{5}$.

   Como os denominadores são iguais, basta somar os numeradores e conservar os denominadores:

   $$\frac{3}{5} + \frac{8}{5} = \frac{11}{5}$$

2. Calcule $\frac{13}{7} - \frac{3}{7}$.

   Os denominadores das duas frações são iguais; subtraímos os numeradores e conservamos os denominadores:

   $$\frac{13}{7} - \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$$

3. Calcule $\frac{3}{5} + \frac{4}{7}$.

   Começamos encontrando o MMC entre os denominadores. O MMC de 5 e 7 é 35.

   $$\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{3\times 7}{5\times 7} = \frac{21}{35} \qquad \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{4\times 5}{7\times 5} = \frac{20}{35} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{21}{35} + \frac{20}{35} = \frac{41}{35}$$

4. Calcule $\frac{8}{5} - \frac{3}{2}$.

   Começamos encontrando o MMC entre os denominadores. O MMC de 5 e 2 é 10.

   $$\frac{8}{5} \Rightarrow \frac{8\times 2}{5\times 2} = \frac{16}{10} \qquad \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3\times 5}{2\times 5} = \frac{15}{10} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{16}{10} - \frac{15}{10} = \frac{1}{10}$$

5. Calcule $\frac{7}{6} - \frac{1}{4}$.

   Começamos encontrando o MMC entre os denominadores. O MMC de 6 e 4 é 12.

   $$\frac{7}{6} \Rightarrow \frac{7\times 2}{6\times 2} = \frac{14}{12} \qquad \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1\times 3}{4\times 3} = \frac{3}{12} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{14}{12} - \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$$

6. Calcule $\frac{5}{8} - \frac{3}{12}$.

   Começamos encontrando o MMC entre os denominadores. O MMC de 8 e 12 é 24.

   $$\frac{5}{8} \Rightarrow \frac{5\times 3}{8\times 3} = \frac{15}{24} \qquad \frac{3}{12} \Rightarrow \frac{3\times 2}{12\times 2} = \frac{6}{24} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{5}{8} - \frac{3}{12} = \frac{9}{24}$$

   É boa prática simplificar os resultados de operações.

   Assim, $\frac{5}{8} - \frac{3}{12} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

Exercício

Efetue as operações a seguir. Não esqueça de simplificar o resultado quando possível.

- $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$
- $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$
- $\frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$
- $\frac{11}{12} + \frac{5}{12} = \frac{4}{3}$
- $\frac{24}{25} - \frac{9}{25} = \frac{3}{5}$

Exercício

Efetue as operações a seguir. Não esqueça de simplificar o resultado quando possível.

- $\frac{2}{3} + \frac{3}{8} = \frac{25}{24}$
- $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{11}{10}$
- $\frac{4}{7} - \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$
- $\frac{5}{4} - \frac{1}{6} = \frac{13}{12}$
- $\frac{9}{25} - \frac{1}{4} = \frac{11}{100}$

Frações também são usadas para resolver alguns problemas, como o apresentado abaixo.

Problema

Marcos e Mariana pretendem vender cupcakes na festa junina de seu bairro.

Ao apresentarem a ideia à sua amiga Mirela, ela se propôs a fornecer os ingredientes necessários ao custo de $\frac{1}{3}$ das vendas. Ao consultarem a associação de moradores do bairro, descobriram que o custo de operar uma barraca na festa era de $\frac{1}{4}$ das vendas.

Caso decidam ir em frente com o plano, que fração do preço de vendas de cupcakes estará comprometida com os custos de ingredientes e operação da barraca?

- Para encontrar a fração da receita comprometida com os custos, devemos somar $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$.

  Começamos encontrando o MMC entre os denominadores. O MMC de 3 e 4 é 12.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12} \\ \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

  Portanto, $\frac{7}{12}$ da receita gerada com a venda está comprometida com os custos.

Mês da Matemática
Aula 5: Operações com Frações – parte 2

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso

Curso Exato

Multiplicação

Para multiplicar frações, são necessários 3 passos:

1. Multiplicar os numeradores
2. Multiplicar os denominadores
3. Simplificar o resultado, caso necessário.

Observe os exemplos a seguir.

- $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$
- $\frac{2}{3} \times \frac{4}{15} = \frac{2 \times 4}{3 \times 15} = \frac{8}{45}$

Quando possível, simplifique o resultado.

- $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{5 \times 4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$

Lembre-se sempre de que um número inteiro pode ser representado como sendo uma fração com denominador 1:

- $\frac{13}{17} \times 5 = \frac{13}{17} \times \frac{5}{1} = \frac{13 \times 5}{17 \times 1} = \frac{65}{17}$
- $\frac{25}{4} \times 3 = \frac{25}{4} \times \frac{3}{1} = \frac{25 \times 3}{4 \times 1} = \frac{75}{4}$
- $\frac{13}{20} \times 4 = \frac{13}{20} \times \frac{4}{1} = \frac{13 \times 4}{20 \times 1} = \frac{13}{5}$

Outros exemplos:

- $\frac{1}{4} \times \frac{8}{15} = \frac{1 \times 8}{4 \times 15} = \frac{2}{15}$
- $\frac{13}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{13 \times 2}{5 \times 7} = \frac{26}{35}$
- $\frac{2}{3} \times \frac{3}{16} = \frac{2 \times 3}{3 \times 16} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$
- $\frac{3}{10} \times \frac{7}{12} = \frac{3 \times 7}{10 \times 12} = \frac{21}{120} = \frac{7}{40}$

Exercício

Efetue as operações a seguir.

- $\frac{1}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{21}$
- $\frac{11}{10} \times \frac{6}{11} = \frac{3}{5}$
- $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$
- $\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$
- $\frac{14}{18} \times \frac{3}{9} = \frac{7}{27}$

Alguns problemas também podem ser resolvidos utilizando multiplicação de frações.

Problema

Na sala de Ivete, $\frac{5}{6}$ dos alunos têm uma irmã. Dos estudantes que têm irmãs, $\frac{1}{3}$ também têm um irmão.

Qual fração dos estudantes da sala de Ivete têm um irmão e uma irmã?

- Para descobrir quantos estudantes têm um irmão e uma irmã, devemos multiplicar as duas frações.

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{5 \times 1}{6 \times 3} = \frac{5}{18}$$

- Portanto, $\frac{5}{18}$ dos alunos da sala de Ivete têm um irmão e uma irmã.

Vamos resolver outro exemplo.

Problema

Numa visita monitorada ao zoológico de sua cidade, Paulo observou 36 pássaros. Sendo apaixonado por araras, dedicou boa parte do tempo ao seu estudo: $\frac{1}{4}$ dos pássaros que ele observou eram dessa espécie. Do restante, $\frac{1}{3}$ das aves eram tucanos e $\frac{2}{3}$ eram falcões.

O número de tucanos observado representa qual fração do total de aves? Que número isso representa?

- Inicialmente, vamos descobrir qual fração do total de aves o número de tucanos observados representa.
- Para isso, começamos por descobrir que fração do total representam todas as aves que não são araras.
- Como as araras são $\frac{1}{3}$ de todas as aves, o restante das aves representa $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ do total.
- Então, devemos multiplicar a fração que o restante das aves representam do total pela fração que os tucanos representam do restante das aves.

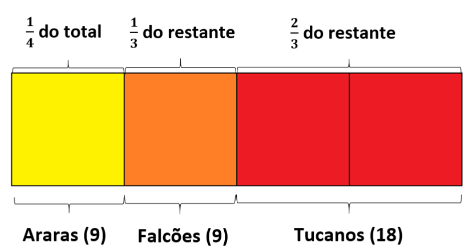
$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3 \times 1}{4 \times 3} = \frac{1}{4}$$

- Portanto, $\frac{1}{4}$ das aves observadas eram tucanos.
- Falta descobrir qual foi o número de tucanos estudados.
- Multiplicando a fração que os tucanos representam do total de aves pelo número total de aves, descobrimos o número de tucanos.

$$\frac{1}{4} \times 36 = \frac{1}{4} \times \frac{36}{1} = \frac{1 \times 36}{4 \times 1} = \frac{36}{4} = 9$$

- Portanto, Paulo estudou 9 tucanos.

- Também podemos visualizar a situação graficamente, representando o número de aves avistadas por Paulo por uma barra.



Inversos

Definição

O inverso de um número x é o número y que devemos multiplicar por x para que o produto seja igual a 1.

Em outras palavras, o inverso de x é o número y tal que $x \cdot y = 1$

Se x for um *número inteiro*, seu inverso é a fração $\frac{1}{x}$.

- $2 \Rightarrow \frac{1}{2}$
- $9 \Rightarrow \frac{1}{9}$
- $5 \Rightarrow \frac{1}{5}$
- $14 \Rightarrow \frac{1}{14}$

Se x for uma fração do tipo $\frac{a}{b}$, seu inverso é a fração $\frac{b}{a}$.

Em outras palavras, para encontrar o inverso de uma fração, basta trocar o seu numerador e o seu denominador de lugar!

- $\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{3}{2}$ $\left(\text{Note que } \frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1\right)$.
- $\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4}{3}$
- $\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{10}{1} = 10$
- $\frac{5}{9} \Rightarrow \frac{9}{5}$
- $\frac{53}{27} \Rightarrow \frac{27}{53}$

Exercício

Dê o inverso de cada número a seguir.

- $6 \Rightarrow \frac{1}{6}$
- $35 \Rightarrow \frac{1}{35}$
- $\frac{1}{19} \Rightarrow 19$
- $\frac{3}{5} \Rightarrow \frac{5}{3}$
- $\frac{10}{17} \Rightarrow \frac{17}{10}$

Divisão

Para dividir duas frações, são necessários 3 passos:

1. Inverter a segunda fração
2. Multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda
3. Simplificar o resultado, caso necessário.

Observe os exemplos a seguir.

- $\frac{1}{4} \div \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{1}{4} \times \frac{7}{3} = \frac{1 \times 7}{4 \times 3} = \frac{7}{12}$
- $\frac{2}{3} \div \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{5}{1} = \frac{2 \times 5}{3 \times 1} = \frac{10}{3}$
- $12 \div \frac{1}{3} \Rightarrow 12 \times 3 = 36$
- $\frac{7}{9} \div \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{7}{9} \times \frac{4}{3} = \frac{7 \times 4}{9 \times 3} = \frac{28}{27}$

Quando possível, simplifique o resultado.

- $\frac{1}{2} \div \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{6}{1} = \frac{1 \times 6}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$
- $\frac{3}{4} \div 3 \Rightarrow \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3 \times 1}{4 \times 3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
- $\frac{2}{5} \div \frac{8}{15} \Rightarrow \frac{2}{5} \times \frac{15}{8} = \frac{2 \times 15}{5 \times 8} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$
- $\frac{5}{12} \div \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{5}{12} \times \frac{8}{3} = \frac{5 \times 8}{12 \times 3} = \frac{40}{36} = \frac{10}{9}$

Exercício

Efetue as operações a seguir.

- $7 \div \frac{1}{3} = 21$
- $1 \div \frac{1}{6} = 6$
- $9 \div \frac{3}{4} = 12$
- $\frac{3}{8} \div 3 = \frac{1}{8}$
- $\frac{5}{6} \div 6 = \frac{5}{36}$
- $\frac{4}{7} \div 8 = \frac{1}{14}$

Exercício

Efetue as operações a seguir.

- $\frac{1}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$
- $\frac{3}{8} \div \frac{7}{8} = \frac{3}{7}$
- $\frac{1}{4} \div \frac{1}{7} = \frac{7}{4}$
- $\frac{5}{6} \div \frac{5}{11} = \frac{11}{6}$
- $\frac{1}{10} \div \frac{5}{6} = \frac{3}{25}$
- $\frac{1}{11} \div \frac{3}{7} = \frac{7}{33}$

Alguns problemas também podem ser resolvidos utilizando divisão de frações.

Problema

Jacqueline foi alimentar seu cachorro e percebeu que ainda restava $\frac{3}{4}$ do pacote de ração. Considerando que o seu cachorro consome $\frac{3}{8}$ do pacote de ração por semana, quantas semanas a ração ainda durará?

- Para responder a pergunta, devemos dividir a quantidade de ração do pacote pela quantidade de ração que o cachorro consome por semana.

$$\frac{3}{4} \div \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{3} = \frac{24}{12} = 2$$

- Dessa maneira, a ração ainda durará 2 semanas.

Vamos resolver outro exemplo.

Problema

Uma fábrica de alimentos utiliza $\frac{1}{6}$ de um barril de uvas passas em cada lote de barras de cereais que produz.

Um gerente de produção, ao analisar o estoque, percebeu que no dia anterior foi consumido $\frac{1}{2}$ de um barril de uvas passas.

Quantos lotes de barras de cereais foram produzidos nesse dia?

- Para descobrir quantos lotes de barras de cereais foram produzidos, devemos dividir o consumo do dia anterior pela fração de barril de uvas passas utilizadas na produção de cada lote.

$$\frac{1}{2} \div \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times 6 = \frac{1 \times 6}{2 \times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

- Portanto, foram produzidos 3 lotes de barras de cereais nesse dia.

Mês da Matemática
Aula 6: Números decimais

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso

Curso Exato

Sistema de Numeração Decimal

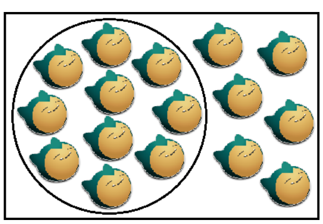
Um sistema de numeração é simplesmente uma maneira de representar números e quantidades.

O sistema de numeração utilizado por nossa sociedade é decimal: dispomos de 10 algarismos (de 0 a 9) para contar e a contagem é baseada em agrupamentos de 10 unidades.

Cada agrupamento de 10 unidades é chamado de dezena. Por sua vez, cada agrupamento de 10 dezenas é chamado de centena. Ordens maiores também têm nomes específicos, aos quais você já deve estar habituado.

Quantidades maiores que uma dezena são escritas usando mais de um dígito, em que cada dígito representa uma das ordens de contagem.

A figura a seguir mostra um exemplo de contagem.



- 1 grupo de 10 objetos + 6 objetos = 16 objetos

Nosso sistema de numeração é posicional: a posição ocupada por cada algarismo define o seu valor.

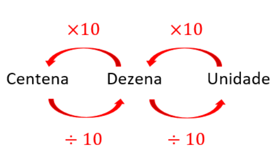
Exemplos:

$$12 = \underbrace{1 \times 10}_{\text{dezena}} + \underbrace{2}_{\text{unidade}}$$

$$202 = \underbrace{2 \times 100}_{\text{centena}} + \underbrace{0 \times 10}_{\text{dezena}} + \underbrace{2}_{\text{unidade}}$$

- Em 202, o primeiro dígito 2 representa um valor bem maior que o segundo.
- Isso acontece porque o primeiro 2 representa 2 centenas, enquanto o segundo 2 representa 2 unidades.

Na representação de um número, cada ordem vale 10 vezes mais que a ordem à sua direita.



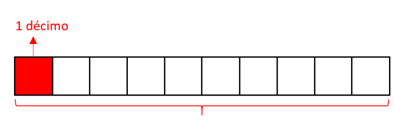
Exemplo:

$$\begin{array}{ccc} & 20 & \\ & \uparrow & \\ 2 & 0 & 2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 200 & & 2 \end{array}$$

E quando queremos representar quantias menores que uma unidade, como por exemplo $\frac{1}{2}$?

Utilizamos uma vírgula para marcar o dígito da unidade e continuamos a representar dígitos à direita da vírgula.

O primeiro dígito após a vírgula representa um décimo $\left(\frac{1}{10}\right)$ de unidade!



O segundo dígito representa um centésimo $\left(\frac{1}{100}\right)$ (10 vezes menos) e assim sucessivamente.

A posição da vírgula é importantíssima! Ela é a referência para o valor de cada algarismo.

Bilhões			Milhões			Milhares			Unidades			,	Decimais					
Centenas de bilhão	Dezenas de bilhão	Unidades de bilhão	Centenas de milhão	Dezenas de milhão	Unidades de milhão	Centenas de milhar	Dezenas de milhar	Unidades de milhar	Centenas	Dezenas	Unidades		Décimos	Centésimos	Milésimos	Décimos de milésimos	Centenas de milésimos	Milionésimos

Exemplos:

- 237 : 2 centenas, 3 dezenas e 7 unidades
- 4192 : 4 unidades de milhar, 1 centena, 9 dezenas e 2 unidades
- 1,7: 1 unidade e 7 décimos
- 15,162: 1 dezena, 5 unidades, 1 décimo, 6 centésimos e 2 milésimos
- 2,0009: 2 unidades e 9 décimos de milésimo

Frações decimais

Frações decimais são frações em que o denominador é uma potência de 10, tais como 1, 10, 100, 1 000...

- Números inteiros podem ser representados como frações cujo denominador é 1.
- No caso de números decimais, o número de casas depois da vírgula corresponde ao número de zeros no denominador da fração.
  - $35 = \frac{35}{1}$
  - $0{,}376 = \frac{376}{1000}$
  - $2{,}3 = \frac{23}{10}$
  - $176{,}0124 = \frac{1\,760\,124}{10\,000}$

Exercício

Converta cada número decimal abaixo para sua respectiva fração decimal.

- $920 = \frac{920}{1}$
- $52{,}6 = \frac{526}{10}$
- $0{,}81 = \frac{81}{100}$
- $2{,}925 = \frac{2\,925}{1\,000}$
- $0{,}0002 = \frac{2}{10\,000}$

Da mesma forma, podemos converter de frações decimais para números decimais contando o número de zeros no denominador da fração e posicionando a vírgula de acordo.

- $\frac{27}{10} = 2{,}7$
- $\frac{156}{1} = 156$
- $\frac{9}{100} = 0{,}09$
- $\frac{35\,258}{1\,000} = 35{,}258$

Exercício

Converta cada fração decimal abaixo para seu respectivo número decimal.

- $\frac{192}{10} = 19{,}2$
- $\frac{3}{100} = 0{,}03$
- $\frac{84}{1} = 84$
- $\frac{4\,428}{100} = 44{,}28$
- $\frac{3}{10\,000} = 0{,}0003$

Ordenação

Há duas formas principais de ordenar uma sequência numérica:

1. Ordem crescente: escrevemos os números do menor para o maior;

   Exemplo: $1 < 3 < 8 < 15 < 104$

2. Ordem decrescente: escrevemos os números do maior para o menor.

   Exemplo: $104 > 15 > 8 > 3 > 1$

Sabemos ordenar números inteiros intuitivamente:

1. Se o número de algarismos for diferente, o maior é quem tem mais algarismos.

   Exemplo: 58 184 é maior que 9 142.

2. Se o número de algarismos for igual, comparamos sequencialmente os algarismos, da esquerda para a direita, até que haja algum algarismo diferente. Comparando esse algarismo, determinamos o maior número.

   Exemplo: 136 284 é maior que 136 137.

Comparar o número de algarismos não funciona com números decimais!

- O número 0,42 é maior que 0,402, apesar de ter menos algarismos.

Para comparar decimais, começamos comparando sua parte inteira (os algarismos à esquerda da vírgula). Se elas forem diferentes, já é possível decidir qual é o maior número.

- O número 19,1 é maior que 3,184, porque $19 > 3$.

Quando a parte inteira é a mesma nos dois números, devemos comparar então sua parte decimal, algarismo a algarismo.

Nesse caso, é necessário usar uma propriedade importante: adicionar zeros à direita do número, depois da vírgula, não altera seu valor!

- Tanto 1,2 como 1,20 e 1,2000 são o mesmo número.

$$1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{120}{100} = \frac{12\,000}{10\,000}$$

Podemos descrever o processo de comparação algarismo a algarismo:

1. Faça uma tabela em que cada coluna corresponda a um algarismo.
2. Preencha cada número em uma linha, alinhando-os em relação à posição da vírgula.
3. Preencha os algarismos faltantes com zeros.
4. Compare os algarismos coluna a coluna, da esquerda para a direita, até que um deles possa ser declarado o maior.

Exemplo: Vamos colocar os números 1,506, 1,56 e 0,8 em ordem crescente.

Passos 1 e 2: Inserimos os números na tabela. Passo 3: Completamos os algarismos restantes com zeros. Passo 4: Comparamos os algarismos da esquerda para a direita.

unidades	vírgula	décimos	centésimos	milésimos
1	,	5	0	6
1	,	5	6	0
0	,	8	0	0

0,8 é o menor número, pois possui a menor parte inteira. Para os dois números restantes, o próximo algarismo é igual. Como $0 < 6$, concluímos que $1{,}506 < 1{,}56$. Assim, em ordem crescente os números ficam: $0{,}8 < 1{,}506 < 1{,}56$.

Exercício

Coloque os números em ordem crescente.

- 15,1 e 12,914 $\Rightarrow 12{,}914 < 15{,}1$
- 2,63 e 0,263 $\Rightarrow 0{,}263 < 2{,}63$
- 8,4 e 8,34 $\Rightarrow 8{,}34 < 8{,}4$
- 3,9; 1,5 e 3,21 $\Rightarrow 1{,}5 < 3{,}21 < 3{,}9$
- 7,15; 7,105 e 7,1253 $\Rightarrow 7{,}105 < 7{,}1253 < 7{,}15$

Adição de decimais

Para adicionar números decimais:

1. Escreva os números, um em cima do outro, **alinhando as vírgulas**.
2. Preencha os números com zeros à direita, depois da vírgula, para que todos tenham a mesma quantidade de casas decimais.
3. Adicione os números usando o algoritmo de adição já conhecido.

Exemplo

Calcule $1{,}35 + 4{,}12$.

Passo 1: Escrevemos os números, um em cima do outro. Passo 2: Os números já têm a mesma quantidade de casas decimais. Passo 3: Completamos a adição.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & , & 3 & 5 \\ + & 4 & , & 1 & 2 \\ \hline & 5 & , & 4 & 7 \end{array}$$

Exemplo

Calcule $3{,}47 + 5{,}36$.

Passo 1: Escrevemos os números, um em cima do outro. Passo 2: Os números já têm a mesma quantidade de casas decimais. Passo 3: Completamos a adição.

$$\begin{array}{ccccc} & & & {\scriptstyle 1} & \\ & 3 & , & 4 & 7 \\ + & 5 & , & 3 & 6 \\ \hline & 8 & , & 8 & 3 \end{array}$$

Exemplo

Calcule $12{,}19 + 6{,}456$.

Passo 1: Escrevemos os números, um em cima do outro. Passo 2: Igualamos a quantidade de casas decimais. Passo 3: Completamos a adição.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & {\scriptstyle 1} & & \\ & 1 & 2 & , & 1 & 9 & 0 \\ + & & 6 & , & 4 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 8 & , & 6 & 4 & 6 \end{array}$$

Exercício

Calcule:

- $3{,}4 + 5{,}3 = 8{,}7$
- $15{,}24 + 2{,}12 = 17{,}36$
- $5{,}751 + 2{,}88 = 8{,}631$
- $1{,}7 + 3{,}849 = 5{,}549$
- $159{,}83 + 92{,}714 = 252{,}544$

Problema

A nutricionista de Godofredo afirmou que o consumo médio ideal de calorias para um adulto é por volta de 600 a 700 quilocalorias por almoço. Para manter sua alimentação sob controle, Godofredo passou a planejar suas refeições cuidadosamente, mantendo notas sobre o que comia e seu valor calórico. A tabela a seguir representa as anotações de Godofredo referentes a um almoço.

Refeição	Peso	Kcal
2 colheres de arroz	200 g	202,4
1 concha de feijão	100 g	90,7
1 contra filé grelhado	120 g	287,5
3 folhas de alface	45 g	33,8
1 colher de azeite	–	50,1

Qual foi o consumo total de calorias de Godofredo nesse almoço? A recomendação de consumo calórico de sua nutricionista foi respeitada?

- Somando os valores calóricos de cada alimento, obtemos o valor calórico total da refeição.

$$\begin{array}{cccccc} & 2 & 1 & 2 & & \\ & 2 & 0 & 2 & , & 4 \\ & & 9 & 0 & , & 7 \\ & 2 & 8 & 7 & , & 5 \\ & & 3 & 3 & , & 8 \\ + & & 5 & 0 & , & 1 \\ \hline & 6 & 6 & 4 & , & 5 \end{array}$$

- Portanto, ele consumiu 664,5 kcal e respeitou a orientação da nutricionista.

Subtração de decimais

Para subtrair números decimais, usamos um processo semelhante ao da adição:

1. Escreva os números, um em cima do outro, **alinhando as vírgulas**.
2. Preencha os números com zeros à direita, depois da vírgula, para que todos tenham a mesma quantidade de casas decimais.
3. Subtraia os números usando o algoritmo de subtração já conhecido.

Exemplo

Calcule 5,75 − 3,14.

Passo 1: Escrevemos os números, um em cima do outro. Passo 2: Os números já têm a mesma quantidade de casas decimais. Passo 3: Completamos a subtração.

$$\begin{array}{ccccc} & 5 & , & 7 & 5 \\ - & 3 & , & 1 & 4 \\ \hline & 3 & , & 6 & 1 \end{array}$$

Exemplo

Calcule 2,5 − 1,33.

Passo 1: Escrevemos os números, um em cima do outro. Passo 2: Igualamos a quantidade de casas decimais. Passo 3: Completamos a subtração.

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & , & 54 & 0^{1}0 \\ - & 1 & , & 3 & 3 \\ \hline & 1 & , & 1 & 7 \end{array}$$

Exemplo

Calcule 7,113 − 0,88.

Passo 1: Escrevemos os números, um em cima do outro. Passo 2: Igualamos a quantidade de casas decimais. Passo 3: Completamos a subtração.

$$\begin{array}{cccccc} & 76 & , & 10^{1}0 & 1^{1}1 & 3 \\ - & 0 & , & 8 & 8 & 0 \\ \hline & 6 & , & 2 & 3 & 3 \end{array}$$

Exercício

Calcule:

- 4,3 − 2,1 = 2,2
- 70 − 8,5 = 61,5
- 2,7 − 0,32 = 2,38
- 0,9 − 0,086 = 0,814
- 0,03 − 0,0095 = 0,0205

Problema

Em um dia de folga, Godofredo não prestou tanta atenção ao controle calórico dos alimentos e ficou preocupado em ter desrespeitado a orientação de sua nutricionista de que deveria consumir 2200 kcal por dia.

Ao fim do dia, Godofredo fez as contas e concluiu ter consumido 442,7 kcal no café da manhã, 731,3 kcal no almoço, 315,9 kcal no café da tarde e 681,3 kcal na janta.

Quantas quilocalorias faltaram para Godofredo atingir a recomendação diária de consumo dada por sua nutricionista?

- Somando os valores calóricos de cada refeição, obtemos o valor calórico total do dia.

$$442{,}7 + 731{,}3 + 315{,}9 + 681{,}3 = 2\,171{,}2 \text{ kcal}$$

- Subtraindo esse valor da quantidade máxima de quilocalorias que ele deveria consumir num dia, obtemos quantas calorias ele consumiu a menos que a recomendação diária.

$$\begin{array}{ccccccc} & 2 & 21 & 0^{1}09 & 0^{1}09 & , & 0^{1}0 \\ - & 2 & 1 & 7 & 1 & , & 2 \\ \hline & 0 & 0 & 2 & 8 & , & 8 \end{array}$$

- Portanto, ele consumiu 28,8 kcal a menos do que a recomendação diária dada por sua nutricionista.

Mês da Matemática
Aula 7: Operações com Números Decimais
Parte 3

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso

Curso Exato

Multiplicação

Para multiplicar números decimais, devemos seguir os seguintes passos:

1. Multiplicar os números normalmente, ignorando as casas decimais.
2. Colocar a vírgula no produto.
   - O número de casas decimais do produto será igual à soma do número de casas decimais dos fatores.

Exemplo

Multiplique 0,03 por 1,1:

1. Multiplicar os números normalmente, ignorando as casas decimais.
   - $3 \times 11 = 33$
2. Colocar a vírgula no produto.
   - 0,03: duas casas decimais
   - 1,1: uma casa decimal
   - Número de casas decimais do produto: três casas decimais $\Rightarrow$ 0,033

$\boxed{0{,}03 \times 1{,}1 = 0{,}033}$

Exemplo

Multiplique 0,3 por 2,13:

1. Multiplicar os números normalmente, ignorando as casas decimais.
   - $3 \times 213 = 639$
2. Colocar a vírgula no produto.
   - 0,3: uma casa decimal
   - 2,13: duas casas decimais
   - Número de casas decimais do produto: três casas decimais $\Rightarrow$ 0,639

$\boxed{0{,}3 \times 2{,}13 = 0{,}639}$

É importante entender por que o passo 1 nos permite ignorar as casas decimais. Neste passo os números decimais são transformados em inteiros.

Fazemos isso deslocando a vírgula para:

- Direita: equivalente a multiplicar o número por 10.
- Esquerda: equivalente a dividir o número por 10.

Já no passo 2, para achar o valor correto da multiplicação, é preciso reverter os deslocamentos feitos com a vírgula.

Original	→	1º deslocamento	→	2º deslocamento	→	3º deslocamento
0,33 × 1,1		3,3 × 1,1		33× 1,1		33 × 11

Realizamos a multiplicação normalmente: $33 \times 11 = 33$

Devemos, então, desfazer os deslocamentos que fizemos anteriormente.

3º deslocamento	→	2º deslocamento	→	1º deslocamento	→	Produto
33,		3,3		0,33		0,033

Exemplo

Realize as seguintes multiplicações:

- $0,25 \times 0,2 = 0,05$
- $0,3 \times 2,13 = 0,639$
- $1,75 \times 4 = 7$
- $9,3 \times 12 = 111,6$
- $102 \times 0,22 = 22,44$

Divisão

Existem dois casos de divisões envolvendo números decimais:

- Divisão de número decimal por número inteiro.
- Divisão em que o divisor é um número decimal.

Para realizar a divisão de número decimal por número inteiro seguimos os seguintes passos:

1. Realizamos a divisão normalmente ignorando a vírgula.
2. Ajustamos a vírgula no resultado da divisão.
   - Deslocamos a vírgula do resultado para a esquerda (*divisão por 10*) um número de casas igual ao número de casas decimais do dividendo.

Exemplo

Divida 9,1 por 7:

1. Realizar a divisão normalmente ignorando a vírgula.
   - $91 \div 7 = 13$
2. Ajustar a vírgula no resultado da divisão.
   - 9,1: uma casa decimal
   - Deslocamento da vírgula para esquerda: uma casa

$$\boxed{9{,}1 \div 7 = 1{,}3}$$

Exemplo

Divida 14,6 por 8:

1. Realizar a divisão normalmente ignorando a vírgula.
   - $146 \div 8 = 18{,}25$
2. Ajustar a vírgula no resultado da divisão.
   - 14,6: uma casa decimal
   - Deslocamento da vírgula para esquerda: uma casa

$$\boxed{14,6 \div 8 = 1{,}825}$$

Quando o divisor é um número decimal devemos:

1. Transformar o divisor em um número inteiro.
   - Desloca-se a vírgula para a direita (*multiplicação por 10*), igualmente, no dividendo e no divisor.
2. Realizar a divisão normalmente.

Exemplo

Divida 6,4 por 0,4:

1. Transformar o divisor em um número inteiro.
   - $6{,}4 \div 0{,}4 = 64 \div 4$
2. Realizar a divisão normalmente.

$64 \div 4 = 16 \Rightarrow \boxed{6,4 \div 0,4 = 16}$

Exemplo

Divida 5,39 por 1,1:

1. Transformar o divisor em um número inteiro.
   - $5{,}39 \div 1{,}1 = 53{,}9 \div 11$
2. Realizar a divisão normalmente.

   $53{,}9 \div 11$

   1. Realizar a divisão normalmente ignorando a vírgula.

      $539 \div 11 = 49$
   2. Ajustar a vírgula no resultado da divisão.
      - 53,9: uma casa decimal
      - Deslocamento da vírgula para esquerda: uma casa $\Rightarrow$ 4,9

   $53{,}9 \div 11 = 4{,}9 \Rightarrow \boxed{5{,}39 \div 1{,}1 = 4{,}9}$

Exercício

Realize as seguintes divisões:

- $31,12 \div 0,4 = 77,8$
- $0,522 \div 1,74 = 0,3$
- $15,91 \div 2,5 = 6,364$
- $3,67 \div 1,5 \approx 2,447$
- $7,31 \div 4,3 = 1,7$

Mês da Matemática
Revisão: frações e números decimais

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso

Curso Exato

Frações

Conceitos básicos

Exercício

Nomeie as seguintes frações:

- $\frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ Três meios ou três metades
- $\frac{7}{4}$ $\Rightarrow$ Sete quartos
- $\frac{2}{7}$ $\Rightarrow$ Dois sétimos
- $\frac{15}{18}$ $\Rightarrow$ Quinze dezoito avos
- $\frac{12}{30}$ $\Rightarrow$ Doze trinta avos

Exercício

Nomeie as seguintes frações:

- $\frac{3}{1}$ $\Rightarrow$ Três inteiros
- $\frac{69}{10}$ $\Rightarrow$ Sessenta e nove décimos
- $\frac{6}{100}$ $\Rightarrow$ Seis centésimos
- $\frac{39}{1\,000}$ $\Rightarrow$ Trinta e nove milésimos
- $\frac{5}{100\,000}$ $\Rightarrow$ Cinco centésimos de milésimo

Frações equivalentes

Exercício

Determinar se cada par de frações a seguir é equivalente.

- $\frac{4}{2}$ e $\frac{12}{8}$ $\Rightarrow$ Não!
- $\frac{1}{3}$ e $\frac{9}{27}$ $\Rightarrow$ Sim!
- $\frac{5}{8}$ e $\frac{25}{40}$ $\Rightarrow$ Sim!
- $\frac{10}{4}$ e $\frac{42}{12}$ $\Rightarrow$ Não!
- $\frac{6}{10}$ e $\frac{15}{25}$ $\Rightarrow$ Sim!

Exercício

Para cada uma das frações a seguir, encontrar uma fração equivalente com denominador 100.

- $\frac{1}{2} = \frac{?50}{100}$
- $\frac{3}{4} = \frac{?75}{100}$
- $\frac{4}{5} = \frac{?80}{100}$
- $\frac{3}{10} = \frac{?30}{100}$
- $\frac{18}{25} = \frac{?72}{100}$

Denominadores comuns

Exercício

Comparar as frações a seguir, preenchendo as lacunas com $>$, $<$ ou $=$.

- $\frac{2}{3}$ --- $\frac{3}{4}$
- $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$
- $\frac{5}{8}$ --- $\frac{7}{10}$
- $\frac{5}{8} < \frac{7}{10}$
- $\frac{5}{6}$ --- $\frac{3}{5}$
- $\frac{5}{6} > \frac{3}{5}$
- $\frac{14}{9}$ --- $\frac{5}{3}$
- $\frac{14}{9} < \frac{5}{3}$
- $\frac{9}{24}$ --- $\frac{21}{56}$
- $\frac{9}{24} = \frac{21}{56}$
- $\frac{5}{18}$ --- $\frac{9}{24}$
- $\frac{5}{18} < \frac{9}{24}$

Simplificação de frações

Exercício

Simplificar cada fração a seguir.

- $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
- $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$
- $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$
- $\frac{18}{42} = \frac{3}{7}$
- $\frac{24}{108} = \frac{2}{9}$
- $\frac{765}{315} = \frac{17}{7}$

Adição/subtração de frações

Exercício

Efetue as operações a seguir. Não esqueça de simplificar o resultado quando possível.

- $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{5}{4}$
- $\frac{1}{10} + \frac{2}{10} = \frac{3}{10}$
- $\frac{7}{15} - \frac{4}{15} = \frac{1}{5}$
- $\frac{13}{27} + \frac{41}{27} = 2$
- $\frac{34}{25} - \frac{19}{25} = \frac{3}{5}$

Exercício

Efetue as operações a seguir. Não esqueça de simplificar o resultado quando possível.

- $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$
- $\frac{1}{10} + \frac{17}{80} = \frac{5}{16}$
- $\frac{16}{21} - \frac{3}{7} = \frac{1}{3}$
- $\frac{1}{77} + \frac{9}{11} = \frac{64}{77}$
- $\frac{17}{40} - \frac{1}{8} = \frac{3}{10}$

Exercício

Efetue as operações a seguir. Não esqueça de simplificar o resultado quando possível.

- $\frac{2}{9} - \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$
- $\frac{1}{8} + \frac{5}{12} = \frac{13}{24}$
- $\frac{21}{25} - \frac{3}{4} = \frac{9}{100}$
- $\frac{8}{15} + \frac{4}{13} = \frac{164}{195}$
- $\frac{13}{18} - \frac{5}{24} = \frac{37}{72}$

Problema

Jacqueline e seus amigos foram a uma doceria comemorar a volta às aulas e decidiram participar de uma competição que premiaria quem conseguisse comer a maior parte de uma torta. Ao fim do torneio, Jacqueline, a vencedora, comeu $\frac{7}{9}$ de uma torta e Jovanildo, em segundo lugar, conseguiu comer $\frac{9}{13}$ de outra. Que fração de torta Jacqueline comeu a mais que Jovanildo?

- Para encontrar a fração de torta que Jacqueline comeu a mais que Jovanildo, devemos subtrair $\frac{9}{13}$ de $\frac{7}{9}$.
- Começamos encontrando o MMC dos denominadores. O MMC de 13 e 9 é 117.

$$\frac{7}{9} \Rightarrow \frac{7 \times 13}{9 \times 13} = \frac{91}{117}$$
$$\frac{9}{13} \Rightarrow \frac{9 \times 9}{13 \times 9} = \frac{81}{117}$$
$$\Rightarrow \frac{7}{9} - \frac{9}{13} = \frac{91}{117} - \frac{81}{117} = \frac{10}{117}$$

- Portanto, Jacqueline comeu $\frac{10}{117}$ de torta a mais que Jovanildo.

Multiplicação/divisão de frações

Exercício

Efetue as operações a seguir. Simplifique o resultado quando possível.

- $\frac{2}{4} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$
- $\frac{2}{14} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{28}$
- $\frac{3}{25} \times \frac{10}{14} = \frac{3}{35}$
- $\frac{16}{18} \times \frac{10}{16} = \frac{5}{9}$
- $\frac{8}{15} \times \frac{13}{18} = \frac{52}{135}$

Exercício

Efetue as operações a seguir. Simplifique o resultado quando possível.

- $12 \div \frac{1}{2} = 24$
- $10 \div \frac{2}{10} = 50$
- $2 \div \frac{1}{4} = 8$
- $6 \div \frac{3}{6} = 12$
- $10 \div \frac{5}{8} = 16$
- $14 \div \frac{7}{5} = 10$

Exercício

Efetue as operações a seguir. Simplifique o resultado quando possível.

- $\frac{2}{3} \div \frac{7}{10} = \frac{20}{21}$
- $\frac{3}{4} \div \frac{5}{8} = \frac{6}{5}$
- $\frac{7}{9} \div \frac{8}{10} = \frac{35}{36}$
- $\frac{3}{10} \div \frac{2}{4} = \frac{3}{5}$
- $\frac{7}{8} \div \frac{2}{3} = \frac{21}{16}$
- $\frac{4}{5} \div \frac{9}{12} = \frac{16}{15}$

Problema

Em um dia de chuva pesada, Chimbinha e sua irmã decidiram verificar quanto de água eles conseguiam recolher da chuva. Para isso, eles colocaram doze recipientes de $\frac{7}{2}$ litros em uma área aberta, para receber a água. Se todos os recipientes encheram quatro vezes, quantos litros de água eles coletaram no total?

- Os doze recipientes, armazenam, juntos, um total de 42 litros de água.

$$12 \times \frac{7}{2} = \frac{12}{1} \times \frac{7}{2} = \frac{12 \times 7}{1 \times 2} = 42\ L$$

- Como todos os recipientes foram enchidos quatro vezes, o volume total de água coletado foi de 168 litros.

$$42 \times 4 = 168\ L$$

Problema

Godofredo conseguiu um novo emprego, como chefe dos garçons de um restaurante. Entre suas atribuições, estava a supervisão de todos os atendentes do estabelecimento, além da preparação dos horários referentes aos turnos de cada um.

Em um feriado movimentado, todos os garçons do restaurante trabalharam um total de $\frac{195}{2}$ horas. Se, no planejamento dos turnos de cada funcionário, Godofredo garantiu que cada um deles trabalharia o mesmo número de horas, quantas horas cada garçom trabalhou nesse feriado?

- Como cada um dos garçons trabalhou o mesmo número de horas, para descobrir o número de horas que cada um deles passou trabalhando no feriado, basta dividir o total de horas trabalhadas pelo número de garçons.

$$\frac{195}{2} \div 15 = \frac{195}{2} \times \frac{1}{15} = \frac{13}{2}\ \text{h}$$

- Portanto, cada garçom trabalhou $\frac{13}{2}$ horas nesse feriado.

Números decimais

Frações decimais

Exercício

Converta cada número decimal abaixo para sua respectiva fração decimal.

- $35 = \frac{35}{1}$
- $12{,}15 = \frac{1\,215}{100}$
- $2{,}081 = \frac{2\,081}{1\,000}$
- $2{,}90205 = \frac{290\,205}{100\,000}$
- $0{,}000002 = \frac{2}{1\,000\,000}$

Exercício

Converta cada fração decimal abaixo para seu respectivo número decimal.

- $\frac{17}{10} = 1{,}7$
- $\frac{35}{100} = 0{,}35$
- $\frac{2}{1\,000} = 0{,}002$
- $\frac{3\,154}{100\,000} = 0{,}003154$
- $\frac{19}{1\,000\,000} = 0{,}000019$

Ordenação

Exercício

Coloque os números em ordem crescente.

- 3,999 e 5,1 $\Rightarrow$ 3,999 $<$ 5,1
- 1,613 e 1,263 $\Rightarrow$ 1,263 $<$ 1,613
- 13,41 e 13,4004 $\Rightarrow$ 13,4004 $<$ 13,41
- 0,1499; 0,4 e 0,15 $\Rightarrow$ 0,1499 $<$ 0,15 $<$ 0,4
- 10,015; 10,00105 e 10,01001 $\Rightarrow$ 10,00105 $<$ 10,01001 $<$ 10,015

Adição/subtração de decimais

Exercício

Calcule:

- $2{,}3 + 7{,}1 = 9{,}4$
- $5{,}27 - 3{,}12 = 2{,}15$
- $0{,}321 + 3{,}58 = 3{,}901$
- $15 - 7{,}67 = 7{,}33$
- $0{,}2156 + 3{,}589 = 3{,}8046$

Exercício

Calcule:

- $3{,}382 + 3{,}618 = 7$
- $85{,}14 - 17{,}651 = 67{,}489$
- $76{,}19 + 6{,}39 = 82{,}58$
- $82 - 48{,}001 = 33{,}999$
- $93{,}72 - 31{,}060 = 62{,}66$

Problema

Coqueiros têm, em média, 7,6 metros de altura, enquanto mangueiras têm, em média, 3,4 metros a menos que os coqueiros.

Qual é a altura média de uma mangueira?

Qual é a soma das alturas das duas árvores, em média?

- Para encontrar a altura média de uma mangueira, basta subtrair 3,4 m de 7,6 m.

$$7{,}6 - 3{,}4 = 4{,}2 \text{ m}$$

Portanto, uma mangueira tem, em média, 4,2 metros de altura.

- Para encontrar a soma das alturas das duas árvores, somamos 7,6 m e 4,2 m.

$$7{,}6 + 4{,}2 = 13{,}8 \text{ m}$$

Assim, a soma das alturas das árvores é igual a 13,8 metros.

Problema

Godofredo costuma planejar muito bem seus gastos, tendo como hábito manter uma poupança com o que consegue guardar de dinheiro mensalmente. Ele guardou em sua poupança R$175,35 no mês de junho e R$132,50 no mês de julho. No final de julho, ele comprou uma bicicleta nova, por R$195,80.

Quantos reais, do que ele guardou em junho e julho, sobraram após a compra da bicicleta?

- Godofredo guardou um total de R$307,85 nos dois meses.

$$\text{R\$}175{,}35 + \text{R\$}132{,}50 = \text{R\$}307{,}85$$

- Descontando desse total o preço da bicicleta, descobrimos a quantidade restante de dinheiro após a compra.

$$\text{R\$}307{,}85 - \text{R\$}195{,}80 = \text{R\$}112{,}05$$

- Portanto, sobraram R$112,05 após a compra da bicicleta.

Multiplicação de decimais

Exercício

Calcule:

- $8 \times 0{,}3 = 2{,}4$
- $65 \times 3{,}9 = 253{,}5$
- $46 \times 1{,}5 = 69$
- $12 \times 0{,}65 = 7{,}8$
- $16 \times 0{,}47 = 7{,}52$

Exercício

Calcule:

- $9{,}5 \times 0{,}86 = 8{,}17$
- $0{,}35 \times 0{,}70 = 0{,}245$
- $47 \times 0{,}68 = 31{,}96$
- $0{,}24 \times 7{,}4 = 1{,}776$
- $0{,}423 \times 0{,}41 = 0{,}17343$

Problema

Godofredo, querendo economizar nas compras de começo de ano, montou uma tabela com o preço de alguns itens escolares, orçados em três lojas diferentes.

Preços

Item	Loja A	Loja B	Loja C
Caneta	R$1,15	R$1,25	R$1,10
Lápis	R$0,84	R$0,72	R$0,91
Caderno	R$5,27	R$5,51	R$5,48

Em qual loja ele obteria o menor preço, caso fosse comprar 4 canetas e 2 cadernos?

- Podemos fazer uma tabela representando o preço de 4 canetas, 2 lápis e o orçamento total do pedido feito por Godofredo, em cada uma das lojas.

Preços

Item	Loja A	Loja B	Loja C
4 canetas	R$4,60	R$5,00	R$4,40
2 cadernos	R$10,54	R$11,02	R$10,96
Total	R$15,14	R$16,02	R$15,36

- Portanto, ele obteria o menor preço comprando na loja A.

Divisão de decimais

Exercício

Calcule:

- $4 \div 0{,}5 = 8$
- $30 \div 0{,}3 = 100$
- $0{,}5 \div 4 = 0{,}125$
- $0{,}39 \div 0{,}3 = 1{,}3$
- $0{,}18 \div 0{,}2 = 0{,}9$

Exercício

Calcule:

- $1{,}64 \div 0{,}2 = 8{,}2$
- $7{,}02 \div 0{,}9 = 7{,}8$
- $11{,}88 \div 5{,}4 = 2{,}2$
- $35{,}4 \div 5{,}9 = 6$
- $0{,}5568 \div 0{,}58 = 0{,}96$

Problema

Godofredo abastece seu carro todos os finais de semana. No último domingo, vendo que seu carro estava quase sem gasolina, ele se dirigiu a um posto e completou o tanque, pagando por 48,2 litros de gasolina. No entanto, Godofredo, em seu desespero por não evitar ficar parado na estrada por pane seca, esqueceu de verificar o preço cobrado pelo litro naquele posto.

Considerando que o recibo do seu pagamento indicava um total de R$171,11, qual é o preço do litro de gasolina naquele posto?

- Para descobrir o preço de um litro de gasolina, basta dividir o preço total pago pelo número de litros comprados. Ou seja, devemos dividir 171,11 por 48,2.
- Para nos livrarmos das casas decimais na divisão, lembramos da propriedade que nos permite multiplicar o dividendo e o divisor pelo mesmo número, sem alterar o quociente.
- Assim, multiplicamos o dividendo e o divisor por 100, o que não altera o quociente. A nossa nova divisão é 17 111 por 4 820.
- O quociente entre 17 111 por 4 820 é igual a 3,55. Assim, cada litro de gasolina custa R$3,55 no posto.

Mês da Matemática
Aula 9: Conjuntos Numéricos e operações com números negativos

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso

Curso Exato

Conjuntos numéricos

- Qual a diferença entre 1 e $\frac{2}{3}$?
- Conjuntos: grupos de objetos que possuem algo semelhante.
  - Ex.: conjunto de pessoas que gostam de chocolate ou dos cachorros dálmatas de Campinas.
- Conjuntos numéricos: conjuntos compostos por números que possuem características semelhantes.

Números Naturais

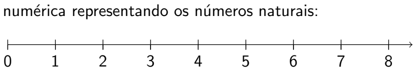
- Conjunto formado pelos números utilizados para contagem e para expressar ordenação.
- Representado pela letra $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

- Conjunto dos números naturais sem incluir o 0: $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

- Reta numérica representando os números naturais:

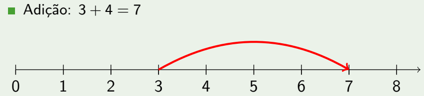


- Operações na reta numérica:
  - **Adição**: corresponde a andar um determinado número de unidades para a direita.
  - **Subtração**: corresponde a andar um determinado número de unidades para a esquerda.

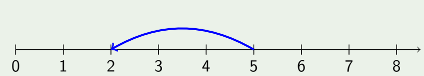
- Operações representadas na reta numérica:

Exemplo

- Adição: $3 + 4 = 7$



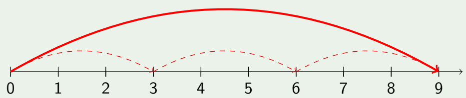
- Subtração: $5 - 3 = 2$



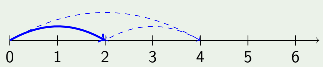
- Operações na reta numérica:

Exemplo

- Multiplicação: $3 \times 3 = 9$



- Divisão: $4 \div 2 = 2$

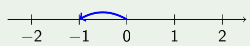


Números Inteiros

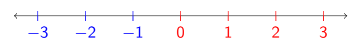
- O que acontece ao subtrair 1 de 0? Números Negativos

Exemplo

- $0 - 1 = -1$



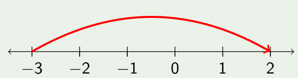
- Os números negativos podem representar a falta de algo.
  - Ex.: João estourou seu limite no banco em R$1000,00. O saldo de João no banco é de -1000 reais.
- Representação dos números negativos na reta numérica:



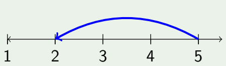
- Operações com números negativos:
  - Adição com números negativos e positivos.

Exemplo

- $(-3) + 5 = 2$



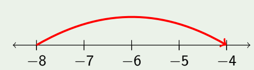
- $5 + (-3) = 5 - 3 = 2$



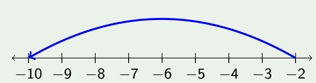
- Operações com números negativos:
  - Adição de número negativo com número positivo.

Exemplo

- $(-8) + 4 = -4$



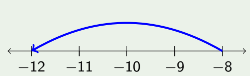
- $(-2) + (-8) = -2 - 8 = -10$



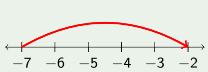
- Operações com números negativos:
  - Subtração de número negativo com número positivo.

Exemplo

- $-8 - (+4) = -8 - 4 = -12$



- $(-7) - (-5) = -7 + 5 = -2$



Exercício

Resolva as seguintes operações:

- $-1 - 3 = -4$
- $0 - 4 = -4$
- $-4 + 7 = 3$
- $1 - 2 = -1$
- $3 + 4 = 7$
- $1 - 5 = -4$
- $-3 - 4 = -7$
- $-10 + 4 = -6$

- Multiplicação e divisão com números negativos:
  1. Resolver o sinal.
  2. Efetuar a operação normalmente atribuindo o sinal resultante.

Exemplo

$2 \times (-1) = (+2) \times (-1) = -2$

$(-4) \div (-2) = (-4) \div (-2) = +2 = 2$

$(-7) \times 7 = (-7) \times (+7) = +49 = 49$

1. Resolver o sinal.
   - Regra dos Sinais:

$$(+) \times (+) = (+) \quad \text{ou} \quad (+) \div (+) = (+)$$
$$(+) \times (-) = (-) \quad \text{ou} \quad (+) \div (-) = (-)$$
$$(-) \times (+) = (-) \quad \text{ou} \quad (-) \div (+) = (-)$$
$$(-) \times (-) = (+) \quad \text{ou} \quad (-) \div (-) = (+)$$

   - Sinais iguais $\Rightarrow$ Resultado é positivo.
   - Sinais diferentes $\Rightarrow$ Resultado é negativo.

2. Efetuar a operação normalmente atribuindo o sinal resultante.
   - Realizar operação normalmente, desconsiderando o sinal.
   - Atribuir sinal correto ao resultado da operação.

Exemplo

$(-10) \times (-3)$

1. Resolver o sinal.

$$(-) \times (-) = (+)$$

Sinal do resultado: positivo.

2. Atribuir sinal correto ao resultado da operação.
   - Realizar operação normalmente, desconsiderando o sinal.

$$10 \times 3 = 30$$

   - Atribuir sinal correto ao resultado da operação.

$$(-10) \times (-3) = 30$$

Exemplo

$(-44) \times 4$

1. Resolver o sinal.

$$(-) \div (+) = (-)$$

Sinal do resultado: negativo.

2. Atribuir sinal correto ao resultado da operação.
   - Realizar operação normalmente, desconsiderando o sinal.

$$44 \div 4 = 11$$

   - Atribuir sinal correto ao resultado da operação.

$$(-44) \div 4 = -11$$

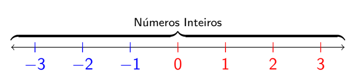
Exercício

Resolva as seguintes operações:

- $(-3) \times 5 = -15$
- $15 \div (-3) = -5$
- $(-9) \times 7 = -63$
- $121 \div (-11) = -11$
- $(-4) \times (-6) = 24$
- $(-96) \div (-6) = 16$
- $(-9) \times (-12) = 108$
- $(-50) \div (-25) = 2$
- $(-80) \times (-52) = 4160$

- O conjunto dos números inteiros é representados pela letra $\mathbb{Z}$.
- Os inteiros são tilizados para contagem num sentido mais amplo: além de expressar a existência de algo, também atestam sua falta.

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$



Números Racionais

- Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$):
  - Expandem os números inteiros adicionando a noção de partes de um todo.
  - São números racionais:
    - todos os números inteiros;
    - todas as frações;
    - todos os decimais exatos;
    - todas as dízimas periódicas.

- Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$):
  - Listar todos os racionais não é uma tarefa trivial. Por isso, vamos descrevê-los se utilizando de uma propriedade:

$$\mathbb{Q} = \{\tfrac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0\}$$

Exemplo

- $\frac{3}{4}$
- $-\frac{2}{5}$
- $0{,}3$
- $-0{,}5$
- $0{,}3333...$
- $-0{,}22222...$

- Operações com números racionais ($\mathbb{Q}$):
  - Análogas às operações com números inteiros ($\mathbb{Z}$)

Exemplo

- $\frac{3}{4} + \left(-\frac{5}{4}\right) = -\frac{1}{4}$
- $-\frac{2}{5} - \left(-\frac{3}{6}\right) = -\frac{12}{30} + \frac{15}{30} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$
- $0{,}3 + (-0{,}5) = -0{,}2$
- $-0{,}5 - (-0{,}4) = -0{,}5 + 0{,}4 = 0{,}1$
- $0{,}2 \times (-0{,}4) = -0{,}08$
- $\frac{3}{5} \div \left(-\frac{7}{10}\right) = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{10}{7}\right) = -\frac{30}{35} = -\frac{6}{7}$

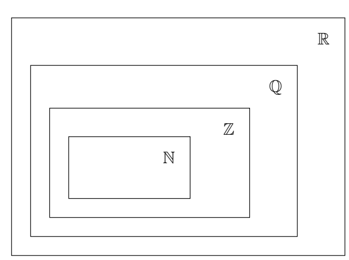
Irracionais

- Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$):
  - Conjunto formado por decimais com infinitas casas decimais e que **não são dízimas periódicas.** Ou seja: é impossível encontrar, em sua representação decimal, um *período* que se repete indefinidamente.
  - Alguns irracionais famosos são: π (3,14159...), que está ligado a medidas em círculos e a razão áurea ($\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}61803...$), símbolo de beleza e harmonia.

Números Reais

- Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$):
  - Englobam tanto os racionais como os irracionais.
  - São todos os números que podem ser utilizados para medição.

Representação gráfica dos conjuntos numéricos



Onde ficam os irracionais nesse diagrama?

Mês da Matemática
Aula 10: Potenciação

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso

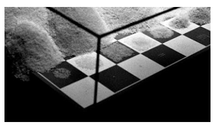
Curso Exato

Para explicar as regras ao Rei, o inventor do jogo de xadrez pediu seu pagamento em grãos de arroz.

Ele receberia um grão pela primeira casa do tabuleiro e para cada uma das demais casas ele ganharia o dobro da quantidade de grãos da casa anterior.

Você consegue calcular quantos grãos de arroz ele receberia pela 20ª casa?

E pela última casa do tabuleiro, a 64ª?



Definição

Sabemos que podemos representar $2+2+2+2$ como:

$$2+2+2+2 = 2\times 4 = 16$$

Chamamos a esta operação de **multiplicação**.

Como podemos então representar $2\times 2\times 2\times 2$?

Representamos da seguinte forma:

$$2\times 2\times 2\times 2 = 2^4 = 16$$

chamamos a esta operação de **potenciação**.

Definição

Potenciação é uma operação que consiste na multiplicação de uma base b por ela mesma n vezes. O número n é chamado de expoente.

$$b^n = \underbrace{b\times\cdots b}_{\text{n vezes}}$$

- $5^1 = 5$
- $2\times 2\times 2 = 2^3 = 8$
- $3\times 3\times 3\times 3 = 3^4 = 81$

Nomenclatura

2^3 pode ser chamado de:

- 2 elevado a **terceira potência**;
- 2 elevado a 3;
- 2 elevado ao **cubo**.

Números pequenos:

$\boxed{27 \text{ em vez de } 3^3.}$

Números grandes:

$\boxed{371\,293 \text{ em vez de } 13^5}$

Exemplo

- Qual a base de 7^4? 7
- 5 é o expoente de 2^5
- Calcule 2^5: $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

Propriedades da Potenciação

Multiplicação

Sabemos que 2^7 pode ser escrito como:

$$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

Podemos perceber que:

$$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$2^7 = 2^3 \times 2^4$$

ou

$$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$
$$2^7 = 2^5 \times 2^2$$

Temos então que:

$$\boxed{2^7 = 2^3 \times 2^4 = 2^5 \times 2^2}$$

Portanto, qual o resultado da multiplicação $3^3 \times 3^2$?

Regra

Na multiplicação de potências de mesma base repete-se a base e somam-se os expoentes.

- $2^3 \times 2^4 = 2^{(3+4)} = 2^7 = 128$
- $3^2 \times 3^8 = 3^{(2+8)} = 3^{10} = 59\,049$

Caso especial:

- Multiplicação de potências de base diferentes com expoentes iguais:
  - Multiplicam-se as bases e mantém-se o expoente

Exemplo

- $2^4 \times 4^4 = (2 \times 4)^4 = 8^4 = 4\,096$
- $5^2 \times 7^2 = (5 \times 7)^2 = 35^2 = 1\,225$

Para o caso geral, não há uma regra específica e as potenciações devem ser feitas separadamente e então multiplicadas:

Exemplo

- $2^3 \times 3^4 = 8 \times 81 = 648$

Divisão

Assim como na multiplicação, temos que:

$$\frac{2^6}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

Portanto, qual o resultado da divisão $\frac{3^8}{3^5}$?

Regra

Na divisão de potências de mesma base repete-se a base e subtraem-se os expoentes.

- $\frac{2^4}{2^3} = 2^{4-3} = 2^1 = 2$
- $\frac{3^8}{3^2} = 3^{8-2} = 3^6 = 729$

Caso especial:

- Divisão de potências de base diferentes com expoentes iguais:
  - Dividem-se as bases e mantém-se o expoente.

Exemplo

- $\frac{6^2}{3^2} = \left(\frac{6}{3}\right)^2 = 2^2 = 4$
- $\frac{5^4}{10^4} = \left(\frac{5}{10}\right)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}$

Para o caso geral, não há uma regra específica e as potenciações devem ser feitas separadamente e então divididas:

Exemplo

- $\frac{6^3}{3^2} = \frac{216}{9} = 24$

Regra

Todo número elevado ao expoente 0 (zero) é igual a 1.

Podemos ver isso utilizando a propriedade da multiplicação. Qual o resultado da divisão $\frac{2^3}{2^3}$?

$$1 = \frac{2^3}{2^3} = 2^{3-3} = 2^0$$

Potência de Potência

Temos da propriedade da multiplicação que:

$$\boxed{(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3 = 2^{3\times 2} = 2^6 = 64}$$

Qual o valor de $(3^2)^2$?

Regra

Na **potência de potência** repete-se a base e multiplicam-se os expoentes.

- $(3^3)^2 = 3^{3\times 2} = 3^6 = 729$
- $(4^2)^2 = 4^{(2\times 2)} = 4^4 = 256$

Atenção:

$$(2^2)^3 \text{ é diferente de } 2^{2^3}$$

Na primeira utiliza-se a **regra de potência de potência**:

$$(2^2)^3 = 2^{2\times 3} = 2^6 = 64$$

No segundo caso, resolvemos as potenciações **de cima para baixo**:

$$2^{2^3} = 2^8 = 256$$

Potenciação com frações e decimais

Potenciação com frações ou decimais é similar à mesma operação com números inteiros:

- $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$
- $(0{,}1)^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1^3}{10^3} = \frac{1}{1\,000} = 0{,}001$

Propriedades

As propriedades de potenciação de números inteiros são mantidas para as operações com números decimais e frações:

- Multiplicação: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = {\frac{2}{3}}^{5} = \frac{32}{283}$
- Divisão: $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = {\frac{1}{2}}^{(5-3)} = {\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1}{4}$
- Potência de Potência: $\left(\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)^3 = {\frac{4}{3}}^{(2\times 3)} = {\frac{4}{3}}^{6} = \frac{4\,096}{729}$

Potenciação com números negativos

Base Negativa

Quando apenas a base é negativa, realiza-se a potenciação normalmente:

- $(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27$
- $(-4)^4 = (-4) \times (-4) \times (-4) \times (-4) = 256$
- $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{32}$

Atenção: O sinal de negativo $(-)$ somente fará parte da potenciação quando estiver entre parênteses.

- $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$
- $-3^2 = -3 \times 3 = -9$

Expoente Negativo

Qual o resultado da divisão $\frac{2^3}{2^6}$?

$$\frac{2^3}{2^6} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

Pela propriedade da divisão, temos que:

$$\frac{2^3}{2^6} = 2^{(3-6)} = 2^{-3}$$

Assim, temos que:

$$\boxed{2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3}$$

Regra

Na **potenciação com expoente negativo** inverte-se a base e eleva-se ao expoente com o sinal oposto.

- $3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$
- $2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

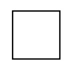
Mês da Matemática
Aula 11: Radiciação

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso

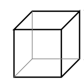
Curso Exato

Motivação

- Na aula anterior:

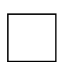


$\} 2 \Rightarrow \text{Area} = \text{Lado} \times \text{Lado} = 2^2$



$\} 2 \Rightarrow \text{Volume} = \text{Lado} \times \text{Lado} \times \text{Lado} = 2^3$

- Suponha:



Área $= 9$

$\Downarrow$

Qual é o Lado?

$\boxed{\text{Radiciação!}}$

Raízes Especiais

Raiz Quadrada

Definição

A raiz quadrada de um número a, representada por $\sqrt[2]{a}$ ou $\sqrt{a}$, é o número **positivo** r tal que $r^2 = a$.

Na radiciação $\sqrt[2]{a}$, a é chamado de *radicando* e 2 é o *índice*.

- $\sqrt{16} = 4$
- $\sqrt{121} = 11$
- $\sqrt{2} \approx 1{,}41$

- Representação Padrão da Raiz Quadrada

$$\sqrt{4} \text{ ou } \sqrt[2]{4}$$

De Forma Geral: $\sqrt{a}$ ou $\sqrt[2]{a}$, a um número

- Representação com Expoente Fracionário

$$\sqrt{4} = \sqrt[2]{4^1} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

De Forma Geral: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, a um número

Exemplos

- $\sqrt{9} = \sqrt[2]{3^2} = 3^{\frac{2}{2}} = 3^1 = 3$
- $\sqrt{100} = \sqrt[2]{10^2} = 10^{\frac{2}{2}} = 10^1 = 10$
- $\sqrt{169} = \sqrt[2]{13^2} = 13^{\frac{2}{2}} = 13^1 = 13$
- $\sqrt{7} = \sqrt[2]{7^1} = 7^{\frac{1}{2}} \approx 2{,}65$
- $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}} = 3 \times 3^{\frac{1}{2}} \approx 5{,}20$

Raiz Cúbica

Definição

A raiz cúbica de um número a, representada por $\sqrt[3]{a}$, é o número r tal que $r^3 = a$.

Novamente, a é o *radicando* e 3 é o *índice*.

- $\sqrt[3]{8} = 2$
- $\sqrt[3]{64} = 4$
- $\sqrt[3]{100} \approx 4{,}64$

- Representação Padrão da Raiz Cúbica

$$\sqrt[3]{4};\ \sqrt[3]{27};\ \sqrt[3]{100}$$

De Forma Geral: $\sqrt[3]{a}$, a um número

Se o índice for diferente de 2, este deve ser explicitado.

- Representação com Expoente Fracionário

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8^1} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$$

De Forma Geral: $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, a um número

Exemplos

- $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5^{\frac{3}{3}} = 5^1 = 5$
- $\sqrt[3]{1331} = \sqrt[3]{11^3} = 11^{\frac{3}{3}} = 11^1 = 11$
- $\sqrt[3]{729} = \sqrt[3]{9^3} = 9^{\frac{3}{3}} = 9^1 = 9$
- $\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{12^1} = 12^{\frac{1}{3}} \approx 2{,}29$
- $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}} = 2 \times 2^{\frac{2}{3}} \approx 3{,}17$

Demais Raízes

Raízes com Índice Par

Índice 4

- $\sqrt[4]{16} = 2$
- $\sqrt[4]{81} = 3$
- $\sqrt[4]{256} = 4$
- $\sqrt[4]{625} = 5$

Índice 6

- $\sqrt[6]{64} = 2$
- $\sqrt[6]{729} = 3$
- $\sqrt[6]{4096} = 4$
- $\sqrt[6]{15625} = 5$

Índice 8

- $\sqrt[8]{256} = 2$
- $\sqrt[8]{6561} = 3$
- $\sqrt[8]{65536} = 4$
- $\sqrt[8]{390625} = 5$

De Forma Geral: $\sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}}$, a e b são números e b é par e positivo

- Representação Padrão de Raízes com Índice Par

$$\sqrt[4]{625};\ \sqrt[6]{729};\ \sqrt[8]{65536}$$

De Forma Geral: $\sqrt[b]{a}$, a, b são números e b é par

- Representação com Expoente Fracionário

$$\sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{729^1} = 729^{\frac{1}{6}} = 3$$

De Forma Geral: $\sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}}$, a, b são números e b é par

Exemplos

- $\sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3^{\frac{6}{6}} = 3^1 = 3$
- $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2^{\frac{4}{4}} = 2^1 = 2$
- $\sqrt[8]{390625} = \sqrt[8]{5^8} = 5^{\frac{8}{8}} = 5^1 = 5$
- $\sqrt[4]{73} = \sqrt[4]{73^1} = 73^{\frac{1}{4}} \approx 2{,}98$
- $\sqrt[8]{1000000} = \sqrt[8]{10^6} = 10^{\frac{6}{8}} = 10^{\frac{3}{4}} \approx 5{,}62$

Raízes com Índice Ímpar

Índice 5

- $\sqrt[5]{32} = 2$
- $\sqrt[5]{243} = 3$
- $\sqrt[5]{1024} = 4$
- $\sqrt[5]{3125} = 5$

Índice 7

- $\sqrt[7]{128} = 2$
- $\sqrt[7]{2187} = 3$
- $\sqrt[7]{16384} = 4$
- $\sqrt[7]{78125} = 5$

Índice 9

- $\sqrt[9]{512} = 2$
- $\sqrt[9]{19683} = 3$
- $\sqrt[9]{262144} = 4$
- $\sqrt[9]{1953125} = 5$

De Forma Geral: $\sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}}$, a e b são números e b é ímpar e positivo

- Representação Padrão de Raízes com Índice Ímpar

$$\sqrt[5]{243};\ \sqrt[7]{78125};\ \sqrt[9]{262144}$$

De Forma Geral: $\sqrt[b]{a}$, a, b são números e b é ímpar

- Representação com Expoente Fracionário

$$\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{243^1} = 243^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{5}{5}} = 3$$

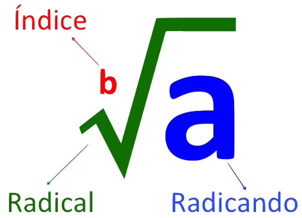
De Forma Geral: $\sqrt[b]{a} = a^{\frac{1}{b}}$, a, b são números e b é ímpar

Exemplos

- $\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{4^5} = 4^{\frac{5}{5}} = 4^1 = 4$
- $\sqrt[9]{19683} = \sqrt[9]{3^9} = 3^{\frac{9}{9}} = 3^1 = 3$
- $\sqrt[7]{78125} = \sqrt[7]{5^7} = 5^{\frac{7}{7}} = 5^1 = 5$
- $\sqrt[7]{121} = \sqrt[7]{11^2} = 11^{\frac{2}{7}} \approx 1{,}98$
- $\sqrt[5]{1000000} = \sqrt[5]{10^6} = 10^{\frac{6}{5}} = 10 \times 10^{\frac{1}{5}} \approx 15{,}85$

Propriedades e Operações

- Elementos de uma raiz



Produto

Regra do Produto

No **produto de raízes com mesmo índice** multiplica-se os radicandos e mantém-se o índice.

- $\sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{3 \times 2} = \sqrt{6} \approx 2{,}45$
- $\sqrt{7} \times \sqrt{5} = \sqrt{7 \times 5} = \sqrt{35} \approx 5{,}92$
- $\sqrt{4} \times \sqrt{4} = \sqrt{4 \times 4} = \sqrt{16} = 4$

Caso Geral: $\sqrt[k]{a} \times \sqrt[k]{c} = \sqrt[k]{a \times c}$

Motivação

Cálculo de raízes de números grandes através da decomposição de números e da propriedade de multiplicação.

Sabendo que $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ e que $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}44$, calcule:

- $\sqrt{27} = \sqrt{3^3} = 3^{\frac{3}{2}} = 3 \times \sqrt{3} \approx 5{,}19$
- $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3 \times 8} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{3} \times 2 = 2{,}88$
- $\sqrt{108} = \sqrt{27 \times 4} = \sqrt{3^3} \times 2 = 3^{\frac{3}{2}} \times 2 = 3 \times \sqrt{3} \times 2 = 10{,}38$
- $\sqrt[3]{3000} = \sqrt[3]{3 \times 10^3} = \sqrt[3]{3} \times 10 \approx 17{,}3$

Divisão

- Sabemos que:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}}$$

- Aplicando esta propriedade:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{4^{\frac{1}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

Regra da Divisão

Na **divisão de raízes com mesmo índice** dividem-se os radicandos e mantém-se o índice.

- $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$
- $\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{4}} = \sqrt{\frac{144}{4}} = \sqrt{36} = 6$
- $\frac{\sqrt{77}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{77}{11}} = \sqrt{\frac{7 \times 11}{11}} = \sqrt{7} \approx 2{,}65$

Caso Geral: $\sqrt[k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}$, a,b e k são números

Motivação

Cálculo da raiz de números decimais através da decomposição de números e da propriedade de divisão.

Sabendo que $\sqrt{2} \approx 1{,}41$ e que $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}71$, calcule:

- $\sqrt{0{,}18} = \sqrt{\frac{18}{100}} = \sqrt{\frac{2\times 9}{100}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{9}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{2}\times 3}{10} = 0{,}425$
- $\sqrt[3]{0{,}135} = \sqrt[3]{\frac{135}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{5\times 27}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{\sqrt[3]{5}\times 3}{10} = 0{,}513$
- $\sqrt{0{,}72} = \sqrt{\frac{72}{100}} = \frac{\sqrt{36\times 2}}{\sqrt{100}} = \frac{6\times\sqrt{2}}{10} = 0{,}846$
- $\sqrt[3]{0{,}04} = \sqrt[3]{\frac{4}{100}} = \sqrt[3]{\frac{40}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{8\times 5}}{\sqrt[3]{1000}} = \frac{2\times\sqrt[3]{5}}{10} = 0{,}342$

Potenciação

- Sabemos que:

$$\boxed{\left(a^k\right)^i = a^{k\times i}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\sqrt{27}\right)^3 = \left(27^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 27^{\frac{3}{2}} = \sqrt{27^3} = 27 \times \sqrt{27}$$
$$= 27 \times \sqrt{9 \times 3} = 27 \times \sqrt{9} \times \sqrt{3}$$
$$\approx 140{,}3$$

Regra da Potenciação

Na **potenciação de raízes** eleva-se o radicando ao expoente e mantém-se o índice.

- $(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3^4} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9$
- $(\sqrt[3]{7})^6 = \sqrt[3]{7^6} = 7^{\frac{6}{3}} = 7^2 = 49$
- $(\sqrt[6]{25})^4 = \sqrt[6]{25^4} = \sqrt[6]{(5^2)^4} = \sqrt[6]{5^8} = 5^{\frac{8}{6}} = 5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{625} \approx 8{,}55$

Caso Geral: $\left(\sqrt[k]{a}\right)^i = \sqrt[k]{a^i}$, a, k e i são números

Exemplo

- $(\sqrt{11})^2 = \sqrt{11^2} = 11^{\frac{2}{2}} = 11$
- $(\sqrt[3]{8})^4 = \sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{(2^3)^4} = 2^{\frac{12}{3}} = 2^4 = 16$
- $(\sqrt[3]{9})^6 = \sqrt[3]{(9)^6} = \sqrt[3]{(3^2)^6} = \sqrt[3]{3^{12}} = 3^{\frac{12}{3}} = 3^4 = 81$
- $(\sqrt[4]{25})^3 = \sqrt[4]{25^3} = \sqrt[4]{(5^2)^3} = \sqrt[4]{5^6} = \sqrt[2]{5^3} \approx 11{,}18$
- $(\sqrt[5]{0{,}72})^4 = \sqrt[5]{(0{,}72)^4} = \sqrt[5]{\frac{72^4}{100^4}} = \sqrt[5]{\frac{(2^3\times 3^2)^4}{(10^2)^4}} = \frac{\sqrt[5]{2^{12}} \times \sqrt[5]{3^8}}{\sqrt[5]{10^8}} \approx 0{,}77$

Radiciação

- Sabemos que:

$$\boxed{\left(a^k\right)^i = a^{k\times i}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{\sqrt{32}} = \left(\sqrt{32}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(32^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 32^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}$$
$$= 32^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{32}$$
$$= 2^{\frac{5}{4}} = 2 \times \sqrt[4]{2} \approx 2{,}38$$

Regra da Radiciação

Na **radiciação de raízes** multiplicam-se o os indíces e mantém-se o radicando.

- $\sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[2\times 2]{2} = \sqrt[4]{2} = 1{,}19$
- $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2\times 3]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$
- $\sqrt{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3\times 2]{9} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[3]{3} \approx 1{,}44$

Caso Geral: $\sqrt[i]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[i\times k]{a}$, a, k e i são números

Mudança de Índice

- Sabemos que:

$$\boxed{\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}} \text{ e } \frac{1}{4}=\frac{2}{8}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{2}{8}}=\sqrt[8]{2^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt[4]{2}=\sqrt[4\times2]{2^{1\times2}}=\sqrt[8]{2^2}$$

Regra da Mudança de Índice

Para alterar o índice de uma raiz basta multiplica ou dividir o índice e o expoente do radicando pelo mesmo número

- $\sqrt{2}$ para índice 6 $\Rightarrow \sqrt{2}=\sqrt[2\times3]{2^{1\times3}}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[6]{8}$
- $\sqrt[3]{3}$ para índice 12 $\Rightarrow \sqrt[3]{3}=\sqrt[3\times4]{3^{1\times4}}=\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[12]{81}$
- $\sqrt[24]{256}$ para índice 3 $\Rightarrow \sqrt[24]{256}=\sqrt[24\div8]{256^{1\div8}}=\sqrt[3]{(2^8)^{\frac{1}{8}}}=\sqrt[3]{2}$

Caso Geral: $\sqrt[k]{a^b}=\sqrt[k\times i]{a^{b\times i}}$, a, b, k e i são números

Operações com Índices Diferentes

Comparação de Raízes

- Quem é maior: $\sqrt{7}$ ou $\sqrt{11}$?

$$7<11\Rightarrow\sqrt{7}<\sqrt{11}$$

- Quem é maior: $\sqrt[3]{4}$ ou $\sqrt[7]{12}$?

$$\sqrt[3]{4}=\sqrt[3\times7]{4^{1\times7}}=\sqrt[21]{4^7}=\sqrt[21]{16384}$$
$$\sqrt[7]{12}=\sqrt[7\times3]{12^{1\times3}}=\sqrt[21]{12^3}=\sqrt[21]{1728}$$

$$16384>1728\Rightarrow\sqrt[3]{4}>\sqrt[7]{12}$$

Regra

Para comparar raízes de índices iguais basta comparar os radicandos.

Para comparar raízes de índices diferentes temos que igualar os índices e então comparar os radicandos.

- Quem é maior: $\sqrt{2}$ ou $\sqrt[3]{3}$?

$$\sqrt{2}=\sqrt[2\times3]{2^{1\times3}}=\sqrt[6]{8}$$
$$\sqrt[3]{3}=\sqrt[3\times2]{3^{1\times2}}=\sqrt[6]{9}$$

$$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$$

Produto e Divisão de Raízes com Índices Diferentes

- Sabemos que:

$$\boxed{\sqrt[k]{a}\times\sqrt[k]{b}=\sqrt[k]{a\times b}} \text{ e } \boxed{\sqrt[k]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}}$$

Temos também que: $\boxed{\sqrt[k]{a^b}=\sqrt[k\times i]{a^{b\times i}}}$

$$\Downarrow$$

$$\sqrt{3}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[2\times3]{3^{1\times3}}\times\sqrt[3\times2]{5^{1\times2}}=\sqrt[6]{3^3\times5^2}=\sqrt[6]{675}\approx2{,}96$$

Regra do Produto

Para calcular o produto ou divisão de raízes com índices diferentes, tem-se que igualar os índices e então prosseguir normalmente com a multiplicação, ou divisão, de raízes com índices iguais.

- $\sqrt{5} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[2\times3]{5^3} \times \sqrt[3\times2]{3^2} = \sqrt[6]{5^3 \times 3^2} = \sqrt[6]{1125}$
- $\sqrt[4]{3} \times \sqrt[6]{2} = \sqrt[4\times3]{3^3} \times \sqrt[6\times2]{2^2} = \sqrt[6]{2^3} \times \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^5}$
- $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[5]{2}} = \dfrac{\sqrt[2\times5]{3}}{\sqrt[5\times2]{2}} = \sqrt[10]{\dfrac{3^5}{2^2}} = \sqrt[10]{\dfrac{243}{4}}$
- $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[6]{4}} = \dfrac{\sqrt[3\times2]{3^2}}{\sqrt[6]{4}} = \sqrt[6]{\dfrac{9}{4}}$

Raiz de Números Negativos

- Temos da potenciação com números negativos que:

$(-9)^3 = -729$
$(-4)^5 = -1024$
$(-2)^7 = -128$

$\boxed{\text{Quando } a < 0 \text{ e } b \text{ é ímpar} \Rightarrow a^b < 0}$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Portanto } \sqrt[b]{a} \textbf{ pertence aos números reais}}$

- Da potenciação com números negativos também temos que:

$(-9)^2 = 81$
$(-4)^4 = 256$
$(-2)^6 = 64$

$\boxed{\text{Quando } a < 0 \text{ e } b \text{ é par} \Rightarrow a^b > 0}$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{Portanto } \sqrt[b]{a} \textbf{ não pertence aos números reais}}$

Aproximação de Raízes

Exemplo

Calcule o valor aproximado de $\sqrt{5}$.

$$4 < 5 < 9 \Rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$$

- $2{,}1^2 = 4{,}41$
- $2{,}2^2 = 4{,}84$
- $2{,}3^2 = 5{,}29$
- $2{,}22^2 \approx 4{,}93$
- $2{,}23^2 \approx 4{,}97$
- $2{,}24^2 \approx 5{,}02$

5,02 é o resultado mais próximo de 5, portanto $\sqrt{5} \approx 2{,}24$.

- Para aproximar o valor de uma raíz:
  1. Procura-se os quadrados perfeitos anterior e posterior ao radicando
  2. Por tentativa e erro aproxima-se o resultado com apenas uma casa decimal
  3. Repete-se o item 2 para cada casa decimal adicional desejada

Exemplo

- Aproxime $\sqrt[3]{30}$:

$$27 < 30 < 64 \Rightarrow 3^3 < 30 < 4^3$$

- $3{,}1^3 = 29{,}79$
- $3{,}2^3 = 32{,}77$
- $3{,}10^3 = 29{,}79$
- $3{,}11^3 = 30{,}08$

Portanto, $\sqrt[3]{30} \approx 3{,}11$

Podemos utilizar a propriedade da divisão para nos ajudar a calcular raízes de números decimais.

Exemplo

Sabendo que $\sqrt{2} = 1{,}41$ e $\sqrt{5} = 2{,}24$, calcule:

- $\sqrt{0{,}18} = \sqrt{\frac{18}{100}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{100}} = \frac{\sqrt{2\times 9}}{10} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{9}}{10} = \frac{1{,}41\times 3}{10} \approx 0{,}425$
- $\sqrt{0{,}242} = \sqrt{\frac{242}{1000}} = \sqrt{\frac{121}{500}} = \frac{\sqrt{121}}{\sqrt{500}} = \frac{11}{\sqrt{5\times 100}} = \frac{11}{\sqrt{5}\times\sqrt{100}}$
  $= \frac{11}{\sqrt{5}\times 10} \approx 0{,}492$

Mês da Matemática
Aula 12: Expressões Algébricas

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso

Curso Exato

Definição Classificação Valor Numérico de Expressões Algébricas

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso Curso Exato
Mês da Matemática Aula 12: Expressões Algébricas

Definição Classificação Valor Numérico de Expressões Algébricas

- Expressões numéricas:
  - $(2+3)\times 5+\frac{4}{3}$
  - $3\times\dfrac{7}{4}+5^3$
  - $\sqrt[3]{7}\times 2^{\frac{1}{2}}+0{,}1$
- **Operações** com expressões numéricas **envolvem apenas números**.

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso Curso Exato
Mês da Matemática Aula 12: Expressões Algébricas

Definição Classificação Valor Numérico de Expressões Algébricas

Exemplo

Cláudio vai ao mercado comprar leite e ovos. Cada litro de leite custa R$4,00 e a caixa de ovos custa R$6,00. Como podemos representar o gasto total da compra feita por Cláudio?

$$\text{Custo total} = 4\times\ell+3\times o$$

ℓ : número de litros de leite comprados

o: número de caixas de ovos compradas

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso Curso Exato
Mês da Matemática Aula 12: Expressões Algébricas

Definição Classificação Valor Numérico de Expressões Algébricas

Definição

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso Curso Exato
Mês da Matemática Aula 12: Expressões Algébricas

Definição Classificação Valor Numérico de Expressões Algébricas

Definição

Expressões Algébricas são expressões que envolvem números e variáveis. As variáveis são representadas por letras do nosso alfabeto.

- $2k$
- $a+b$
- $7x+4$
- $2y^4-\frac{x}{2}+3$
- $z^{-3}+4wx$

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso Curso Exato
Mês da Matemática Aula 12: Expressões Algébricas

Definição Classificação Valor Numérico de Expressões Algébricas

- Seja a expressão algébrica:

$$\boxed{2a^2-3bc}$$

  - 2 e -3 : coeficientes numéricos
  - a, b e c : variáveis
  - $2a^2$ e $-3bc$: termos algébricos

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso Curso Exato
Mês da Matemática Aula 12: Expressões Algébricas

Definição Classificação Valor Numérico de Expressões Algébricas

Classificação

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso Curso Exato
Mês da Matemática Aula 12: Expressões Algébricas

- A classificação é feita com base no número de termos algébricos:

Monômios

Possuem apenas um termo algébrico:

- $2a$
- $3bd$
- $-6k^2$

Polinômios

Possuem dois ou mais termos algébricos:

- $2a + 4b$
- $3cd – 5e + 3$
- $-6b^3 + 4c + 6d - 7f^2$

- Nomenclatura de polinômios:

Binômio

Possuem dois termos algébricos

- $2a + 1$
- $-\frac{3}{5}a^3w + 4x^2$
- $-12z^2 + 19$

Trinômio

Possuem três termos algébricos

- $2a + 4b - 13c$
- $3cd – 5e + 3$
- $3x^y - 6y + 7z^2$

- Podemos identificar expressões com nomes como:

$$C(\underbrace{x,y}_{\text{variáveis}}) = 3x - 2y$$

Exemplo

Podemos reescrever o nosso primeiro exemplo da seguinte maneira:

$$C(\ell, o) = 4 \times \ell + 3 \times o = 4\ell + 3o$$

- C : custo total da compra
- ℓ: número de litros de leite comprados
- o: número de caixas de ovos

Exercício

Quais as variáveis das seguintes expressões algébricas?

- $3ab$
- $5x^2 + 4y^3$
- $12ab^2 + 4c + 5de$

Valor Numérico de Expressões Algébricas

Exemplo

Cláudio vai ao mercado comprar leite e ovos. Cada litro de leite custa R$4,00 e a caixa de ovos custa R$6,00. Quanto Cláudio gastou ao todo se ele comprou 3 litros de leite e 4 caixas de ovos?

Sabemos que:

$$C(\ell, o) = 4\ell + 6o$$

C : custo total da compra
ℓ : número de litros de leite comprados $\Rightarrow$ 3 litros $\Rightarrow \ell = 3$
o: número de caixas de ovos compradas $\Rightarrow$ 4 caixas de ovos $\Rightarrow o = 4$

Portanto,

$$C(\ell, o) = 4\ell + 6o \Rightarrow C = 4 \times 3 + 6 \times 4 = 12 + 24 = 36$$

Definição

O valor numérico de uma expressão algébrica é o resultado de suas operações após substituirmos as variáveis por valores numéricos.

- $x + y$, para $x = 10$ e $y = 6 \Rightarrow 10 + 6 = 16$
- $\frac{a^2}{2} + \frac{a}{3}$, para $a = 2 \Rightarrow \frac{2^2}{2} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$
- $-2x^2 + 3y - 3$, para $x = 7$ e $y = -13$
  $\Rightarrow (-2) \times 7^2 + 3 \times (-13) - 3$
  $= (-2) \times 49 - 39 - 3 = -98 - 42 = -140$

Exercício

Determine o valor numérico das seguinte expressões algébricas:

a) $7 + a – b$, para $a = \frac{2}{3}$ e $b = -\frac{1}{2}$
b) $x - y^{x-y}$, para $x = 2$ e $y = -2$

a) $7 + \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 7 + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = 7 + \frac{7}{6} = \frac{49}{6}$
b) $2 - (-2)^{2-(-2)} = 2 - (-2)^4 = 2 - 16 = -14$

Mês da Matemática
Aula 13: Redução de Termos Semelhantes

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso

Curso Exato

Exemplo

Aproveitando a *Black Friday*, João e Pedro saíram às compras. Na primeira loja que visitaram, João comprou 2 jogos de videogame e Pedro comprou outros 4 jogos. Na segunda loja que visitaram, João comprou 3 CDs e Pedro comprou 5 DVDs.

Considere que j representa o preço de cada jogo de videogame, c representa o preço de cada CD e d representa o preço de cada DVD. Qual foi o gasto total dos amigos em cada uma das lojas?

- Primeira loja: $2j + 4j = 6j$
- Segunda loja: $3c + 5d$

- Por que em um caso foi possível reduzir a um só termo mas no outro não?

Só é possível somar e subtrair termos semelhantes entre si!

Termos Semelhantes

Definição

Termos Semelhantes são termos algébricos que possuem a mesma parte literal.

- $2a$ e $-\frac{3}{4}a$ são termos semelhantes
- $7a^2b$ e $-\frac{a^2b}{2}$ são termos semelhantes
- $7ab$ e $-12ab$ são termos semelhantes
- $2y^4$ e $-3y^3$ não são termos semelhantes
- abc e $2bc$ não são termos semelhantes

- A **parte literal** é formada pelas variáveis e seus expoentes.
  - $2y^4$ e $-3y^3$ não são termos semelhantes.

$2y^4 = 2 \times y \times y \times y \times y$

- Parte literal: y^4
- Variável: y
- Expoente: 4

$-3y^3 = -3 \times y \times y \times y$

- Parte literal: y^3
- Variável: y
- Expoente: 3

Exemplo

- $3a^2b$ e $7ab^2$

$3a^2b = 3 \times a \times a \times b$

- Parte literal: a^2b
- Variáveis: a, b
- Expoentes: 2, 1

$7ab^2 = 7 \times a \times b \times b$

- Parte literal: ab^2
- Variáveis: a,b
- Expoentes: 1,2

Exemplo

Identifique quais pares de termos constituem um par de termos semelhantes.

- $7a$ e $4a$
- $2x^2$ e $6x^2$
- $4y$ e $5y^2$
- $8xy$ e $-xy$
- $-5a$ e $-4ab$
- $4ab$ e $\frac{5}{8}ab$
- $4x^2y$ e $-xy$
- xy^2 e $2x^2y$
- $3acb$ e abc
- $\frac{x}{2}$ e $7x$

Redução de Termos Semelhantes

- Redução de dois ou mais termos para apenas um, por meio de soma ou subtração.

Exemplo

- João tem comprou 2 jogos e Pedro comprou 4 jogos; se o preço de cada jogo é j, eles pagaram, ao todo, $2j + 4j = 6j$.

Definição

Caso existam 2 ou mais termos semelhantes em uma mesma expressão algébrica, é possível reduzi-los a apenas um.

- $3x + \frac{x}{2} = \frac{7}{2}x$
- $\frac{4}{5}ab + \frac{2}{3}ab = \frac{4\times3+2\times5}{15}ab = \frac{22}{15}ab$
- $-3w^3z + \frac{1}{5}w^3z = -\frac{14}{15}w^3z$

- Numa expressão algébrica com muitos termos, agrupamos os termos semelhantes para depois reduzi-los.

Exemplo

Reduza a seguinte expressão:

- $2a + 4ab - 3b - \frac{1}{2}a - \frac{3}{2}ab - 5b$
  $= 2a - \frac{1}{2}a + 4ab - \frac{3}{2}ab - 3b - 5b$
  $= \frac{3}{2}a + \frac{5}{2}ab - 8b$

Exemplo

Reduza as seguintes expressões:

- $5x + 7y + 8z - 2x + 3y + 5 - z$
  $= 5x - 2x + 7y + 3y + 8z - z + 5$
  $= 3x + 10y + 7z + 5$
- $5c + 2d - \frac{1}{2}c - \frac{5}{2}d$
  $= 5c - \frac{1}{2}c + 2d - \frac{5}{2}d$
  $= \frac{9}{2}c - \frac{1}{2}d$

Exemplo

Reduza as seguintes expressões:

- $4a^3 + 5a^2 + 7a - 2a^2 + a^3 - 9a + 6$
  $= 4a^3 + a^3 + 5a^2 - 2a^2 + 7a - 9a + 6$
  $= 5a^3 + 3a^2 - 2a + 6$

Propriedade Distributiva

Exemplo

Calcule:

- $3 \times (3 + 2)$
  - 1ª Opção: Calcular primeiro o que está dentro dos parênteses
    $3 \times (3 + 2) = 3 \times 5 = 15$
  - 2ª Opção: Utilizar a propriedade distributiva
    $3 \times (3 + 2) = 3 \times 3 + 3 \times 2 = 9 + 6 = 15$

O resultado é o mesmo!

- Propriedade distributiva em expressões algébricas:

Exemplo

Reduza as seguintes expressões:

- $3x + 4(2x + y) = 3x + 4 \times 2x + 4 \times y$
  $= 3x + 8x + 4y = 11x + 4y$
- $a + 2(a - b) = a + 2 \times a – 2 \times b$
  $= a + 2a – 2b = 3a – 2b$
- $a - 2(a - b) = a + (-2) \times a – (-2) \times b$
  $= a - 2a + 2b = -a + 2b$

- Prioridade de Operações
  1. Potenciação e radiciação
  2. Multiplicação e divisão
  3. Soma e subtração

$$2^2 + 3^2 \times 4 + \frac{6}{3} = 4 + 9 \times 4 + 2 = 6 + 36 = 42$$

Reduza as seguintes expressões:

- $2x + 2(2x + 3) = 2x + 4x + 6 = 6x + 6$
- $4y – 3(-5y + 3z) = 4y + 15y – 9z = 19y – 9z$
- $4k – (-3k + 9 – 2k) = 4k + 3k – 9 + 2k = 4k + 3k + 2k – 9 = 9k - 9$

Mês da Matemática
Aula 14: Equação de 1º grau

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso

Curso Exato

Equações | Grau de uma equação | Equação Polinomial | Soluções de Equações

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso — Curso Exato
Mês da Matemática Aula 14: Equação de 1º grau

Equações | Grau de uma equação | Equação Polinomial | Soluções de Equações

Exemplo

Rodrigo foi ao mercado comprar lasanha congelada e refrigerante para jantar. Cada lasanha custa R$10,00 reais e cada refrigerante custa R$4,00. Como podemos expressar o gasto total de Rodrigo?

Seja:

- L: quantidade de Lasanhas
- R: quantidade de refrigerantes
- G: gasto total

Então:

$$G = 10L + 4R$$

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso — Curso Exato
Mês da Matemática Aula 14: Equação de 1º grau

Equações | Grau de uma equação | Equação Polinomial | Soluções de Equações

$$\underbrace{G}_{\text{Lado esquerdo ou 1º membro}} = \underbrace{10L + 4R}_{\text{Lado direito ou 2º membro}}$$

- A esta relação de igualdade damos o nome de equação.

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso — Curso Exato
Mês da Matemática Aula 14: Equação de 1º grau

Equações | Grau de uma equação | Equação Polinomial | Soluções de Equações

Equações

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso — Curso Exato
Mês da Matemática Aula 14: Equação de 1º grau

Equações | Grau de uma equação | Equação Polinomial | Soluções de Equações

Definição

Equações são relações de igualdade envolvendo uma ou mais variáveis .

- $x + 2 = 5$
- $3 + b = 7 - a$
- $4x + 1 = 3x$
- $-5x^4 - 9x^2 - 7 = 4$

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso — Curso Exato
Mês da Matemática Aula 14: Equação de 1º grau

Equações | Grau de uma equação | Equação Polinomial | Soluções de Equações

Exercício

Qual dos seguintes itens não são equações?

- $x + 3$
- $w = 2$
- $z + 3 = 2y - 3$
- $x + 3 + 2y$

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso — Curso Exato
Mês da Matemática Aula 14: Equação de 1º grau

Equações | Grau de uma equação | Equação Polinomial | Soluções de Equações

Grau de uma equação

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso — Curso Exato
Mês da Matemática Aula 14: Equação de 1º grau

- O grau de uma equação é determinado pelo maior expoente de suas variáveis.

Exemplo

- $x + y - 5 = 5$ maior expoente: 1 $\Rightarrow$ Equação de 1º grau
- $x^2 + 3 = 4$ maior expoente: 2 $\Rightarrow$ Equação de 2º grau
- $-x^5 + 2k^2 + 2 = 3$ maior expoente: 5 $\Rightarrow$ Equação de 5º grau

Equação Polinomial

- Sabemos que:

Definição

Polinômios são expressões algébricas compostas por dois ou mais termos algébricos.

Exemplos:

- $x + y$
- $a + 2$
- $-w^2 + \frac{1}{5}z - k$

- Chamamos então de Equação Polinomial toda equação da forma:

$$\boxed{P(x) = 0}$$

tal que $P(X)$ é um polinômio de uma variável com grau não-nulo.

Exemplo

- $3x + 2 = 0$
- $x^3 - 2x^2 + 3 = 0$
- $-\frac{5}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^2 + x = 2$

- Algumas equações são muito complexas para se achar um valor de x que satisfaça a igualdade.
- Outras, por outro lado, são simples e podem ser amplamente aplicadas para resolver problemas reais, como é o caso das equações polinomiais de 1º grau, ou apenas equações de 1º Grau.

Soluções de Equações

Definição

A solução de uma equação é todo conjunto de valores de suas variáveis que tornam a igualdade verdadeira.

- $x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ é solução da equação;
- $\frac{y}{2} - 3 = 0 \Rightarrow y = 19$ não é solução da equação;
- $5z + \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{5}$ é solução da equação.

- Algumas equações possuem múltiplas soluções:

Exemplo

- $x + y = 3 \Rightarrow x = -1$ e $y = 4$ é uma solução da equação;
  $x = 0$ e $y = 3$ é uma solução da equação;
  $x = 1$ e $y = 2$ é uma solução da equação;
  $x = 2$ e $y = 1$ é uma solução da equação;
  $x = 3$ e $y = 0$ é uma solução da equação;
  $x = 4$ e $y = -1$ é uma solução da equação.
- Toda combinação de x e y que atende a igualdade é solução da equação. Portanto, temos infinitas soluções.

- Equações de primeiro grau com uma variável têm uma única solução.

- Vimos alguns exemplos de equações polinomiais do 1º grau como:
  - $x + 3 = 0$
  - $\frac{x}{2} - 5 = 0$
  - $-\frac{x}{3} + \frac{1}{4} = 0$

$\boxed{\text{Forma geral: } ax + b = 0\text{, tal que } a \text{ é diferente de } 0}$

- Para encontrar a raiz de uma equação de 1º grau:
  - Isolamos os termos algébricos de um lado da igualdade e os números do outro, por meio de operações aplicadas aos dois membros da equação.
  - Para manter a igualdade toda operação realizada de um lado da equação deve ser realizada igualmente do outro.

- Da forma geral da equação de 1º grau:

$$ax + b = 0 \Rightarrow ax + b - b = 0 - b \Rightarrow ax = -b \Rightarrow ax \times \frac{1}{a} = -b \times \frac{1}{a}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

- Portanto, a raiz de uma equação do primeiro grau genérica $ax + b = 0$ é $x = -\frac{b}{a}$.

- Podemos conferir se a solução atende de fato a igualdade:

$$ax + b = 0 \Rightarrow a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0 \Rightarrow -b + b = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

- A igualdade é verdadeira, então $-\frac{b}{a}$ é, de fato, raiz da equação $ax + b = 0$.

Exemplo

Resolva as seguintes equações de 1º grau:

- $x + 3 = 0$

$x + 3 + (-3) = 0 + (-3)$
$x = -3$

- $2 - x = 5$

$2 - x + (-2) = 5 + (-2)$
$-x = 3$
$-x \cdot (-1) = 3 \cdot (-1)$
$x = -3$

Exemplo

Resolva as seguintes equações de 1º grau:

- $-\frac{x}{7} + \frac{1}{2} = 0$

$-\frac{x}{7} = -\frac{1}{2}$
$-x = -\frac{7}{2}$
$x = \frac{7}{2}$

- $x + \frac{x}{2} + \frac{3x}{4} = 18$

$\frac{4x}{4} + \frac{2x}{4} + \frac{3x}{4} = 18$
$\frac{4x + 2x + 3x}{4} = 18$
$\frac{9x}{4} = 18$
$9x = 72$
$x = 8$

Exemplo

Resolva a seguinte equação de 1º grau:

- $2x + 3 = 3x - 5$

$2x + 3 = 3x - 5$
$2x + 3 + (-3x) = 3x - 5 + (-3x)$
$-x + 3 = -5$
$-x = -8$
$x = 8$

Exemplo

Resolva a seguinte equação de 1º grau:

- $\frac{(3x-2)}{4} - \frac{(4-x)}{2} = 2x - \frac{(7x-2)}{3}$

$$\frac{3x}{4} - \frac{2}{4} - \frac{4}{2} + \frac{x}{2} = 2x - \frac{7x}{3} + \frac{2}{3}$$
$$\frac{3x}{4} + \frac{x}{2} - 2x + \frac{7x}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + 2$$
$$\frac{(9x + 6x - 24x + 28x)}{12} = \frac{(8 + 6 + 24)}{12} \Rightarrow 19x = 38 \Rightarrow x = 2$$

Mês da Matemática
Aula 15: Modelagem e Resolução de Problemas

Victor F. P. Barbosa, Gustavo R. Basso

Curso Exato

- Na última aula:

Exemplo

Resolva a equação: $3x + 5 = 2x + 3$

$$3x + 5 = 2x + 3$$

$$3x - 2x = 3 - 5$$

$$x = -2$$

- Como aplicar em problemas reais?

Modelagem de Problemas

- Modelando a linguagem em equações:

Exemplo

Na Rua Euler, o número de cachorros é o dobro do número de gatos.

Para escrever uma equação que traduza essa informação, começamos por escolher variáveis que representem o número de cachorros e o número de gatos.

- C = número de cachorros
- G = número de gatos:

Então:

$$\boxed{C = 2G \text{ ou } G = \frac{C}{2}}$$

- Modelando a linguagem em equações:
  - Leia o problema inteiro;
  - Faça desenhos e representações visuais, se necessário;
  - Atribua variáveis aos valores;
  - Escreva as equações relativas aos dados.

Exemplo

Henrique tem 2 jogos a menos que Pedro. Modele este problema em forma de equação.

- H : Número de jogos de Henrique
- P : Número de jogos de Pedro

- Henrique tem 2 jogos a menos que Pedro:

(Número de jogos de Pedro) - 2 = (Número de jogos de Henrique)

$$\boxed{H = P - 2}$$

- Palavras-chaves:

"Somados" "Combinados" "Adicionado a" "Total de"		Adição ($+$)
"Subtração" "Diferença" "Diminuído de" "Resto"		Subtração ($-$)
"Produto" "Vezes" "Dobro/Triplo" "Fator"		Multiplicação ($\times$)
"Dividido" "Fração de" "Metade/Terça parte" "Parcela"		Divisão ($\div$)

Exemplo

Rafael comprou duas pizzas para dividir com seus amigos no seu aniversário. De presente, os amigos de Rafael pagaram a pizza para ele, dividindo o preço igualmente entre eles. Qual foi o preço que cada amigo de Rafael pagou?

- P : preço da Pizza
- N : número de amigos de Rafael
- A : preço pago por cada amigo de Rafael

- O valor de 2 pizzas foi dividido igualmente entre o número de amigos presentes:

(Preço pago por cada amigo) $= \frac{2\times(\text{Preço da Pizza})}{(\text{Número de amigos de Rafael})}$

$$\boxed{A = \frac{2P}{N}}$$

Resolução de Problemas Práticos

Exemplo

- A soma de 3 números consecutivos é 21. Quais são os números?
  - Primeiro Número: x
  - Segundo Número: $x+1$
  - Terceiro Número: $x+2$

  - *Soma de 3 números consecutivos é 21:*

$$x + (x+1) + (x+2) = 21$$
$$3x + 3 = 21 \Rightarrow 3x = 18$$
$$\boxed{x = 6}$$

- Números: 6, 7 e 8

Exemplo

- Um estudante fez uma prova contendo N questões. Ele acertou 8 das 18 primeiras questões e acertou $\frac{5}{6}$ das questões restantes. Sabendo que a quantidade de questões certas equivale a $\frac{3}{4}$ do total de questões da prova, quantas questões havia na prova?
  - N: Total de Questões da Prova
  - E: Número de questões que o estudante errou

  - *Ele acertou* 8 *das* 18 *primeiras questões* $\Rightarrow$ 8 acertos e 10 erros.

Exemplo

- *Acertou* $\frac{5}{6}$ *das questões restantes* $\Rightarrow$ Errou $\frac{1}{6}$ das questões restantes.

$$\overbrace{\frac{1}{6}\underbrace{(N-18)}_{\text{Número de questões restantes}}}^{\text{Fração de erro}}$$

- *Número de acertos equivale a* $\frac{3}{4}$ *do total de questões da prova* $\Rightarrow$ Número de erros equivale a $\frac{1}{4}$ do total de questões.

$$E = \frac{1}{4}N$$

Exemplo

- Para encontrar o total de questões (N):

$$\begin{pmatrix}\text{Total de questões}\\ \text{erradas}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Total de questões}\\ \text{erradas nas 18 primeiras}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{Total de questões}\\ \text{erradas nas restantes}\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4}N = 10 + \frac{1}{6}(N-18) \Rightarrow \frac{1}{4}N = 10 + \frac{1}{6}N - 3$$
$$\frac{1}{4}N - \frac{1}{6}N = 7 \Rightarrow \frac{3-2}{12}N = 7$$
$$\frac{1}{12}N = 7 \Rightarrow N = 7 \times 12 = 84$$

- Portanto, a prova tinha 84 questões ao todo.

B Listas de Exercícios

B.1 Listas

Divisibilidade, fatores e múltiplos

Exercícios de Fixação

1) Diga se os seguintes números são divisíveis por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 ou 10 (pode ser divisível por mais de um ou por nenhum).

a) 44
b) 75
c) 60
d) 99
e) 61
f) 72
g) 211
h) 616
i) 800
j) 735
k) 773
l) 594
m) 6744
n) 9781
o) 8154
p) 47030
q) 60377
r) 473064
s) 503922
t) 4319704

2) Quais dos seguintes números são primos?

a) 33
b) 62
c) 15
d) 31
e) 49
f) 26
g) 23
h) 101
i) 113
j) 121
k) 289
l) 141

3) Escreva os seguintes números como um produto de fatores primos:

a) 4
b) 8
c) 12
d) 15
e) 18
f) 36
g) 42
h) 64
i) 72
j) 92
k) 96
l) 144
m) 168
n) 225
o) 242
p) 360

Exercícios de Imersão

1) (CFS) É divisível por 2, 3 e 5 simultaneamente o número:

a) 235

b) 520

c) 230

d) 510

e) 532

2) Um armazém contém 8.836 potes de certo produto e cada corredor possui o mesmo número de potes. Quantos corredores o armazém pode ter?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 9 e) 10

3) 9.800 pessoas votaram na eleição da diretoria de um sindicato. Sabendo que cada candidato recebeu exatamente o mesmo número de votos, quantos candidatos podem ter concorrido na eleição?

a) 3 b) 5 c) 6 d) 9 e) 12

4) Um programa de televisão abriu uma votação que decidiria o cantor predileto dos espectadores. Sabendo que 5.748 adolescentes votaram e cada cantor recebeu exatamente o mesmo número de votos, quantos cantores disputaram a votação?

a) 5 b) 6 c) 7 d) 9 e) 10

5) (EsPCEx) No número 34n27, qual é o algarismo que substitui n para que ele seja divisível por 9?

6) Quais são os fatores primos de 300?

Matemática no dia-a-dia

1) Janaína é florista e, para uma encomenda, pretende distribuir 925 rosas em buquês. Se cada buquê comporta no máximo 10 rosas e todos os buquês devem ter o mesmo número de flores. Qual o maior número de rosas que ela pode colocar em um buquê?

2) Qual o menor troco que Ricardo pode receber ao pagar R$4,23 utilizando moedas de 5, 10 e 25 centavos?

3) Vanessa quer plantar 110 árvores em seu sítio. Ela pretende dividir as árvores em fileiras, com o mesmo número de árvores por fileira. Sabendo que o maior número de fileiras que seu sítio comporta é 10, quantas fileiras ela pode fazer?

Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum

Exercícios de Fixação

1) Encontre o mínimo múltiplo comum dos números a seguir:

a) 4, 6
b) 4, 8
c) 6, 10
d) 12, 15
e) 8, 18
f) 12, 20
g) 16, 40
h) 24, 36
i) 18, 42
j) 30, 40
k) 35, 50
l) 120, 144
m) 240, 252
n) 12, 15, 18
o) 24, 32, 40
p) 30, 40, 60

2) Encontre o máximo divisor comum dos números a seguir:

a) 6, 8
b) 8, 12
c) 16, 28
d) 18, 30
e) 30, 36
f) 48, 54
g) 70, 80
h) 72, 112
i) 110, 143
j) 120, 136
k) 240, 360
l) 448, 636
m) 24, 40, 60
n) 50, 75, 120
o) 72, 96, 180
p) 112, 168, 224, 280

Exercícios de Imersão

1) Durante o verão, um vendedor passa com um carrinho de sorvetes pelo bairro de Carolina a cada 4 dias. Além disso, um vendedor de pamonhas passa por seu bairro a cada 5 dias. Se ambos os vendedores visitaram o bairro hoje, daqui a quantos dias eles voltarão a se encontrar?

2) Rafael gosta de plantas e cria duas espécies em seu quintal. Cada espécie de planta possui necessidades distintas, e por isso ele rega uma delas de 10 em 10 dias e a outra de 14 em 14 dias. Sabendo que ele regou as duas plantas hoje, daqui a quantos dias ele voltará a regá-las no mesmo dia?

3) Viviane abriu uma venda em sua casa e, para atrair novos clientes, decidiu fazer propaganda dela distribuindo folhetos em lojas da vizinhança. Ela distribui 17 folhetos vermelhos em cada lanchonete e 10 folhetos azuis em cada loja de roupas. No fim do dia, ela percebe que distribuiu o mesmo número de folhetos azuis e vermelhos. Qual é o menor número de folhetos que ela pode ter distribuído?

4) Para a confraternização de fim de ano em sua escola, Aline e João prepararam o mesmo número de cupcakes. Aline os preparou em fornadas de 12 unidades, enquanto João, que só tinha uma forma menor, assou-os em grupos de 9. Considerando que eles levaram o mesmo número de cupcakes para a festa, qual o menor número de cupcakes que cada um deles deve ter assado?

5) Maiara vai à academia de 3 em 3 dias. No dia 5 de março, no meio de seu treino, ela encontrou Lucas, em quem estava interessada. Após pesquisar com suas amigas, ela descobriu que ele vai à academia a cada 4 dias. Se cada um deles mantiver a rotina de treinos, em qual dia voltarão a se encontrar?

6) Um colégio disputa frequentemente olimpíadas de Matemática e, por causa disso, costuma oferecer aulas extras para os alunos interessados em se aprofundar no assunto. Há 72 meninos e 90 meninas matriculadas nas aulas de aprofundamento. Para a próxima competição, o professor Felipe gostaria de organizar os estudantes em fileiras de mesmo tamanho, contendo apenas meninos ou apenas meninas. Qual é o maior número de estudantes que cada fileira pode conter?

7) Gabriel ficou responsável por organizar brincadeiras durante a festa de aniversário de seu irmão mais novo. Ele decidiu organizar uma gincana com as crianças presentes, dividindo-as em grupos que disputariam diferentes provas. Considerando que havia 32 meninos e 20 meninas presentes na festa e que cada grupo deveria conter a mesma combinação de meninos e meninas, qual é o maior número de grupos que puderam ser formados?

8) O pai de Jéssica é confeiteiro e costuma vender tortinhas e pudins em pacotes, com a mesma combinação de doces em cada pacote. Em um dia típico, Jéssica consegue ajudar seu pai a preparar 120 tortinhas e 180 pudins. Qual é o maior número de pacotes que podem ser feitos com esse número de doces?

9) Em seu tempo livre, Raul produz colares de miçangas para vender. Na última vez que foi às compras, ele comprou 90 miçangas verdes e 108 miçangas azuis. Qual é o maior número de colares idênticos que ele consegue fazer usando todas as miçangas?

Matemática no dia-a-dia

1) (Uepb 2014) Com relação ao movimento dos cometas no universo, sabemos que muitos deles passam pelo planeta Terra em períodos de anos definidos. Os cometas A e B passam de 20 em 20 anos e 35 em 35 anos respectivamente, e suas últimas aparições na Terra ocorreram em 1930. A próxima passagem dos dois pela Terra ocorrerá no ano de:

a) 2.072 b) 2.060 c) 2.075 d) 2.070 e) 2.065

2) (Upe 2013) Três colegas caminhoneiros, Santos, Yuri e Belmiro, encontraram-se numa sexta-feira, 12 de agosto, em um restaurante de uma BR, durante o almoço. Santos disse que costuma almoçar nesse restaurante de 8 em 8 dias, Yuri disse que almoça no restaurante de 12 em 12 dias, e Belmiro, de 15 em 15 dias.

Com base nessas informações, analise as afirmativas seguintes:

I. Os três caminhoneiros voltarão a se encontrar novamente no dia 13 de dezembro.
II. O dia da semana em que ocorrerá esse novo encontro é uma sexta-feira.
III. Santos e Yuri se encontrarão 4 vezes antes do novo encontro dos três colegas.

Está CORRETO o que se afirma, apenas, em:

a) I b) II c) III d) I e II e) II e III

3) Monique quer plantar 45 girassóis, 81 pés de milho e 63 pés de tomate em seu jardim. Se ela pretende colocar o mesmo número de plantas por fileira e cada fileira só pode ter um tipo de planta, qual é o maior número de plantas que ela pode colocar em cada fileira?

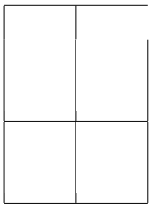
4) (Espm 2014) As moedas de 10 e 25 centavos de real têm, praticamente, a mesma espessura. 162 moedas de 10 centavos e 90 moedas de 25 centavos serão empilhadas de modo que, em cada pilha, as moedas sejam do mesmo tipo e todas as pilhas tenham a mesma altura. O menor número possível de pilhas é:

a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

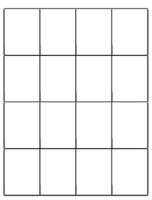
Frações

Exercícios de Fixação

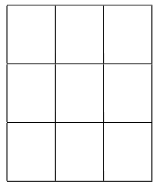
1) Pinte os ladrilhos das figuras abaixo de modo que cada uma das seguintes frações sejam representadas visualmente:

a) 

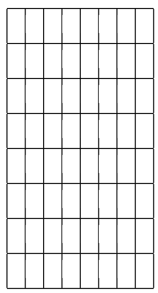
$\frac{1}{4}$

b) 

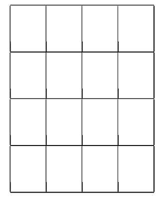
$\frac{8}{16}$

c) 

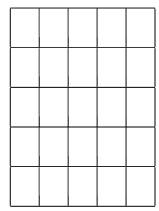
$\frac{5}{9}$

d) 

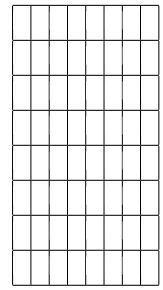
$\frac{17}{64}$

e) 

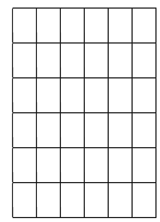
$\frac{11}{16}$

f) 

$\frac{12}{25}$

g) 

$\frac{7}{64}$

h) 

$\frac{21}{36}$

2) Complete as igualdades com o valor que as torna verdadeiras.

a) $\frac{1}{2} = \frac{3}{\ }$

b) $\frac{\ }{2} = \frac{2}{4}$

c) $\frac{4}{5} = \frac{8}{\ }$

d) $\frac{7}{3} = \frac{\ }{21}$

e) $\frac{24}{\ } = \frac{6}{13}$

f) $\frac{12}{\ } = \frac{3}{39}$

g) $\frac{\ }{22} = \frac{3}{11}$

h) $\frac{\ }{39} = \frac{5}{13}$

i) $\frac{3}{\ } = \frac{4}{12}$

j) $\frac{12}{\ } = \frac{18}{12}$

k) $\frac{\ }{4} = \frac{15}{6}$

l) $\frac{3}{15} = \frac{\ }{20}$

3) Complete com $>$, $<$ ou $=$

a) $\frac{5}{4}$ --- $\frac{1}{4}$

b) $\frac{3}{5}$ --- $\frac{9}{5}$

c) $\frac{8}{7}$ --- $\frac{2}{7}$

d) $\frac{3}{8}$ --- $\frac{7}{8}$

e) $\frac{2}{9}$ --- $\frac{6}{18}$

f) $\frac{5}{7}$ --- $\frac{10}{14}$

g) $\frac{3}{10}$ --- $\frac{6}{20}$

h) $\frac{3}{4}$ --- $\frac{2}{8}$

i) $\frac{8}{12}$ --- $\frac{7}{8}$

j) $\frac{1}{11}$ --- $\frac{1}{6}$

k) $\frac{8}{10}$ --- $\frac{3}{4}$

l) $\frac{6}{8}$ --- $\frac{5}{10}$

m) $\frac{4}{11}$ --- $\frac{2}{4}$

n) $\frac{4}{6}$ --- $\frac{5}{7}$

o) $\frac{4}{5}$ --- $\frac{8}{11}$

p) $\frac{6}{15}$ --- $\frac{4}{10}$

4) Simplifique as frações a seguir, quando possível:

a) $\frac{2}{4} =$	d) $\frac{17}{51} =$	g) $\frac{4}{4} =$	j) $\frac{250}{850} =$	m) $\frac{24}{30} =$	p) $\frac{14}{63} =$
b) $\frac{7}{17} =$	e) $\frac{3}{33} =$	h) $\frac{72}{144} =$	k) $\frac{45}{63} =$	n) $\frac{21}{56} =$	q) $\frac{24}{40} =$
c) $\frac{6}{9} =$	f) $\frac{0}{35} =$	i) $\frac{144}{1028} =$	l) $\frac{28}{35} =$	o) $\frac{30}{66} =$	r) $\frac{35}{600} =$

Matemática no dia-a-dia

1) Amanda comprou uma pizza que veio dividida em 8 pedaços iguais e comeu 3 deles. Daniel comprou uma pizza do mesmo tamanho, mas que veio dividida em 4 pedaços iguais, e comeu 3 deles. Quem comeu mais pizza?

2) Alexandre assou duas tortas que tinham exatamente o mesmo tamanho. A primeira era uma torta de limão, que ele dividiu em 6 pedaços iguais. A segunda era uma torta holandesa, que ele dividiu em 8 pedaços iguais. Alexandre então levou as tortas para uma festa e seus amigos comeram 3 fatias da torta de limão e 4 fatias da torta holandesa. Os amigos de Alexandre comeram mais torta de limão ou mais torta holandesa?

3) Na última semana, Zenaide ouviu $\frac{3}{4}$ das suas músicas preferidas, enquanto Zilda ouviu $\frac{7}{8}$ das suas. Quem ouviu uma fração maior de suas canções favoritas?

4) Gabriela é viciada em jogos de computador e ocupa $\frac{6}{11}$ do disco rígido de seu computador com eles. Douglas, com quem sempre joga, encheu $\frac{4}{7}$ de seu disco com jogos. Qual deles tem uma fração maior do disco rígido ocupado por jogos?

5) Giovana e Beatriz são irmãs e estão tentando completar um álbum de figurinhas. Giovana completou $\frac{4}{9}$ do álbum, enquanto Beatriz completou metade. Qual delas precisa de mais figuras para completar a coleção?

6) João gosta de costurar e, em seu kit de costura, tem 12 alfinetes azuis e 3 vermelhos. Escreva que fração representam os alfinetes azuis em relação ao total de livros, em sua forma irredutível.

7) 21 estudantes se dirigiram à biblioteca de seu colégio para fazer uma pesquisa da disciplina de Biologia. 6 deles leram livros sobre animais e o restante leu livros sobre plantas. Escreva que fração representam os estudantes que leram livros sobre plantas em relação ao total de estudantes, em sua forma irredutível.

8) Amanda é uma confeiteira habilidosa e, numa tarde, preparou 6 tortas de morango e 14 tortas de limão. Escreva que fração representam as tortas de morango em relação ao total de tortas, em sua forma irredutível.

Operações com Frações - Parte 1

Exercícios de Fixação

1) Calcule:

a) $\frac{3}{7}+\frac{2}{7}=$

b) $\frac{3}{5}-\frac{2}{5}=$

c) $\frac{3}{5}+\frac{1}{5}-\frac{2}{5}=$

d) $\frac{2}{4}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=$

e) $\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=$

f) $\frac{11}{15}-\frac{7}{10}=$

g) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=$

h) $\frac{5}{6}+\frac{3}{8}=$

i) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{3}{5}=$

j) $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{4}{9}=$

k) $\frac{7}{9}-\frac{5}{8}+\frac{1}{4}=$

l) $\frac{3}{7}+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=$

2) Que número deve ser escrito em cada lacuna de modo que a soma seja igual a 1?

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\_\_\_=1$

b) $\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\_\_\_=1$

c) $\frac{1}{8}+\frac{3}{4}+\_\_\_=1$

Exercícios de Imersão

1) Três candidatos disputaram uma eleição. O vencedor conquistou metade dos votos, enquanto o segundo colocado recebeu dois quintos dos votos. Que fração dos votos recebeu o terceiro candidato?

2) Ana está lendo um livro. No primeiro dia ela leu $\frac{1}{4}$ do livro e no dia seguinte leu $\frac{1}{6}$ do livro. Que fração do livro ela já leu? Qual é a fração do livro que falta para ela terminar a leitura?

3) No mês passado, a cidade de Maceió recebeu um congresso sobre Educação Matemática, que reuniu pesquisadores de vários lugares do mundo. Estiveram presentes 53 brasileiros, 13 argentinos, 10 norte americanos, 2 chineses, 4 japoneses, 1 alemão, 3 ingleses e 7 mexicanos. Que fração do total de membros representa os estrangeiros? E os brasileiros? E os orientais?

Matemática no dia-a-dia

1) Numa quinta-feira, após a aula do Exato, 3 alunos resolveram ir a uma pizzaria. João, Carlos e Marta pediram 2 pizzas, uma de Portuguesa e outra de Marguerita, de tamanhos idênticos. A pizza de Calabresa foi dividida em 8 pedaços iguais e a de Margherita em 6 pedaços iguais. João comeu 4 pedaços da pizza de Calabresa e 1 pedaço da de Margherita. Carlos comeu 3 pedaços da pizza de Calabresa e 2 pedaços da de Margherita. Marta comeu o restante. Quem comeu mais pizza? Quem comeu menos?

2) Uma família, antes de ir ao mercado, deseja calcular quantos frascos de xampu deve comprar. Em um mês, a mãe consome $\frac{7}{9}$ de um frasco, a filha caçula consome $\frac{1}{3}$ de um frasco e a mais velha consome $\frac{3}{5}$ de um frasco. Sabendo que a compra deve durar um mês inteiro, quantos frascos a família deve comprar?

3) Na frutaria, um vendedor entregou a um cliente $\frac{5}{9}$ de um cacho de bananas. Considerando que o cliente já tinha $\frac{2}{9}$ de um cacho em suas sacolas, responda:

   a) O cliente passou a ter um cacho completo de bananas?

   b) Caso sua resposta tenha sido "não", quantas bananas o cliente deve comprar para completar um cacho? Considere que um cacho tem 18 bananas.

4) Durante uma discussão entre um casal, um colar de pérolas arrebentou. Metade das pérolas caíram no chão, um quarto delas rolou para debaixo de uma cadeira, um sexto delas caiu no colo da esposa e 3 pérolas continuaram no fio. Quantas pérolas havia originalmente no colar?

5) Taís correu $\frac{11}{6}$km. Roberto correu $\frac{7}{4}$km.

   a) Quanto Taís ainda precisa correr para completar 2 km?

   b) Quanto Roberto ainda precisa correr para completar 2 km?

   c) Qual dos dois percorreu a maior distância?

Operações com Frações - Parte 2

Exercícios de Fixação

1) Calcule:

a) $4 \times \frac{2}{9} =$

b) $5 \times \frac{3}{8} =$

c) $4 \times \frac{3}{10} =$

d) $5 \times \frac{7}{16} =$

e) $9 \times \frac{4}{5} =$

f) $\frac{3}{5} \times \frac{7}{8} =$

g) $\frac{7}{12} \times \frac{8}{21} =$

h) $\frac{9}{10} \times \frac{25}{33} =$

i) $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} =$

j) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} =$

k) $\frac{6}{20} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{2} =$

l) $\frac{2}{10} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{9} =$

2) Resolva:

a) $3 \div 4 =$

b) $5 \div 8 =$

c) $10 \div 12 =$

d) $18 \div 8 =$

e) $\frac{8}{9} \div \frac{4}{9} =$

f) $\frac{5}{8} \div \frac{7}{8} =$

g) $\frac{5}{8} \div \frac{2}{8} =$

h) $\frac{3}{7} \div \frac{6}{7} =$

i) $\frac{3}{4} \div \frac{7}{5} =$

j) $\frac{3}{5} \div \frac{2}{3} =$

k) $\frac{5}{6} \div \frac{8}{9} =$

l) $\frac{4}{15} \div \frac{9}{10} =$

m) $\frac{1}{3} \div 2 =$

n) $2 \div \frac{1}{3} =$

o) $\frac{2}{5} \div 3 =$

p) $3 \div \frac{2}{5} =$

q) $30 \div \frac{3}{4} =$

r) $500 \div \frac{2}{3} =$

s) $360 \div \frac{4}{5} =$

t) $140 \div \frac{7}{9} =$

Exercícios de Imersão

1) Pedro está percorrendo uma trilha de 6km e já percorreu $\frac{2}{3}$ dela. Quantos quilômetros ele já caminhou?

2) Um frasco de remédio contém 250ml. Sabendo que cada dose é de $\frac{25}{3}$ml, o frasco é suficiente para quantas doses?

3) Se $\frac{3}{7}$ do que eu tenho são 195 reais, a quanto corresponde $\frac{4}{5}$ do que tenho?

4) Marcos adora cozinhar. Ele convidou 6 amigos para visitá-lo e, após preparar algumas pamonhas, deu $\frac{4}{3}$ de pamonha para cada um. Quantas pamonhas ele havia feito?

Matemática no dia-a-dia

1) A prefeitura de São José do Rio Preto, no interior do estado de São Paulo, está recapeando todas as principais ruas da cidade, com o intuito de tapar os buracos e aumentar o conforto de seus motoristas. A avenida principal da cidade possui 4500m de extensão. Ela já teve $\frac{5}{9}$ de seu comprimento recapeado. Que fração do total falta ser recapeada? Quantos metros ainda devem ser recapeados?

2) Das figurinhas que eu possuía, $\frac{3}{7}$ eu perdi e $\frac{2}{5}$ foram dadas ao meu irmão. Ainda me sobraram 72 figurinhas. Quantas figurinhas foram dadas ao meu irmão?

3) Quatro quintos de uma turma tiraram A ou B em uma prova. Se há 30 estudantes na turma, quantos tiraram uma nota menor ou igual a C?

4) No verão, a noite corresponde a, tipicamente, $\frac{5}{12}$ de todo o dia. Quantas horas de claridade há por dia?

5) Há 12 crianças em uma festa de aniversário. Os pais do aniversariante compraram 3 tortas e meia, que serão divididas igualmente entre todas as crianças. Que fração de torta cada uma delas vai comer?

6) Giovani comprou, no florista, 36 flores. Ele plantou $\frac{2}{9}$ delas no jardim de frente de sua casa. Quantas flores ele ainda tem para plantar em outros lugares?

Números Decimais

Exercícios de Fixação

1) Expresse as seguintes frações em números decimais:

a) $\frac{1}{10} =$
b) $\frac{1}{100} =$
c) $\frac{3}{10} =$
d) $\frac{52}{100} =$
e) $\frac{23}{1000} =$
f) $\frac{76}{1000} =$
g) $\frac{7}{10} + \frac{8}{100} =$
h) $\frac{2}{100} + \frac{1}{10} =$

2) Escreva os seguintes números decimais na forma de fração. Simplifique quando possível.

a) $0,625 =$
b) $0,125 =$
c) $3,15 =$
d) $14,56 =$
e) $1,085 =$
f) $1,0001 =$
g) $5,12 =$
h) $231,3 =$
i) $98,98 =$
j) $99,999 =$
k) $47,13 =$
l) $8,125 =$

3) Complete com $>$, $<$ ou $=$

a) $0,05$ ___ $0,050$
b) $37,1$ ___ $\frac{371}{10}$
c) $2,54$ ___ $25,4$
d) $97,800$ ___ $97,8$
e) $0,036$ ___ $0,17$
f) $9,999$ ___ $9,97$
g) $3,473$ ___ $3,47$
h) $4,575$ ___ $4,58$

4) Escreva os seguintes números em ordem crescente:

a) $4,94; \quad 4,9; \quad 4,49; \quad 4,09; \quad 4,4; \quad 4,5.$
b) $1,0; \quad 1,23; \quad 0,23; \quad 4,253; \quad 1,1; \quad 1,2; \quad 1,32.$
c) $0,4; \quad 0,42; \quad 4,2; \quad \frac{5}{10}; \quad \frac{750}{1000}; \quad \frac{41}{100}.$

5) Calcule:

a) $3,4 + 5,7 =$
b) $32,5 + 6,3 =$
c) $3,5 - 1,7 =$
d) $18,6 - 5,7 =$
e) $68,7 + 47,01 =$
f) $9,93 + 17,712 =$
g) $9,217 + 0,18 =$
h) $57,13 + 44,899 =$
i) $57,88 - 13,5 =$
j) $14,02 - 12,2 =$
k) $5,27 - 4,281 =$
l) $62,241 - 51,79 =$

Exercícios de Imersão

1) Um computador processa informações em nanossegundos. Um nanossegundo é um bilionésimo de segundo. Escreva esse número como um decimal.

2) Um revisor apontou erros em 235 das 1000 páginas de um livro. Escreva o decimal que representa a fração das páginas que o escritor do livro teve que reescrever.

3) Cinco nadadores estão disputando uma competição. Quatro deles já completaram a prova, com tempos de 9,85s, 9,89s, 9,8s e 9,91s. Qual deve ser o tempo de prova do quinto nadador para que ele vença a prova?

4) Mateus, de férias em Praia Grande, foi com sua família até Ubatuba para fazer um passeio turístico. A viagem foi de 150,27km e, ao chegar em Ubatuba, viajaram de barco até uma ilha próxima, que ficava a 3,58km do porto. Qual a distância total percorrida pela família de Mateus nessa viagem?

5) Melissa foi ao supermercado e pagou uma conta de R$39,46 com uma nota de R$50,00. Quanto de troco ela recebeu?

Matemática no dia-a-dia

1) Daiane é estudante de arquitetura e está construindo uma maquete de uma praça para um trabalho de faculdade. Nessa maquete, haverá uma miniatura de carrinho de sorvete. Para fabricá-la, ela deve confeccionar rodas cujo diâmetro deve estar entre 1,465cm e 1,472cm. Na primeira tentativa, ela fez uma roda de diâmetro igual a 1,4691. Esta roda está dentro das especificações? Justifique.

2) Numa prova de Matemática de seu colégio, Fernando tirou 7,25 e Olívia tirou 7,5. Fernando disse que sua nota era maior, porque $25 > 5$. Ele está certo? Por quê?

3) Laura queria lavar seu carro e por isso estacionou-o em sua garagem, a 56,84m da torneira. No entanto, sua mangueira tinha apenas 50,07m e não conseguiu alcançar o carro. Quão mais perto da torneira ela deveria ter estacionado o carro, para que ele ficasse no raio de alcance da mangueira?

4) A temperatura numa sala de aula, num dia bem quente, era de $26,7^oC$. Ivan esqueceu a porta aberta ao sair da sala e temperatura aumentou $3,4^oC$. Cristiane fechou a porta da sala e ligou o ar condiciado, fazendo a temperatura cair $7,8^oC$. Qual foi a temperatura final da sala?

5) Patricia tem R$425,82 em sua conta bancária. Qual o seu saldo final, após ela fazer um depósito de R$120,75 e uma retirada de R$185,90?

6) Uma companhia de ônibus de Campinas tem a seguinte tabela de preços para viagens destinadas a algumas cidades do estado:

		São Paulo	**Ubatuba**	**Taubaté**
Adultos	**trecho único**	R$25,60	R$79,50	R$50,65
	ida e volta	R$46,08	R$143,10	R$91,17
Crianças	**trecho único**	R$15,36	R$47,70	R$30,39
	ida e volta	R$27,65	R$85,86	R$54,70

a) Paulo está prestes a entrar de férias e pretende passá-las com sua mãe, que mora em Taubaté. Para isso, ele compra uma passagem só de ida, mas um compromisso profissional de última hora o obriga a ir e voltar de São Paulo antes de poder embarcar para Taubaté. Quanto ele gastou com as duas viagens?

b) Luana vai passar o final de semana em Ubatuba com seu filho, que tem 5 anos de idade. Quanto ela pagará nas passagens, se ela deve voltar ao fim do domingo?

Operações com números decimais - parte 2

Exercícios de Fixação

1) Calcule:

a) $24,5 \times 1000 =$

b) $77,89 \times 100 =$

c) $8,33 \times 10 =$

d) $1000 \times 8,16 =$

e) $0,08 \times 3 =$

f) $1,5 \times 4 =$

g) $6 \times 0,07 =$

h) $0,8 \times 9 =$

i) $0,6 \times 0,8 =$

j) $1,4 \times 0,2 =$

k) $5,6 \times 0,05 =$

l) $13,1 \times 0,001 =$

2) Resolva:

a) $1801 \div 100 =$

b) $79,4 \div 10 =$

c) $0,19 \div 10 =$

d) $8,81 \div 1000 =$

e) $1,6 \div 4 =$

f) $1,4 \div 2 =$

g) $0,48 \div 6 =$

h) $1,17 \div 9 =$

i) $6,7 \div 0,1 =$

j) $9,2 \div 0,2 =$

k) $4,4 \div 0,4 =$

l) $2,7 \div 0,9 =$

m) $2,31 \div 0,3 =$

n) $21,87 \div 0,9 =$

o) $0,4 \div 0,02 =$

Exercícios de Imersão

1) Bernardo gasta R$136,50 na cantina da escola todo mês. Quanto ele gasta, no total, em 9,4 meses de aula?

2) Joaquim trabalha como jardineiro em seu tempo livre, para juntar dinheiro. Se ela ganha R$12,25 por hora de trabalho, qual será seu salário após trabalhar 12 horas?

3) O carro de Camila percorre 13,4km por litro de combustível. Sabendo que ele é movido a gasolina e que o litro da gasolina custa R$3,29, responda:

   a) Quantos quilômetros o carro de Camila consegue percorrer com o tanque cheio, se seu tanque tem capacidade de 50 litros?

   b) Qual é o preço pago por Camila para encher o tanque de seu carro?

4) Um maratonista correu 288,73km em 61,5 dias de treino. Quantos quilômetros ele percorreu por dia de treino, em média?

5) O dono de uma doceria comprou 3,24kg de balas e pretende distribuí-las em 9 potes iguais. Se cada pote de doce deve ter o mesmo peso, quanto de bala ele colocará em cada pote?

Matemática no dia-a-dia

1) Otávio comprou um carro novo e vai pagá-lo em 36 prestações, sem juros. Se o carro custou R$36.061,00, quanto ele vai pagar por mês? Aproxime sua resposta para o centavo mais próximo.

2) Qual é a velocidade média de um carro que percorre 855,75km em 10,5 horas?

Frações e números decimais

Exercícios de Fixação

1) Nomeie as seguintes frações:

a) $\frac{3}{9}$ b) $\frac{15}{12}$ c) $\frac{28}{69}$ d) $\frac{89}{1000}$

2) Determinar se cada par de frações a seguir é equivalente.

a) $\frac{8}{2}$ e $\frac{4}{1}$ b) $\frac{1}{3}$ e $\frac{9}{30}$ c) $\frac{9}{15}$ e $\frac{36}{60}$ d) $\frac{9}{12}$ e $\frac{15}{20}$

3) Para cada fração, encontrar uma fração equivalente com denominador 100.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{9}{4}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{7}{20}$ e) $\frac{20}{400}$

4) Comparar cada par de frações a seguir, preenchendo as lacunas com $>$, $<$ ou $=$.

a) $\frac{2}{3}$ ___ $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{8}$ ___ $\frac{7}{10}$ c) $\frac{4}{11}$ ___ $\frac{5}{12}$

5) Simplificar cada fração a seguir.

a) $\frac{3}{9}$ b) $\frac{5}{15}$ c) $\frac{4}{24}$ d) $\frac{14}{35}$ e) $\frac{48}{90}$

6) Calcule:

a) $\frac{1}{4}+\frac{2}{7}$ b) $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}$ c) $\frac{5}{18}+\frac{1}{8}$ d) $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$

e) $\frac{3}{4}-\frac{8}{15}$ f) $\frac{14}{15}-\frac{5}{6}$ g) $\frac{5}{7}\times\frac{8}{15}$ h) $\frac{4}{5}\times\frac{4}{10}$

i) $\frac{11}{16}\times\frac{13}{22}$ j) $\frac{4}{6}\div\frac{1}{3}$ k) $\frac{14}{16}\div\frac{14}{6}$ l) $\frac{13}{16}\div\frac{2}{3}$

7) Converta cada número decimal abaixo para sua respectiva fração decimal.

a) 821 b) 5,71 c) 0,195 d) 0,0014

8) Coloque cada conjunto de números em ordem crescente.

a) 5,17 e 5,180
b) 3,95 e 3,88
c) 0,78 e 0,7
d) 0,889 e 0,89

9) Calcule:

a) $86 + 30{,}1$
b) $17{,}86 + 13{,}67$
c) $88{,}1 + 19{,}525$
d) $93{,}72 - 13{,}21$
e) $67 - 35{,}2$
f) $21 - 19{,}12$
g) $7{,}1 \div 1000$
h) $6{,}381 \times 100$
i) $15{,}4 \div 100$
j) $6{,}4 \times 2$
k) $0{,}3 \times 3{,}21$
l) $8{,}26 \times 8{,}1$
m) $72 \div 0{,}9$
n) $54{,}4 \div 0{,}34$
o) $4{,}875 \div 0{,}65$

Exercícios de Imersão

1) Giovana e Ricardo combinaram de se encontrar em uma pizzaria para jantar. Giovana comeu $\frac{3}{8}$ da pizza pedida, enquanto Ricardo comeu $\frac{1}{4}$ dela.

a) Que fração da pizza os dois amigos comeram, no total?

b) Considerando que os dois tenham decidido dividir igualmente o restante da pizza, que fração dela cada um deles levou para casa?

2) Um trem chega estação de São Paulo com 150 passageiros a bordo. Desse total, $\frac{2}{5}$ desembarcam e então 35 passageiros embarcam no trem.

a) Quantos passageiros desembarcam na estação de São Paulo?

b) Quantos passageiros estão a bordo do trem quando ele sai da estação?

3) Numa liquidação, o preço de um jogo é reduzido em um quarto.

a) Que fração do preço original o novo preço representa?

b) Qual é o novo preço de venda, se o preço original era de R$50,00?

4) A temperatura numa sala de aula era de 31,3^{o}C. Por causa do calor, Clara resolveu abrir a porta e todas as janelas, o que fez a temperatura da sala cair 3,8^{o}C.

a) Após a abertura da porta e das janelas, qual ficou sendo a temperatura da sala?

b) Pedro ligou os ventiladores, o que causou uma queda de mais 1,4^{o}C na temperatura local. Qual foi a temperatura final da sala?

5) Um piloto de Fórmula 1 consegue percorrer, com seu carro, 267,75 quilômetros em uma hora. Que distância ele consegue percorrer, com o mesmo carro, em cinco horas?

6) Um clipe de papel é feito com 9,2 centímetros de um fio metálico. Qual é o maior número de clipes de papel que podem ser produzidos com 10 metros de fio? Lembre-se de que 1 metro equivale a 100 centímetros.

Matemática no dia-a-dia

1) Uma escola deseja fazer uma área recreativa, reaproveitando um terreno baldio vizinho que tem a forma de um retângulo. Um grupo de estudantes ficou encarregado de planejar a área, levando em consideração as demandas de toda a escola. Os estudantes decidem usar $\frac{1}{4}$ da área do terreno para uma quadra de vôlei e outros $\frac{3}{8}$ da área para um campo de futebol. Considerando que $\frac{1}{10}$ da área total será pavimentada, que fração da área do terreno ainda pode ser utilizada como parquinho para as crianças?

2) A tabela a seguir traz informações sobre o preço de passagens de ônibus partindo de Londres para outras três cidades na Inglaterra. Os preços são dados em libras esterlinas, a moeda local.

		Hull	**York**	**Leeds**
Adulto	*somente ida*	£12,50	£15,60	£10,25
	ida e volta	£23,75	£28,50	£19,30
Criança	*somente ida*	£8,50	£10,80	£8,25
	ida e volta	£14,90	£17,90	£14,75

a) Qual é o custo total de uma viagem de ida e volta para York, para um adulto e duas crianças?

b) Qual é o custo total de uma viagem de ida e volta para Hull e uma viagem somente de ida para Leeds, para quatro adultos?

Matemática

Lista de Exercícios - Aula 9

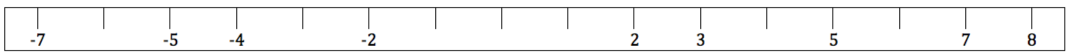
Mês da Matemática

Projeto de Extensão Comunitária - Curso Exato

Conjuntos numéricos e operações com números negativos

Exercícios de Fixação

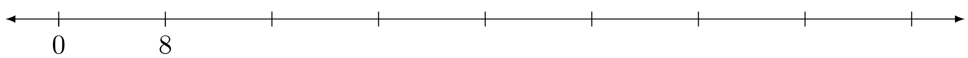
1) Considere a régua a seguir, com marcações em cada inteiro pertencente ao intervalo de -7 a +8.



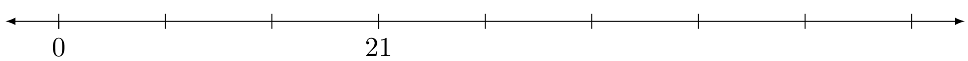
a) Nem todos os inteiros estão identificados na régua. Preencha as marcações faltantes.

b) Crie marcações para os números: $1,5$; $\frac{4}{5}$; $-\frac{20}{3}$; $-5,1$; $2,4$.

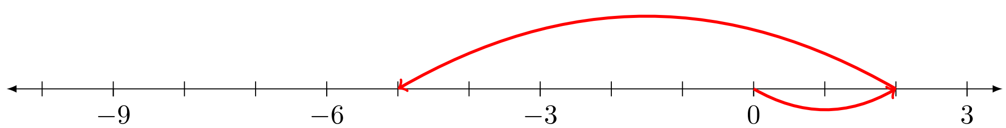
2) Identifique o número 48 na reta numérica abaixo.

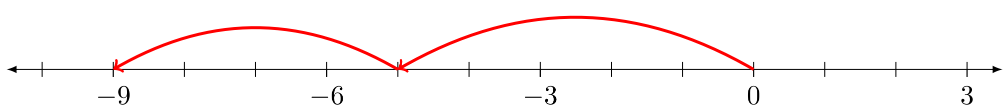


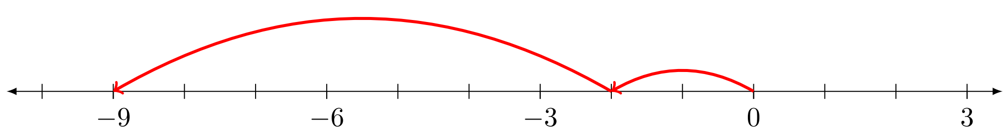
3) Identifique o número 35 na reta numérica abaixo.



4) Que modelo de reta numérica representa a operação $-2 + (-7)$?

a)


b)


c)


5) Resolva:

a) $1 + (-2) =$

b) $-23 + 72 =$

c) $-12\,435 - 83\,726 =$

d) $-3 - 5 =$

e) $2 - (-9) =$

f) $3 - (-1) =$

g) $0 - 4 =$

h) $-234 - (-123) =$

i) $83\,762 - 12\,345 =$

j) $111\,111 - 999\,999 =$

k) $-3 \times 2 =$

l) $-5 \times 8 =$

m) $13 \times (-1) =$

n) $42 \times 83 =$

o) $-372 \times (-23) =$

p) $-837 \times (-15) =$

q) $21 \div -3 =$

r) $8 \div -2 =$

s) $-72 \div 8 =$

t) $-34 \div (-1) =$

u) $5\,202 \div (-34) =$

6) Preencha as lacunas:

a) $3 \;\_\_\; (-4) = -12$

b) $-4 \;\_\_\; (-4) = 1$

c) $-7 \;\_\_\; (-3) = -10$

d) $8 \;\_\_\; 15 = -7$

e) $23 \times \;\_\_\_\_\; = -46$

f) $\_\_\_\_ \div (-4) = 5$

g) $\_\_\_\_ \times 3 = 27$

h) $\_\_\_\_ + \_\_\_\_ = -3$

i) $13 - \;\_\_\_\_\; = -2$

j) $24 + \;\_\_\_\_\; = -115$

k) $-342 \times \;\_\_\_\; = -1\,026$

l) $10\,008 \div \;\_\_\_\; = -834$

Exercícios de Imersão

1) Indique o tipo de números (entre naturais, inteiros e racionais) mais indicado para representar cada uma das grandezas a seguir:

a) Saldo bancário;

b) Comprimento de um varal;

c) Temperatura em uma cidade;

d) Número de salgados encomendados para uma festa de aniversário.

e) Duração de um jogo de futebol;

f) Tempo de prova de um nadador;

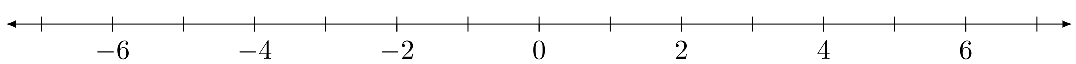
g) Número de pessoas em um show;

h) Saldo de gols de um time de futebol;

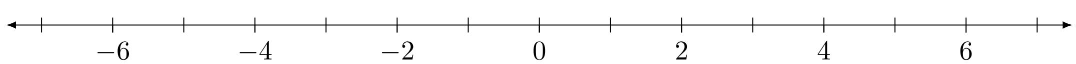
i) Variação de estoque de uma loja no período de um mês.

2) Represente, em cada reta numérica a seguir, a operação indicada.

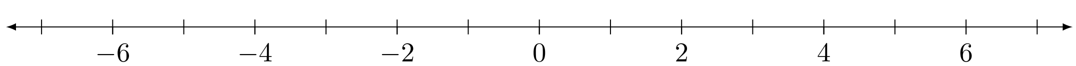
a) $1 + 3$:



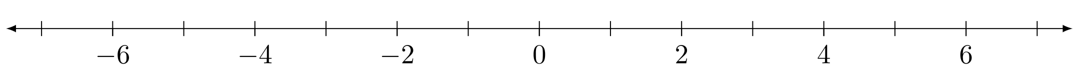
b) $6 - 4$:



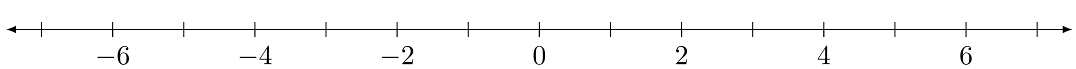
c) $-5 + 2$:



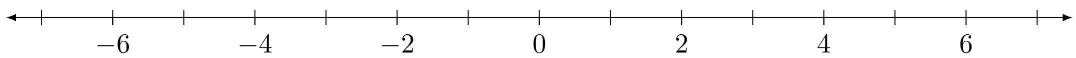
d) $4 - 7$:



e) $2 - (-5)$:



f) $-3-(-6)$:



3) Um submarino estava submerso a 400 m abaixo do nível do mar. Se ele subir 250 m, qual será sua nova posição?

4) O Império Romano foi declarado em 27 a.C. e durou até 476 d.C., quando Roma sucumbiu a uma invasão bárbara. Quantos anos durou o Império?

5) As Guerras Púnicas, travadas entre Roma e Cartago pelo controle do Mar Mediterrâneo, duraram de 264 a.C. a 146 a.C.. Quantos anos duraram as Guerras Púnicas?

Matemática no dia-a-dia

1) Sérgio é uma pessoa muito cuidadosa quando o assunto é sua conta bancária: ele verifica regularmente seu extrato bancário para manter controle de seus gastos. Tendo tirado um extrato parcial do mês de janeiro de 2015, ele observou que o pagamento da fatura de seu cartão de crédito estava borrado. Sérgio decidiu calcular qual deveria ser o valor da fatura baseado no saldo inicial e final do período e as movimentações da conta. Qual foi o valor da fatura?

Banco do Sérgio

Data	**Descrição**	**Valor**
03/01/2015	Saldo anterior	R$ 1 350,00
03/01/2015	Compra com cartão de débito	R$ 25,30
05/01/2015	Saque em terminal	R$ 50,00
07/01/2015	Depósito "MESADA MAMÃE"	R$ 300,00
10/01/2015	Pagamento cartão de crédito	
11/01/2015	Pagamento com cartão de débito	R$ 31,75
12/01/2015	Saldo disponível	R$ 971,15

2) Chamamos de amplitude térmica a diferença entre as temperaturas mínima e máxima de certo período de tempo. Um programa de previsão de tempo divulgou as temperaturas previstas para algumas cidades ao redor do mundo:

	Campinas (Brasil)	**Londres** (Inglaterra)	**Helsinque** (Finlândia)	**Quebec** (Canadá)	**Nova Iorque** (EUA)
mínima	18	4	-4	-11	6
máxima	26	9	3	-1	13

a) Qual é a menor amplitude térmica registrada? Ela pertence a qual cidade?

b) Qual é a maior amplitude térmica registrada? Ela pertence a qual cidade?

3) O Monte Everest, o pico mais alto do mundo, fica 8 848 metros acima do nível do mar. O Mar Morto, lago salino mais profundo do mundo, tem profundidade de 304 metros. Além disso, as margens do Mar Morto ficam a 429 metros abaixo do nível do mar. Qual é a diferença de altura entre o pico do Monte Everest e o ponto mais fundo do Mar Morto?

Matemática

Lista de Exercícios - Aula 10

Mês da Matemática

Projeto de Extensão Comunitária - Curso Exato

Potenciação

Exercícios de Fixação

1) Usando a definição de potência, reescreva os números dados como produtos (multiplicações) com fatores iguais. Em seguida, efetue as multiplicações, determinando o seu valor.

a) $2^5 =$ c) $10^0 =$ e) 4^3= g) $(-2)^3 =$ i) $\frac{2}{3}^2 =$

b) $3^7 =$ d) $5^4 =$ f) $10^{-2} =$ h) $-2^3 =$ j) $(-\frac{2}{3})^3$

2) Determine os valores abaixo.

a) $3^0 =$ b) $0^4 =$ c) $(\frac{4}{5})^{-2} =$ d) $(2^3)^2 =$ e) $-\frac{(2)^2}{(-3)^2} =$ f) $2^{3^2} =$

3) Determine os valores de x para que as expressões abaixo sejam igualdades.

a) $1000^x = 1$ b) $(-1)^x = -1$ c) $(-1)^x = 1$ d) $\frac{3}{9^x} = \frac{1}{27}$

Exercícios de Imersão

1) Utilizando as propriedades das potências, simplifique os cálculos e encontre os resultados.

a) $2^7.2^7 =$

b) $\left(\frac{1}{7}\right)^3 . \left(\frac{1}{7}\right)^4 =$

c) $(-3)^4 : (-3)^2 =$

d) $5^6 : 5^7 =$

e) $13^7 : 13^3 =$

f) $6^5 : 2^5 =$

g) $15^3 : 3^5 =$

h) $2^3.\frac{2^4}{4^2} =$

i) $2^0.0^2 =$

j) $(-3)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 =$

k) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^2 =$

l) $(-1)^{1000}.\left(\frac{(-1)^{10001}}{1^{1000}.1^{10001}}\right)$

2) Reduza cada um dos itens a seguir a uma única potência.

a) $n^3\frac{n^2}{n^{-2}} =$ b) $\frac{3^3}{(\frac{1}{3})^{-2}} =$ c) $(n^2.n^3)^{-2} =$ d) $n^0.[-(n^0)]^3 =$ e) $(\frac{n^2}{n^3})^3 =$

3) Utilize as propriedades das potências para simplificar os cálculos.

a) $2^2.2^6 : 2^4 =$ b) $4^8 : 4^4 - 3^3 : 3 =$ c) $(5^2)^3.(5^2)^{-4} =$ d) $\frac{6^9 : 6^2}{(6^2.6)^3} =$

4) Reduza a uma única potência:

a) $a^4 \cdot a^3 =$

b) $k^6 \cdot k^5 =$

c) $x^b \cdot x^3 =$

d) $a^3 \div a^2 =$

e) $p^7 \div p^9 =$

f) $x^a \div x^b =$

g) $y^3 \div y =$

h) $(x^2 \cdot x^8)^3 =$

i) $(a^2 \cdot a^4)^q =$

j) $\left(\frac{x^5}{x^2}\right)^y =$

k) $(u^3 \div u^2)^4 =$

Matemática no dia-a-dia

1) Pedro recebeu um e-mail com uma mensagem de amizade. No 1º dia ele enviou esse e-mail para 3 pessoas. Essas 3 pessoas leram no 2º dia e enviaram para mais 3 pessoas e assim sucessivamente. Quantas pessoas leram o e-mail no 4º dia considerando que todas as pessoas fizeram os procedimentos acima? E no sexto dia?

2) Qual dos números a seguir é maior: 3^{31}; 8^{10}; 16^{8}; 81^{6}; 243^{4}?

3) *The Internet Archive* (http://www.archive.org/) é uma organização sem fins lucrativos com o objetivo de catalogar e armazenar todas as páginas WEB da Internet, desde 1996. Atualmente, o sistema é gerenciado por cerca de 800 computadores pessoais e ele dispõe de aproximadamente três petabytes de memória para armazenamento. Cada petabyte equivale a 2^{20} gigabytes. Admitindo-se que um DVD comum seja capaz de armazenar quatro gigabytes, determine o número de DVDs necessários para se armazenar três petabytes.

4) Na revista Superinteressante, foi publicado um artigo afirmando que um fio de cabelo de uma pessoa cresce a uma taxa de 0,06cm ao dia. Sabendo-se que a distância entre duas camadas de átomos desse mesmo fio de cabelo é de 1,0*angstrom* (10^{-10}m) aproximadamente, qual é o número de camadas de átomos que surgem, a cada hora?

5) No quadrado mágico abaixo, cada letra representa uma potência de base 2. Descubra a potência que cada letra representa, sabendo que o produto (resultado da multiplicação) dos números de cada linha, coluna ou diagonal é 2^{6}.

2^5	**A**	2^3
B	2^2	**C**
2^1	**D**	**E**

Figura 1: Quadrado Mágico.

Radiciação

Exercícios de Fixação

1) Decomponha os seguintes números em fatores primos.

a) 81 b) 168 c) 309 d) 451 e) 476

2) Encontre os valores exatos para as raízes quadradas.

a) $\sqrt{121}$
b) $\sqrt{289}$
c) $\sqrt{1024}$
d) $\sqrt{\dfrac{25}{36}}$
e) $\sqrt{\dfrac{225}{169}}$
f) $\sqrt{\dfrac{48}{300}}$
g) $\sqrt{0,04}$
h) $\sqrt{0,0004}$
i) $\sqrt{0,64}$
j) $\sqrt{1,21}$
k) $\sqrt{0,0036}$
l) $\sqrt{4,84}$
m) $\sqrt{0,0081}$
n) $\sqrt{0,0121}$
o) $\sqrt{0,1024}$
p) $\sqrt[3]{8}$
q) $\sqrt[3]{64}$
r) $\sqrt[3]{512}$
s) $\sqrt[3]{1000}$
t) $\sqrt[4]{16}$
u) $\sqrt[4]{625}$
v) $\sqrt[5]{1024}$

3) Utilize as propriedades de operações com radicais para efetuar os cálculos a seguir.

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$
b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$
c) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{45}$
d) $\dfrac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}}$
e) $\dfrac{\sqrt{99}}{\sqrt{44}}$
f) $\dfrac{\sqrt{32}}{\sqrt{50}}$
g) $\sqrt{70}\cdot\sqrt{14}\cdot\sqrt{5}$
h) $\dfrac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{28}}{\sqrt{35}}$

Exercícios de Imersão

1) Simplifique os radicais a seguir.

a) $\sqrt{8}$
b) $\sqrt{32}$
c) $\sqrt{112}$
d) $\sqrt[3]{16}$
e) $\sqrt[3]{108}$
f) $2\sqrt{2}+5\sqrt{2}$
g) $5\sqrt{29}-5\sqrt{29}$
h) $\sqrt{8}+\sqrt{32}$
i) $-5\sqrt{3}-3\sqrt{3}$
j) $\sqrt{96}-\sqrt{6}$
k) $-3\sqrt{12}+3\sqrt{3}$
l) $3\sqrt[3]{-3}+3\sqrt[3]{81}$
m) $\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}$
n) $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}$
o) $3\sqrt{3}\left(4-3\sqrt{27}\right)$

2) Encontre uma aproximação por falta e uma por excesso para cada uma das seguintes raízes, levando em consideração até a segunda casa decimal. Em seguida, determine um valor arredondado para essas raízes, trabalhando com uma única casa decimal.

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt{4.5}$
d) $\sqrt{5}$
e) $\sqrt{7}$
f) $\sqrt{12}$
g) $\sqrt{45}$
h) $\sqrt{90}$
i) $\sqrt[3]{15}$
j) $\sqrt[3]{30}$
k) $\sqrt[3]{28}$
l) $\sqrt[3]{1030}$

Problemas

1) Sabendo que o volume de um cubo mede 512 cm^3, calcule o comprimento de uma de suas arestas e o comprimento da diagonal de uma de suas faces.

2) Durante uma aula de matemática o professor perguntou aos alunos: "Quais são os números que, elevados ao quadrado, resultam no valor quatro?". João respondeu que havia apenas um número que, quando elevado ao quadrado, dava quatro. Disse se tratar da raiz quadrada de quatro, que é dois. Ana, por sua vez, discordou de João, dizendo que tanto o *menos dois* quanto o *dois* são raízes quadradas de *quatro*, já que qualquer um deles, quando elevado ao quadrado, dava *quatro*. Alguma das respostas está completamente correta? Por escrito, justifique sua resposta.

Expressões Algébricas

Exercícios de Fixação

1) Classifique os polinômios abaixo em monômio, binômio ou trinômio.

a) $4x + y$ b) $3xy^2$ c) $xy^2 + xy$ d) $5x^2 + 2xy + 3$ e) $y^2 + 2y + 1$

2) Calcule o valor numérico das seguintes expressões.

a) $c(\ell) = 2\ell$. Valor de $c(3)$

b) $v(x) = \frac{x}{2}$. Valor de $v(3)$

c) $z(w) = \frac{5}{w+1} + \frac{3}{2}$. Valor de $z(1)$.

d) $p(y) = -\frac{3y}{7} + 2^y$. Valor de $p(2)$

e) $k(a) = 0,30a + 4,20$. Valor de $k(3)$.

f) $k(a) = 0,30a + 4,20$. Valor de $k(0,2)$.

g) $m(n) = \frac{6}{14}n + \frac{3}{7}$. Valor de $m(6)$.

3) Calcule o valor numérico das expressões:

a) $3x + 5$, para $x = 3$

b) $3x + 5$, para $x = 10$

c) $3x + 5$, para $x = -5$

d) $z^2 + 3z$, para $z = 1$

e) $z^2 + 3z$, para $z = -2$

f) $z^2 + 3z$, para $z = -8$

g) $2a + 7b$, para $a = -1$ e $b = \frac{3}{7}$

h) $2a + 7b$, para $a = \frac{3}{4}$ e $b = 1,5$

i) $a^2 - 2ab + b^2$, para $a = 1$ e $b = 2$

j) $a^2 - 2ab + b^2$, para $a = -3$ e $b = 4$

k) $a^2 - 2ab + b^2$, para $a = -5$ e $b = -2$

l) $(a - b)^2$, para $a = 1$ e $b = 2$

m) $(a - b)^2$, para $a = -3$ e $b = 4$

n) $(a - b)^2$, para $a = -5$ e $b = -2$

4) Calcule o valor numérico das expressões a seguir, em cada um dos casos.

a) $x^2 - 5x + 6$ para:

(i) $x = 0$

(ii) $x = 1$

(iii) $x = 2$

(iv) $x = -2$

b) $\frac{3}{4}ab - \frac{1}{2}a^2b - 2$ para:

i. $a = b = 0$

ii. $a = 0$ e $b = 1$

iii. $a = 2$ $b = 1$

iv. $a = -1$ e $b = -2$

Exercícios de Imersão

1) Calcule o valor numérico das seguintes expressões algébricas.

a) $2x^4 + 4x - 5$, com $x = 3$

b) $x^{-1} - x^{\frac{1}{2}}$, com $x = 4$

c) $\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, com $a = 64$ e $b = 36$

d) $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 + xy - 3x - 3y}$, com $x = -2$ e $y = 4$

e) $\frac{20x^3yz^2}{35xy^2z^2}$, com $x = 3$, $y = 4$ e $z = 5$

2) Três números consecutivos somam 21. Quais são eles?

Matemática no dia-a-dia

1) Em um retângulo, a medida do comprimento é o triplo da medida da largura. Use a letra x para representar a medida da largura.

    a) Que expressão representa o comprimento do retângulo?

    b) Que expressão representa o perímetro do retângulo?

    c) Qual é o perímetro do retângulo se a largura medir 3 cm?

2) Em uma família, há 3 crianças e todas elas recebem mesada. A mais velha recebe duas vezes o valor que o segundo filho recebe, e este recebe o triplo do filho caçula.

    a) Se x representa a mesada do filho caçula, determine quanto os pais gastam por mês com a mesada dos filhos.

    b) Qual é o valor gasto no total se $x = R\$15,00$?

3) Se x for a medida do lado de um quadrado, determine:

    a) o termo que representa sua área, qual é o seu coeficiente e qual é a sua parte literal;

    b) o termo que representa seu perímetro, qual é o seu coeficiente e qual é a sua parte literal;

Redução de Termos Semelhantes

Exercícios de Fixação

1) Reduza os termos semelhantes.

a) $-4x + 6y + 10x - 2y - x$
b) $x + 7x + 10y - 3x$
c) $2x - 8y - 6y - y - 9x$
d) $4x + 8b - 8x - 15b + 4y$
e) $x - y + 4x - 2y - 4x$
f) $ab^2 + 3ab + (-5ab^2)$
g) $5x + 3x^2y - 4x^2y + x - 3y$
h) $4p^2 - (+5mn^4) + 14mn^4 - 4q + 3p^2$
i) $(2x^3 + 3x^2 - 5x + 4) + (16x - 2x^2)$
j) $(2a + 3b) + (5a - 4b)$
k) $(3mn + 2m^2 - n^3) - (4m^2 + 3n^3 - 12mn)$
l) $(4xy - 5y^3 + 9x^2) + (y^3 - 2xy + 8x^2)$
m) $\frac{3}{2} + \frac{1}{4}y - \frac{1}{3}x + 2y$
n) $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8}y - \frac{3}{4}x + \frac{7}{12}y$
o) $\frac{a}{2} + \frac{b}{4} - \frac{a}{4} + \frac{b}{8}$
p) $\frac{1}{3}x + 9y^2 - (-\frac{1}{2}x) + \frac{3}{4}y^2$

2) Reduza os termos semelhantes:

a) $9a + 5b - 4a - b + 2a$
b) $x^2 + 6x^2 - 4x + x + 1$
c) $4x^2 - 5x - 2 - x^2 + x + 2$
d) $3x + 4 - 5x^2 + 7x - 4x^3 + 6x^2 - 7 + 2x + 7x^3$
e) $-3x - 2y + 1 + 7x - 5y + 3 - 2x - y + 9 + 2x + y$
f) $x^3 + 2x^2 + 3x - 4 - 3x^3 + 4x + 1 - 5x^2 + x - 3 + 3x - 4$
g) $25x^2 - 10xy + 9y^2 - 16x^2 + 12xy - 9y^2 - x^2 + y^2$
h) $x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2x - 1 + 4 - 3x - 3x^2 + 4x^3 - x^4 + 5x^3 - 2x$

Exercícios de Imersão

1) Calcule:

a) $A + B$, com $A = 3x + 2y - 6$ e $B = 2x - 7y + 4$
b) $A + B + C$, com $A = x^2 - 2x + 2$; $B = 3x^2 + 4x - 5$ e $C = 4x^2 - 5x + 2$
c) $(3x + 4) + (6x - 1)$
d) $(2a + 5b) + (7a - 6b)$
e) $(3x^2 + 2x - 1) + (-2x^2 + 4x + 2)$
f) $(3a - 2b + c) + (-6a - b - 2c) + (2a + 3b - c)$
g) $(3x - 4y + 7z) + (2x - 3y - z)$
h) $(x^2 - 2x + 1) + (3x^2 + 4x - 2) + (x^2 - 2x + 2)$
i) $(2x^3 + 3x^2 - 2x + 1) + (-2x^3 - 3x^2 + 7x - 2)$
j) $(y - 7x) + (3x - 6y) + (2y - 7x) + (-x - 3y)$

2) Calcule:

a) $A - B$, com $A = 3x + 2y + 1$ e $B = 2x + y - 1$
b) $A - B$, com $A = a + 3b + 5$ e $B = 2a - 5b - 8$
c) $C - D$, com $C = -x^2 + 5x - 1$ e $D = 2x^2 + 1$
d) $E - F$, com $E = a + 2b - 3c$ e $F = 3a - b + c$
e) $G - H$, com $G = x^2 - x + 3$ e $H = 2x^2 + 3x - 5$
f) $A - B + C$, com $A = 4a + b - c$; $B = 2a + 4b - 5c$ e $C = 3a - 4b + 3c$
g) $(7x + 5) - (2x + 3)$
h) $\left(3x^2 - \dfrac{1}{3}\right) - \left(6x^2 - \dfrac{4}{5}\right)$
i) $\left(2x^2 + \dfrac{5x}{2} - 2\right) - \left(x^2 + 9x + \dfrac{2}{5}\right)$
j) $(2a - 3ab + 5b) - (-a - ab + 2b)$
k) $(2x^2 + 3x - 1) + (3x^2 + 4x + 5) - (x^2 + 3x + 3)$
l) $(3x + 2y + z) - (2x + y - z) - (4x - 3y - 3z)$

3) Dados $A = x^2 + 3x + 3$, $B = 3x^2 - 2x - 1$ e $C = -x^2 - x + 2$, calcule:

a) $A - B - C$
b) $-A - B + C$
c) $-C + B - A$

4) Calcule, reduzindo ao mesmo denominador:

a) $\dfrac{5x-3}{6} + \dfrac{7x-1}{4} + \dfrac{4x+2}{3}$
b) $2x - \dfrac{7x+4}{5} - \dfrac{3-x}{2}$
c) $5x^2 - \dfrac{4x+2}{3} + \dfrac{x-5}{4}$
d) $\dfrac{9x+5}{2} - \dfrac{x^2-1}{4} + \dfrac{x+3}{3}$

5) Qual é o polinômio que, adicionado a $P = -3x^2 - 2x + 1$, dá como resultado $Q = x^2 - 5x - 10$?

6) Quanto dá a soma do sucessor do triplo com o antecessor do dobro de um inteiro n?

Matemática no dia-a-dia

1) Uma corrida de táxi custa a quantia fixa de p reais mais a quantia de q reais por quilômetro rodado. Mário precisa fazer duas corridas, uma de 10km e outra de 12km. Quanto Mário vai gastar ao todo?

Equação de 1º Grau

Exercícios de Fixação

1) Ordene segundo os expoentes decrescentes de x e diga qual o grau de cada polinômio:

a) $A = 2x + 5x^2 + 5$

b) $B = 81 - 5x + x^3$

c) $C = 3x^2 - x + x^4$

d) $D = 3(x^2 + 4) - 6(x - x^2) - 9x^2$

e) $E = 8x + x^2 - 12 - x^2$

f) $F = 3x + 6x^2 - 9x^3$

2) Qual é o grau do polinômio?

a) $A = x^4 - x^3 + 5x^2 - 2x^4 - x^3 - x^2 + x^4 + 2x^2$

b) $B = 0x^4 + 5x^3 + 4x^2 + 6x - 5 - 5x^3 + 4x^2 + 4x - 5$

c) $C = 2x^3 + x + 4 - x^3 + 2x - 9 - 3x - x^3 + 5$

3) Verifique se 2 é raiz das seguintes equações:

a) $x^2 = 4$

b) $-2x = 4$

c) $2^x = 4$

d) $x - 2 = 4$

4) Resolva as equações, considerando $U = \mathbb{Z}$.

a) $x + 5 = 12$

b) $y + 9 = 3$

c) $x - 12 = 15$

d) $y + 5 = -4$

e) $2x = 8$

f) $4a = 30$

g) $3x = -12$

h) $3x = 10$

i) $5x = 90$

j) $2j = 45$

k) $4x + 5 = 3x + 15$

l) $x + 10 = 18 - 2x$

5) Calcule o valor de x nas equações, sendo $U = \mathbb{R}$:

a) $4(x + 3) = 20$

b) $5(2x - 1) = 2(x + 4)$

c) $10 - 2(x + 3) = 8 + 3(2x + 5)$

d) $x - 2(x - 1) = 4 - 3(x - 2)$

e) $2x - 3(4 - x) = 5 + 4(2x + 1)$

f) $6x - 7(1 - x) - (10x + 4) = 0$

g) $\dfrac{3x}{5} - \dfrac{1}{2} = x - \dfrac{2}{5}$

h) $\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{2x}{6} - \dfrac{1}{3}$

i) $\dfrac{3y}{2} - 1 = \dfrac{3}{4} - 2y$

j) $\dfrac{3}{2}x - \dfrac{4}{5} = 2x$

k) $\dfrac{3}{4} - \dfrac{y}{6} = \dfrac{y}{8} - \dfrac{1}{3}$

l) $2x + \dfrac{1}{5} - \dfrac{x}{10} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{8}{5}$

6) Resolva as equações:

a) $x + 13 = 126$

b) $2k + 50 = 3k$

c) $x = 100$

d) $14b = 12b + 21$

e) $(a - 7) \cdot 8 = 16a$

f) $\dfrac{(2 \cdot \Delta + 23)}{7} = 21$

g) $\dfrac{p}{7} = \dfrac{2p-4}{35}$

h) $4x - 8 = 10$

i) $7x - 2 = -4x + 5$

j) $2x - 8 = 5 - (x - 5)$

Exercícios de Imersão

1) O número 3 é raiz da equação $4x - 21 = x + 5$? Por quê?

2) Considere que a posição de uma moto, em função do tempo, que anda constantemente a 30m/s é $S(t) = 30t + 10$. Qual é a posição da moto no instante $t = 3.5s$?

a) 35 m b) 105 m c) 115 m d) 135 m e) 350 m

3) Se a é igual a 3, qual a solução da equação: $ax - 27 = -x + 5$?

4) Existem três números inteiros consecutivos com soma igual a 393. Que números são esses?

5) Qual é o número cujo dobro somado com 5 é igual ao seu triplo menos 19?

Matemática no dia-a-dia

1) Uma casa com 260m^2 de área construída possui 3 quartos de mesmo tamanho. Qual é a área de cada quarto, se as outras dependências da casa ocupam 140m^2?

Modelagem e Resolução de Problemas

Exercícios de Fixação

1) Representando um número pela letra x, escreva cada sentença na linguagem matemática.

a) o dobro desse número
b) esse número menos um
c) o triplo desse número menos dois
d) o quádruplo desse número mais 10
e) dez vezes a diferença entre esse número e quatro
f) o triplo da soma entre esse número e oito
g) o dobro da soma entre o dobro desse número e um
h) quatro vezes a razão entre esse número e dois

2) Representando um número pela letra y, escreva cada sentença na linguagem matemática.

a) metade desse número
b) três quartos desse número
c) o número mais dois quintos desse número
d) dois quintos desse número mais cinco

Exercícios de Imersão

1) Sendo a e b dois números, escreva cada sentença na linguagem matemática.

a) a soma desses dois números
b) a diferença entre esses números
c) o produto entre esses números
d) a razão entre o 1^o e o 2^o números
e) o triplo da diferença entre esses números
f) a soma dos quadrados desses números
g) o quadrado da soma desses números
h) o cubo da diferença entre esses números

2) Nas sentenças abaixo, a letra x representa um número racional. Identifique cada sentença com a expressão algébrica correspondente.

I. o dobro do quadrado de x
II. o quadrado do dobro de x
III. a diferença entre o dobro de x e 3
IV. o dobro da diferença entre x e 3
V. a divisão da soma de x com 3 por 2
VI. a soma dos quadrados dos números x e 3
VII. o quadrado da soma dos números x e 3

a) $2x - 3$
b) $x^2 + 3^2$
c) $(2x)^2$
d) $(x + 3)^2$
e) $2x^2$
f) $\dfrac{x + 3}{2}$
g) $2(x - 3)$

3) Qual é o número cujo dobro somado com 5 é igual ao seu triplo menos 19?

Matemática no dia-a-dia

1) Um jovem gastou metade de sua mesada em lazer e um quarto de sua mesada em material escolar. Se restaram R$ 2,50, qual o valor da mesada do jovem?

2) Depois que João adicionou 15,2 litros de água a um balde meio cheio, o volume total de água no balde se tornou 37,75 litros. Escreva uma equação e resolva para determinar quantos litros de água, x, cabem no balde.

3) Uma agência de turismo vende pacotes familiares de passeios turísticos, cobrando para crianças o equivalente a $\frac{2}{3}$ do valor para adultos. Uma família de cinco pessoas, sendo três adultos e duas crianças, comprou um pacote turístico e pagou o valor total de R$ 8.125,00. Com base nessas informações, calcule o valor que a agência cobrou de um adulto e de uma criança para realizar esse passeio.

4) Três amigos: Almir, Bruno e Cesar foram jantar em um restaurante e a conta total da janta foi de R$100,00. Sabe-se que Almir pagou 8 reais a mais que Bruno e este 4 a mais que Cesar. Quanto Bruno pagou?

5) A Prefeitura Municipal fez um levantamento do número de estátuas que sofrem vandalismo por ano na cidade. Dividindo a cidade em três regiões, A, B, C, constatou-se que a região A é responsável pelo vandalismo do quádruplo de estátuas agredidas na região B. O total de estátuas que foram atacadas é 128, sendo que 48 estavam na região C. Quantas estátuas sofreram vandalismo na região A?

6) Em quatro semanas do mês passado, foram capturados 338 animais ao todo. Na segunda semana, foi capturado o dobro de animais da primeira. Na terceira, a metade da primeira e, na última semana 30 animais. Quantos animais foram capturados na semana em que aconteceu a maior captura?

7) Um atirador ganha 4 pontos por tiro acertado no alvo e paga a metade, por multa, cada vez que erra. Após 32 tiros, tinha 86 pontos. Calcule quantos tiros acertou.

8) Marcela e Ana têm menos de 40 anos, mas suas idades somam mais que isso. Se a idade da mais velha é o quadruplo da idade da mais nova, qual a soma de suas idades?

B.2 Gabaritos

Divisibilidade, fatores e múltiplos

Exercícios de Fixação

1) Diga se os seguintes números são divisíveis por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 ou 10 (pode ser divisível por mais de um ou por nenhum).

a) **2, 4**
b) **3 e 5**
c) **2, 3, 4, 5, 6 e 10**
d) **3, 9**
e) Nenhum
f) **2, 3, 4, 6, 8,9**
g) Nenhum
h) **2, 4, 7, 8**
i) **2, 4, 5, 8**
j) **3, 5 e 7**
k) Nenhum
l) **2, 3, 6, 9**
m) **2, 3, 4, 6, 8**
n) Nenhum
o) **2, 3, 6 e 9**
p) **2,5 e 10**
q) **2**
r) **2, 3, 4, 6, 8**
s) **2, 3 e 6**
t) **2, 4, 8**

2) Quais dos seguintes números são primos?

a) **não**
b) **não**
c) **não**
d) **sim**
e) **não**
f) **não**
g) **sim**
h) **sim**
i) **sim**
j) **não**
k) **não**
l) **não**

3) Escreva os seguintes números como um produto de fatores primos:

a) 2×2
b) $2 \times 2 \times 2$
c) $2 \times 2 \times 3$
d) 3×5
e) $2 \times 3 \times 3$
f) $2 \times 2 \times 3 \times 3$
g) $2 \times 3 \times 7$
h) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
i) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
j) $2 \times 2 \times 23$
k) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$
l) $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
m) $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$
n) $3 \times 3 \times 5 \times 5$
o) $2 \times 11 \times 11$
p) $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$

Exercícios de Imersão

1) D

2) A

3) B

4) B

5) 2

6) 2, 3 e 5

Matemática no dia-a-dia

1) **Resp.:** 5 rosas

2) **Resp.:** 27 centavos

3) **Resp.:** 2, 5 ou 10 fileiras

Mínimo Múltiplo Comum e Máximo Divisor Comum

Exercícios de Fixação

1) a) 12
   b) 8
   c) 30
   d) 60
   e) 72
   f) 60
   g) 80
   h) 72
   i) 126
   j) 120
   k) 350
   l) 720
   m) 5040
   n) 180
   o) 480
   p) 120

2) a) 2
   b) 4
   c) 4
   d) 6
   e) 6
   f) 6
   g) 10
   h) 8
   i) 11
   j) 8
   k) 120
   l) 4
   m) 4
   n) 5
   o) 12
   p) 56

Exercícios de Imersão

1) 20 dias

2) 70 dias

3) 340 folhetos

4) 36 cupcakes

5) 17 de março

6) 18 estudantes

7) 4 grupos

8) 60 pacotes

9) 18 colares

Matemática no dia-a-dia

1) D

2) C

3) 9 plantas

4) C

Matemática

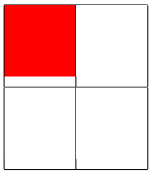
Lista de Exercícios - Aula 3

Mês da Matemática

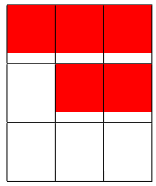
Projeto de Extensão Comunitária - Curso Exato

Frações

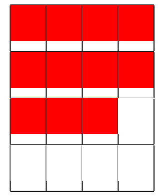
Exercícios de Fixação

1) a) 

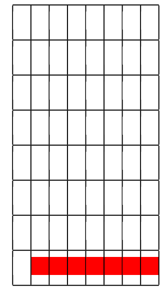
$\frac{1}{4}$

c) 

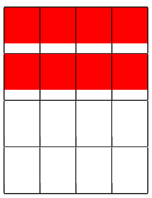
$\frac{5}{9}$

e) 

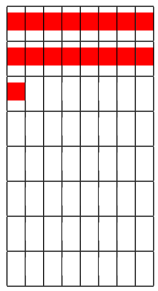
$\frac{11}{16}$

g) 

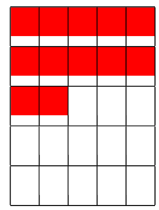
$\frac{7}{64}$

b) 

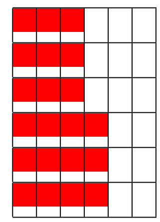
$\frac{8}{16}$

d) 

$\frac{17}{64}$

f) 

$\frac{12}{25}$

h) 

$\frac{21}{36}$

2) a) $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ d) $\frac{7}{3} = \frac{49}{21}$ g) $\frac{6}{22} = \frac{3}{11}$ j) $\frac{12}{8} = \frac{18}{12}$

b) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ e) $\frac{24}{52} = \frac{6}{13}$ h) $\frac{15}{39} = \frac{5}{13}$ k) $\frac{10}{4} = \frac{15}{6}$

c) $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$ f) $\frac{12}{156} = \frac{3}{39}$ i) $\frac{3}{9} = \frac{4}{12}$ l) $\frac{3}{15} = \frac{4}{20}$

3) a) $\frac{5}{4} > \frac{1}{4}$ e) $\frac{2}{9} < \frac{6}{18}$ i) $\frac{8}{12} < \frac{7}{8}$ m) $\frac{4}{11} < \frac{2}{4}$

b) $\frac{3}{5} < \frac{9}{5}$ f) $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$ j) $\frac{1}{11} < \frac{1}{6}$ n) $\frac{4}{6} < \frac{5}{7}$

c) $\frac{8}{7} > \frac{2}{7}$ g) $\frac{3}{10} = \frac{6}{20}$ k) $\frac{8}{10} > \frac{3}{4}$ o) $\frac{4}{5} > \frac{8}{11}$

d) $\frac{3}{8} < \frac{7}{8}$ h) $\frac{3}{4} > \frac{2}{8}$ l) $\frac{6}{8} > \frac{5}{10}$ p) $\frac{6}{15} = \frac{4}{10}$

4) a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{3}$ e) $-\frac{1}{11}$ g) 1 i) $\frac{36}{257}$ k) $\frac{5}{7}$

b) $\frac{7}{17}$ d) $\frac{1}{3}$ f) 0 h) $\frac{1}{2}$ j) $\frac{5}{17}$ l) $\frac{4}{5}$

m) $\frac{4}{5}$ n) $\frac{3}{8}$ o) $\frac{5}{11}$ p) $\frac{2}{9}$ q) $\frac{3}{5}$ r) $\frac{7}{120}$

Matemática no dia-a-dia

1) Daniel
2) Comeram igual quantidade das duas tortas
3) Zilda
4) Douglas
5) Giovana
6) $\frac{4}{5}$
7) $\frac{5}{7}$
8) $\frac{3}{10}$

Operações com Frações - Parte 1

Exercícios de Fixação

1) a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{5}{6}$ f) $\frac{1}{30}$ g) $\frac{19}{12}$ h) $\frac{29}{24}$ i) $\frac{49}{60}$ j) $\frac{7}{18}$ k) $\frac{29}{72}$ l) $\frac{122}{105}$

2) a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{13}{30}$ c) $\frac{1}{8}$

Exercícios de Imersão

1) $\frac{1}{10}$

2) Ela já leu $\frac{5}{12}$ do livro. Ela ainda deve ler $\frac{7}{12}$ do livro para terminar a leitura.

3) Estrangeiros: $\frac{40}{93}$. Brasileiros: $\frac{53}{93}$. Orientais: $\frac{2}{31}$.

Matemática no dia-a-dia

1) João comeu $\frac{16}{24}$ de pizza; Carlos comeu $\frac{17}{24}$ de pizza; Marta comeu $\frac{15}{24}$ de pizza. Carlos comeu mais e Marta comeu menos.

2) 2

3) a) Não
   b) 4 bananas

4) 36

5) a) $\frac{1}{6}$ km
   b) $\frac{1}{4}$ km
   c) Taís

Operações com Frações - Parte 2

Exercícios de Fixação

1) a) $\frac{8}{9}$ b) $\frac{15}{8}$ c) $\frac{6}{5}$ d) $\frac{35}{16}$ e) $\frac{36}{5}$ f) $\frac{21}{40}$ g) $\frac{2}{9}$ h) $\frac{15}{22}$ i) $\frac{10}{63}$ j) $\frac{1}{10}$ k) 1 l) $\frac{4}{27}$

2) a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{5}{8}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{9}{4}$ e) 2 f) $\frac{5}{7}$ g) $\frac{5}{2}$ h) $\frac{1}{2}$ i) $\frac{15}{28}$ j) $\frac{9}{10}$ k) $\frac{15}{16}$ l) $\frac{8}{27}$ m) $\frac{1}{6}$ n) 6 o) $\frac{2}{15}$ p) $\frac{15}{2} =$ q) 40 r) 750 s) 450 t) 180

Exercícios de Imersão

1) 4 km
2) 30 doses
3) R$364,00
4) 8 pamonhas

Matemática no dia-a-dia

1) Faltam $\frac{4}{9}$ da avenida, ou 2km.
2) 168 figurinhas
3) 6 alunos
4) 14h
5) $\frac{7}{24}$
6) 28

Números Decimais

Exercícios de Fixação

1) a) $0,1$ b) $0,01$ c) $0,3$ d) $0,52$ e) $0,023$ f) $0,076$ g) $0,78$ h) $0,12$

2) a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{63}{20}$ d) $\frac{364}{25}$ e) $\frac{217}{200}$ f) $\frac{10.001}{10.000}$ g) $\frac{128}{25}$ h) $\frac{2.313}{10}$ i) $\frac{4.949}{50}$ j) $\frac{99.999}{1000}$ k) $\frac{4.713}{100}$ l) $\frac{65}{8}$

3) a) $0,05 = 0,050$ b) $37,1 = \frac{371}{10}$ c) $2,54 < 25,4$ d) $97,800 = 97,8$ e) $0,036 < 0,17$ f) $9,999 > 9,97$ g) $3,473 > 3,47$ h) $4,575 < 4,58$

4) a) $4,09;\ 4,4;\ 4,49;\ 4,5;\ 4,9;\ 4,94.$
b) $0,23;\ 1,0;\ 1,1;\ 1,2;\ 1,23;\ 1,32;\ 4,253.$
c) $0,4;\ 0,41;\ 0,42;\ 0,5;\ 0,75;\ 4,2.$
d) $0,4;\ \frac{41}{100};\ 0,42;\ 4,2;\ \frac{5}{10};\ \frac{750}{1000}.$

5) a) $9,1$ b) $38,8$ c) $1,8$ d) $12,9$ e) $115,71$ f) $27,642$ g) $9,397$ h) $102,029$ i) $44,38$ j) $1,82$ k) $0,989$ l) $10,451$

Exercícios de Imersão

1) 0,000000001

2) 0,235

3) Ele deve ter um tempo menor que 9,8s.

4) 153,85km

5) R$10,54

Matemática no dia-a-dia

1) Sim, porque $1,465 < 1,4691 < 1,472$.
2) Não. Como o algarismo dos décimos da nota de Olívia é maior, $7,5 > 7,25$.
3) 6,77m
4) $22,3^oC$
5) R$360,67
6) a) R$96,73
   b) R$228,96

Operações com números decimais - parte 2

Exercícios de Fixação

1) a) 24500
   b) 7789
   c) $83,3$
   d) 8160
   e) $0,24$
   f) 6
   g) $0,42$
   h) $7,2$
   i) $0,48$
   j) $0,28$
   k) $0,28$
   l) $0,0131$

2) a) $18,01$
   b) $7,94$
   c) $0,019$
   d) $0,00881$
   e) $0,4$
   f) $0,7$
   g) $0,06$
   h) $0,13$
   i) 67
   j) 46
   k) 11
   l) 3
   m) $7,7$
   n) $24,3$
   o) 20

Exercícios de Imersão

1) R$1.283,10

2) R$147,00

3) a) 670km
   b) R$164,50

4) 4,6948 km/dia

5) 0,36kg por pote

Matemática no dia-a-dia

1) R$1001,69

2) 81,5km/h

Frações e números decimais

Exercícios de Fixação

1) Nomeie as seguintes frações:

a) $\frac{3}{9} \Rightarrow$ três nonos

b) $\frac{15}{12} \Rightarrow$ quinze doze avos

c) $\frac{28}{69} \Rightarrow$ vinte e oito sessenta e nove avos

d) $\frac{89}{1000} \Rightarrow$ oitenta e nove milésimos

2) Determinar se cada par de frações a seguir é equivalente.

a) $\frac{8}{2}$ e $\frac{4}{1} \Rightarrow$ Sim

b) $\frac{1}{3}$ e $\frac{9}{30} \Rightarrow$ Não

c) $\frac{9}{15}$ e $\frac{36}{60} \Rightarrow$ Sim

d) $\frac{9}{12}$ e $\frac{15}{20} \Rightarrow$ Sim

3) Para cada fração, encontrar uma fração equivalente com denominador 100.

a) $\frac{3}{2} = \frac{150}{100}$

b) $\frac{9}{4} = \frac{225}{100}$

c) $\frac{2}{5} = \frac{40}{100}$

d) $\frac{7}{20} = \frac{35}{100}$

e) $\frac{20}{400} = \frac{5}{100}$

4) Comparar cada par de frações a seguir, preenchendo as lacunas com $>$, $<$ ou $=$.

a) $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$

b) $\frac{5}{8} < \frac{7}{10}$

c) $\frac{4}{11} < \frac{5}{12}$

5) Simplificar cada fração a seguir.

a) $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{5}{15} = \frac{1}{5}$

c) $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

d) $\frac{14}{35} = \frac{2}{5}$

e) $\frac{48}{90} = \frac{8}{15}$

6) Calcule:

a) $\frac{1}{4} + \frac{2}{7} = \frac{15}{28}$

b) $\frac{1}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

c) $\frac{5}{18} + \frac{1}{8} = \frac{29}{72}$

d) $\frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$

e) $\frac{3}{4} - \frac{8}{15} = \frac{13}{60}$

f) $\frac{14}{15} - \frac{5}{6} = \frac{1}{10}$

g) $\frac{5}{7} \times \frac{8}{15} = \frac{8}{21}$

h) $\frac{4}{5} \times \frac{4}{10} = \frac{8}{25}$

i) $\frac{11}{16} \times \frac{13}{22} = \frac{13}{32}$

j) $\frac{4}{6} \div \frac{1}{3} = 2$

k) $\frac{14}{16} \div \frac{14}{6} = \frac{3}{8}$

l) $\frac{13}{16} \div \frac{2}{3} = \frac{39}{32}$

7) Converta cada número decimal abaixo para sua respectiva fração decimal.

a) $821 = \frac{821}{1}$

b) $5{,}71 = \frac{571}{100}$

c) $0{,}195 = \frac{195}{1\,000}$

d) $0{,}0014 = \frac{14}{10\,000}$

8) Coloque cada conjunto de números em ordem crescente.

a) 5,17 e 5,180 $\Rightarrow$ 5,17 $<$ 5,180

b) 3,95 e 3,88 $\Rightarrow$ 3,88 $<$ 3,95

c) 0,78 e 0,7 $\Rightarrow$ 0,7 $<$ 0,78

d) 0,889 e 0,89 $\Rightarrow$ 0,889 $<$ 0,89

9) Calcule:

a) $86 + 30{,}1 = 116{,}1$

b) $17{,}86 + 13{,}67 = 31{,}53$

c) $88{,}1 + 19{,}525 = 107{,}625$

d) $93{,}72 - 13{,}21 = 80{,}51$

e) $67 - 35{,}2 = 31{,}8$

f) $21 - 19{,}12 = 1{,}88$

g) $7{,}1 \div 1000 = 0{,}0071$

h) $6{,}381 \times 100 = 638{,}1$

i) $15{,}4 \div 100 = 0{,}154$

j) $6{,}4 \times 2 = 12{,}8$

k) $0{,}3 \times 3{,}21 = 0{,}963$

l) $8{,}26 \times 8{,}1 = 66{,}906$

m) $72 \div 0{,}9 = 80$

n) $54{,}4 \div 0{,}34 = 160$

o) $4{,}875 \div 0{,}65 = 7{,}5$

Exercícios de Imersão

1) a) $\frac{5}{8}$

   b) $\frac{3}{16}$

2) a) 60

   b) 125

3) a) $\frac{3}{4}$

   b) R$37,50

4) a) 27,5^{o}C

   b) 26,1^{o}C

5) 1338,75 km

6) 108 clipes

Matemática no dia-a-dia

1) Descontando da área total a fração da área ocupada pelas quadras e pela pavimentação, sobra $\frac{11}{40}$ do terreno, fração essa que pode ser utilizada para a construção do parquinho.

2) a) £64,30

   b) £136,00

Matemática

Lista de Exercícios - Aula 9

Mês da Matemática

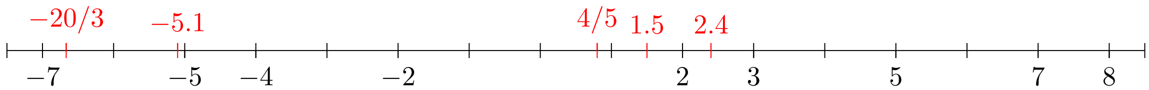
Projeto de Extensão Comunitária - Curso Exato

Conjuntos numéricos e operações com números negativos

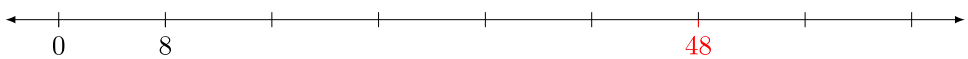
Exercícios de Fixação

1) a)

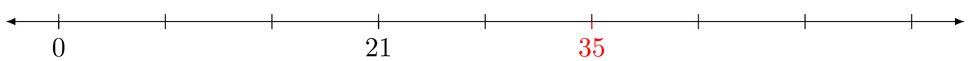
b)



2)



3)



4) C

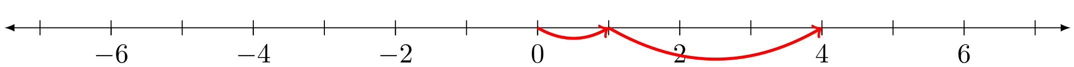
5) a) -1
b) 49
c) $-96\,161$
d) -8
e) 11
f) 4
g) -4
h) -111
i) $71\,417$
j) $-888\,888$
k) -6
l) -40
m) -13
n) $3\,486$
o) $8\,556$
p) $12\,555$
q) -7
r) -4
s) -9
t) 34
u) -153

6) a) $3 \times (-4) = -12$
b) $-4 \div (-4) = 1$
c) $-7 + (-3) = -10$
d) $8 - 15 = -7$
e) $23 \times -2 = -46$
f) $-20 \div (-4) = 5$
g) $9 \times 3 = 27$
h) $-2 + (-1) = -3$
i) $13 - 15 = -2$
j) $24 + (-139) = -115$
k) $-342 \times 3 = -1\,026$
l) $10\,008 \div (-12) = -834$

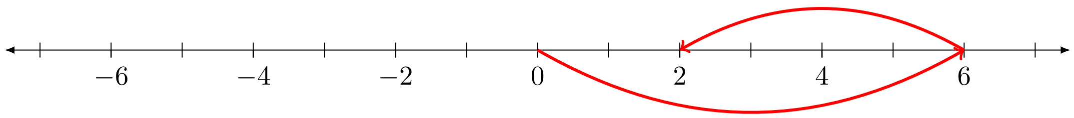
Exercícios de Imersão

1) a) Racionais, com até duas casas decimais;
b) Racionais;
c) Racionais;
d) Naturais.
e) Naturais;
f) Racionais;
g) Naturais;
h) Inteiros;
i) Inteiros.

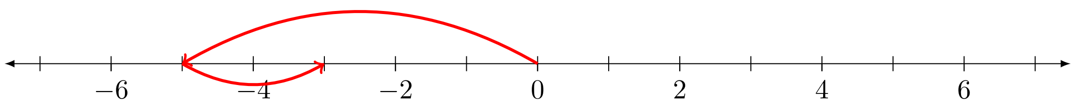
2) a) $1 + 3$:



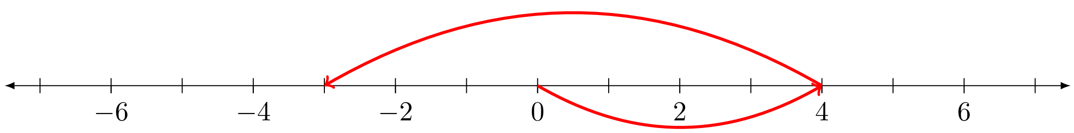
b) $6 - 4$:



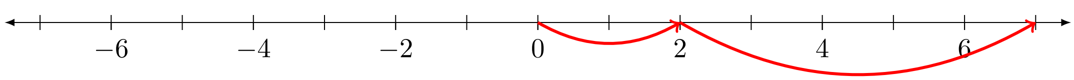
c) $-5 + 2$:



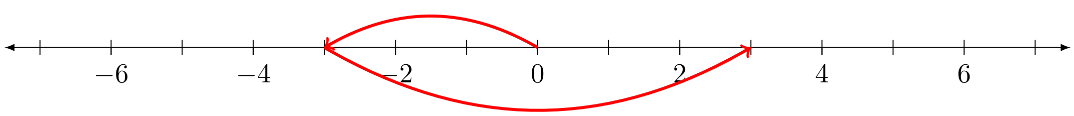
d) $4 - 7$:



e) $2 - (-5)$:



f) $-3 - (-6)$:



3) 150 metros abaixo do nível do mar.

4) 503 anos.

5) 118 anos.

Matemática no dia-a-dia

1) $R\$571,80$

2) a) Londres tem a menor amplitude térmica registrada: 5^oC.
   b) A maior amplitude térmica registrada pertence a Quebec e é de 10^oC.

3) 9 581 metros.

Potenciação

Exercícios de Fixação

1) a) 32 b) 2183 c) 1 d) 625 e) 64 f) $0,01$ g) -8 h) -8 i) $\frac{4}{9}$ j) $-\frac{8}{27}$

2) a) 1 b) 0 c) $\frac{16}{25}$ d) 64 e) $-\frac{4}{9}$ f) 512

3) a) $x = 0$ b) x é um número ímpar c) x é um número par d) $x = 2$

Exercícios de Imersão

1) a) 512 b) $\dfrac{1}{823541}$ c) 9 d) $\dfrac{1}{5}$ e) 28561 f) 243 g) $\dfrac{125}{9}$ h) 8 i) 0 j) $\dfrac{1}{3}$ k) $\dfrac{9}{4}$ l) -1

2) a) n^3 b) 3^5 c) n^{-10} d) $-n^0$ e) n^{-3}

3) a) 2^4 b) $4^4 - 3^2$ c) 5^{-3} d) 6^{-2}

4) a) a^7 b) $k^1 1$ c) x^{b+3} d) a^5 e) p^{-2} f) x^{a+b} g) y^4 h) x^{30} i) $a^8 q$ j) x^{3y} k) u^4

Matemática no dia-a-dia

1) 4º dia: 40. 6º dia: 364.

2) 3^{31}

3) $3 \cdot 2^{18}$ cds

4) 250.000 camadas por hora

5) Resp.: A= 2^{-2}, B= 2^0, C= 2^4, D= 2^6, E= 2^{-1}

Radiciação

Exercícios de Fixação

1) a) $81 = 3^4$ b) $168 = 2 \cdot 3^2$ c) $309 = 3 \cdot 103$ d) $451 = 11 \cdot 41$ e) $476 = 2^2 \cdot 7 \cdot 17$

2) a) $\sqrt{121} = 11$
b) $\sqrt{289} = 17$
c) $\sqrt{1024} = 32$
d) $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$
e) $\sqrt{\frac{225}{169}} = \frac{15}{13}$
f) $\sqrt{\frac{48}{300}} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
g) $\sqrt{0,04} = 0,2$
h) $\sqrt{0,0004} = 0,02$
i) $\sqrt{0,64} = 0,8$
j) $\sqrt{1,21} = 1,1$
k) $\sqrt{0,0036} = 0,06$
l) $\sqrt{4,84} = 2,2$
m) $\sqrt{0,0081} = 0,09$
n) $\sqrt{0,0121} = 0,11$
o) $\sqrt{0,1024} = 0,32$
p) $\sqrt[3]{8} = 2$
q) $\sqrt[3]{64} = 4$
r) $\sqrt[3]{512} = 8$
s) $\sqrt[3]{1000} = 10$
t) $\sqrt[4]{16} = 2$
u) $\sqrt[4]{625} = 5$
v) $\sqrt[5]{1024} = 4$

3) Utilize as propriedades de operações com radicais para efetuar os cálculos a seguir.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$
b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$
c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45} = 15$
d) $\frac{\sqrt{200}}{\sqrt{2}} = 10$
e) $\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{44}} = \frac{3}{2}$
f) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{50}} = \frac{4}{5}$
g) $\sqrt{70} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{5} = 70$
h) $\frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{28}}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{560}}{\sqrt{35}} = \sqrt{16} = 4$

Exercícios de Imersão

1) a) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
b) $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$
c) $\sqrt{112} = 4\sqrt{7}$
d) $\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4^2} = 4^{\frac{2}{3}}$
e) $\sqrt[3]{108} = 3\sqrt[3]{2^2}$
f) $2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$
g) $5\sqrt{29} - 5\sqrt{29} = 0$
h) $\sqrt{8} + \sqrt{32} = 6\sqrt{2}$
i) $-5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -8\sqrt{3}$
j) $\sqrt{96} - \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$
k) $-3\sqrt{12} + 3\sqrt{3} = -3\sqrt{3}$
l) $3\sqrt[3]{-3} + 3\sqrt[3]{81} = 6\sqrt[3]{3}$
m) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$
n) $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = 3$
o) $3\sqrt{3}\left(4 - 3\sqrt{27}\right) = 12\sqrt{3} - 81$

2) a) $\sqrt{2} = 1,41 = 1,4$
b) $\sqrt{3} = 1,73 = 1,7$
c) $\sqrt{4.5} = 2,12 = 2,1$
d) $\sqrt{5} = 2,23 = 2,2$
e) $\sqrt{7} = 2,64 = 2,6$
f) $\sqrt{12} = 3,46 = 3,5$
g) $\sqrt{45} = 6,70 = 6,7$
h) $\sqrt{90} = 9,48 = 9,5$
i) $\sqrt[3]{15} = 2,46 = 2,5$
j) $\sqrt[3]{30} = 3,10 = 3,1$
k) $\sqrt[3]{28} = 3,03 = 3,0$
l) $\sqrt[3]{1030} = 10,09 = 10,1$

Problemas

1) Comprimento da aresta $= 8$. Comprimento da diagonal $= 4$

2) Não. $2^2 = 4$ e $(-2)^2 = 4$, porém $\sqrt{4} = 2$ somente.

Expressões Algébricas

Exercícios de Fixação

1) a) binômio b) monômio c) binômio d) trinômio e) trinômio

2) a) $c(3) = 6$
   b) $v(3) = \frac{3}{2}$
   c) $z(1) = 4.$
   d) $p(2) = \frac{22}{7}$
   e) $k(3) = 5,10.$
   f) $k(0,2) = 4,26.$
   g) $m(6) = 3.$

3) a) 14
   b) 35
   c) -10
   d) 4
   e) -2
   f) 40
   g) 1
   h) 12
   i) 1
   j) 49
   k) 9
   l) 1
   m) 49
   n) 9

4) a) (i) 6
   (ii) 2
   (iii) 0
   (iv) 20
   b) i. -2
   ii. -2
   iii. $-\frac{5}{2}$
   iv. $-\frac{3}{2}$

Exercícios de Imersão

1) a) 169
   b) $-\frac{7}{4}$
   c) $\frac{10}{14} = \frac{5}{7}$
   d) $-\frac{4}{10} = -\frac{2}{5}$
   e) $\frac{9}{7}$

2) 6, 7 e 8

Matemática no dia-a-dia

1) a) $3x$
   b) $8x$
   c) 24 cm

2) a) 10x
   b) R$150,00

3) a) $A = x^2$; coeficiente: 1; parte literal: x^2.
   b) $2p = 4x$; coeficiente: 4; parte literal: x.

Redução de Termos Semelhantes

Exercícios de Fixação

1) a) $5x + 4y$
b) $5x + 10y$
c) $-7x - 15y$
d) $-4x - 7b + 4y$
e) $x - 3y$
f) $3ab - 4ab^2$
g) $6x - 3y - x^2y$
h) $9mn^4 + 7p^2 - 4q$
i) $4 + 11x + x^2 + 2x^3$
j) $7a - b$
k) $-2m^2 + 15mn - 4n^3$
l) $17x^2 + 2xy - 4y^3$
m) $\frac{3}{2} + \frac{9}{4}y - \frac{1}{3}x$
n) $-\frac{x}{12} + \frac{13y}{48}$
o) $\frac{a}{4} + \frac{3b}{8}$
p) $\frac{5}{6}x + \frac{39y^2}{4}$

2) a) $7a + 4b$
b) $7x^2 - 3x + 1$
c) $3x^2 - 4x$
d) $3x^3 + x^2 + 12x - 3$
e) $4x - 7y + 13$
f) $-2x^3 - 3x^2 + 11x - 10$
g) $8x^2 + 2xy + y^2$
h) $7x^3 - 3x + 3$

Exercícios de Imersão

1) a) $5x - 5y - 2$
b) $8x^2 - 3x - 1$
c) $9x + 3$
d) $9a - b$
e) $x^2 + 6x + 1$
f) $-a - 2c$
g) $5x - 7y + 6z$
h) $5x^2 + 1$
i) $5x - 1$
j) $-12x - 6y$

2) a) $x + y + 2$
b) $-a + 8b + 13$
c) $-3x^2 + 5x - 2$
d) $-2a + 3b - 4c$
e) $-x^2 - 4x + 8$
f) $5a - 7b + 7c$
g) $5x + 2$
h) $-3x^2 + \frac{7}{15}$
i) $x^2 - \frac{13x}{2} - \frac{12}{5}$
j) $3a - 2ab + 3b$
k) $4x^2 + 4x + 1$
l) $-3x + 4y + 5z$

3) a) $-x^2 + 6x + 2$
b) $-5x^2 - 2x$
c) $3x^2 - 4x - 6$

4) a) $\frac{47x}{12} - \frac{1}{12}$
b) $\frac{11x}{10} - \frac{23}{10}$
c) $5x^2 - \frac{13x}{12} - \frac{23}{12}$
d) $-\frac{x^2}{4} + \frac{29x}{6} + \frac{15}{4}$

5) $4x^2 - 3x - 11$

6) $5n$

Matemática no dia-a-dia

1) $2p + 22q$

Equação de 1º Grau

Exercícios de Fixação

1) a) 2^o grau.
   b) 3^o grau.
   c) 4^o grau.
   d) 1^o grau.
   e) 1^o grau.
   f) 3^o grau.

2) a) $A : 3^o$ grau.
   b) $B : 2^o$ grau.
   c) C : grau nulo.

3) a) Sim
   b) Não
   c) Sim
   d) Não

4) a) $x = 7$
   b) $y = -6$
   c) $x = 27$
   d) $y = -9$
   e) $x = 4$
   f) $a = \emptyset$
   g) $x = -4$
   h) $x = \emptyset$
   i) $x = 18$
   j) $j = \emptyset$
   k) $x = 10$
   l) $x = \emptyset$

5) a) $x = 2$
   b) $x = \frac{13}{8}$
   c) $x = -\frac{19}{8}$
   d) $x = 4$
   e) $x = -7$
   f) $x = \frac{11}{3}$
   g) $x = -\frac{1}{4}$
   h) $x = -\frac{13}{2}$
   i) $y = \frac{1}{2}$
   j) $x = -\frac{8}{5}$
   k) $y = \frac{26}{7}$
   l) $x = \frac{26}{7}$

6) a) $x = 113$
   b) $k = 50$
   c) $x = 100$
   d) $b = \frac{21}{2}$
   e) $a = -7$
   f) $\Delta = 62$
   g) $p = -\frac{4}{3}$
   h) $x = \frac{9}{2}$
   i) $x = \frac{7}{11}$
   j) $x = 6$

Exercícios de Imersão

1) Não, pois ao substituir x por 3 na equação, obtemos a igualdade $-9 = 8$, que é falsa.

2) C

3) $x = 8$

4) 130, 131 e 132

5) 24

Matemática no dia-a-dia

1) $40m^2$

Matemática

Lista de Exercícios - Aula 15

Mês da Matemática

Projeto de Extensão Comunitária - Curso Exato

Modelagem e Resolução de Problemas

Exercícios de Fixação

1) a) $2x$
   b) $x - 1$
   c) $3x - 2$
   d) $4x + 10$
   e) $10(x - 4)$
   f) $3(x + 8)$
   g) $2(2x + 1)$
   h) $4 \cdot \frac{x}{2}$

2) a) $\frac{y}{2}$
   b) $\frac{3y}{4}$
   c) $y + \frac{2y}{5}$
   d) $\frac{2y}{5} + 5$

Exercícios de Imersão

1) a) $a + b$
   b) $a - b$
   c) $a \cdot b$
   d) $\frac{a}{b}$
   e) $3(a - b)$
   f) $a^2 + b^2$
   g) $(a + b)^2$
   h) $(a - b)^3$

2) I. e)
   II. c)
   III. a)
   IV. g)
   V. f)
   VI. b)
   VII. d)

3) 24

Matemática no dia-a-dia

1) R$10,00
2) 45,1 litros
3) Adulto: R$1875,00; Criança: R$1250,00.
4) R$28,00
5) 64 estátuas
6) 176
7) 25
8) 45

C Orientação para Professores

C.1 Introdução

Todo ano, o Exato recebe uma centena de alunos de diferentes origens. Cada estudante tem seus próprios talentos e afinidades, e um conjunto bem particular de conhecimentos e habilidades. Para que seja possível trabalhar com todos eles, seguindo um planejamento que se assemelha ao currículo do Ensino Médio, é necessário primeiro certificar-se de que todos possuam uma base comum da qual as diferentes disciplinas possam se aproveitar.

Pensando nisso, decidiu-se que o primeiro mês de aulas versaria apenas sobre Matemática Básica, de modo a cimentar os pré-requisitos fundamentais que propiciem o início do desenvolvimento de tópicos mais avançados das três disciplinas de Exatas. A esse período convencionou-se chamar de *Mês da Matemática*.

Esse documento procura descrever a ementa do Mês da Matemática e fornecer diretrizes para a abordagem do conteúdo. Há uma seção dedicada a orientações gerais, que devem ser lidas por todos os professores, e outra seção, contendo orientações específicas sobre o tema de cada aula. Nas orientações específicas, também podem ser encontradas recomendações de materiais extras a serem utilizados nas aulas ou a serem indicados para os alunos, como forma de estudo extraclasse.

C.2 Planejamento

Uma descrição detalhada do planejamento para o Mês da Matemática e dos objetivos de cada grupo de aulas pode ser encontrado na Tabela C.2. A ementa de cada aula está descrita a seguir.

Ementa

Aula 1: Critérios de divisibilidade. Números primos. Decomposição em fatores primos.

Aula 2: Mínimo Múltiplo Comum. Máximo Divisor Comum.

Aula 3: Frações: o que é fração? Frações equivalentes. Comparação de frações. Simplificação de frações

Aula 4: Operações com frações: soma, subtração, multiplicação e divisão.

Aula 5: Operações com frações: multiplicação e divisão.

Aula 6: Sistema de numeração decimal. Números decimais: fração decimal e numeral decimal. Comparação de números decimais. Operações com decimais: soma e subtração.

Aulas	Conteúdo	Objetivos
1-2	- Critérios de Divisibilidade - Números primos - MMC - MDC	O aluno deve ser capaz de: - **Definir** e **explicar** os conceitos de divisibilidade, números primos, MMC e MDC. - **Investigar** se um número é divisível por outro. - **Calcular** o MMC e o MDC de dois ou mais números dados. - **Aplicar** os conceitos para resolver problemas cotidianos, **formulando-os** em linguagem matemática.
3-5	- O conceito de fração - Frações equivalentes - Comparação de frações - Operações com frações	O aluno deve ser capaz de: - **Definir** frações. **Explicar** o que uma dada fração representa. **Ilustrar** como quantidades utilizadas no dia-a-dia podem ser expressas por meio de frações. - **Definir** o conceito de frações equivalentes. **Explicar** o que a equivalência representa. - **Comparar** frações de denominadores iguais. **Comparar** frações de denominadores diferentes. - **Definir** e **explicar** operações com frações. - **Aplicar** o resultado das operações para resolver problemas cotidianos, formulando-os em linguagem matemática.
6-7	- Números decimais - Frações decimais - Comparação entre decimais - Operações com decimais	O aluno deve ser capaz de: - **Descrever** a notação decimal e **ilustrá-la** com situações cotidianas. - **Definir** números decimais como frações decimais. - **Comparar** e **ordenar** números decimais. - **Calcular** operações aritméticas com números decimais.
8	- Revisão/exercícios de frações - Revisão/exercícios de números decimais	**Validar** os conceitos relativos a frações, números decimais e suas operações.
9	- Conjuntos numéricos - A reta numérica - Operações com números negativos	O aluno deve ser capaz de: - **Definir** e **explicar** as características dos elementos de cada um dos conjuntos numéricos trabalhados. - **Definir** e **explicar** a reta numérica. - **Definir**, **explicar** e **interpretar** números negativos. - **Aplicar** e **analisar** os conceitos apresentados a situações do mundo real.
10-11	- Potenciação - Radiciação	O aluno deve ser capaz de: - **Definir** e **explicar** as operações de potenciação e de radiciação com números reais. - **Interpretar** raízes não exatas: aproximações. - **Recordar** que raízes de números negativos não existem no conjunto dos números reais. **Justificar** esse fato. - **Aplicar** e **analisar** os conceitos apresentados a problemas do dia-a-dia.
12-13	- Expressões algébricas - Valor numérico de uma expressão algébrica - Redução de termos semelhantes - Operações com expressões algébricas	O aluno deve ser capaz de: - **Definir** e **explicar** os conceitos de variável de expressão algébrica. - **Identificar** as variáveis de uma expressão algébrica dada e **computar** o valor numérico desta expressão para um conjunto particular de valores das variáveis. - **Definir**, **explicar** e **identificar** termos semelhantes em expressões algébricas. - **Computar** a forma reduzida de uma expressão.
14-15	- Equações de primeiro grau - Modelagem de problemas	O aluno deve ser capaz de: - **Definir** e **explicar** o que é uma equação polinomial de primeiro grau. - **Definir** o que é uma solução da equação. - **Investigar** se um dado valor é uma solução de uma equação de primeiro grau. - **Interpretar**, de forma mais profunda, o significado da relação de igualdade expressa por uma equação e, com isso, **buscar** uma solução aplicando operações a ambos os membros da igualdade. - **Sumarizar/Formular/Modelar** problemas do cotidiano como equações do primeiro grau.

Tabela 3: Enumeração das aulas produzidas, com descrição do conteúdo abordado e objetivos segundo a taxonomia de Bloom.

Aula 7: Operações com decimais: multiplicação e divisão.

Aula 8: Exercícios sobre frações e números decimais.

Aula 9: Conjuntos numéricos: naturais, inteiros, racionais e reais. A reta numérica. Operações com números negativos.

Aula 10: Potenciação e propriedades.

Aula 11: Radiciação e propriedades.

Aula 12: Expressões numéricas e expressões algébricas. Valor numérico de uma expressão algébrica.

Aula 13: Redução de termos semelhantes. Propriedade distributiva.

Aula 14: Equações. Grau de uma equação. Raiz de uma equação. Equações de primeiro grau. Resolução de equações de primeiro grau.

Aula 15: Modelagem de problemas. Resolução de problemas práticos.

C.3 Orientações gerais

O corpo docente do Curso Exato é composto por um conjunto plural de pessoas, provenientes de diversas áreas. Tradicionalmente, a maioria dessas pessoas não possui treinamento didático, muitas vezes tendo no Curso seu primeiro contato com a atividade docente. Desse modo, esse documento pretende fornecer orientações que auxiliem a transição dos voluntários para a sala de aula.

As orientações gerais, direcionadas a todos os professores, são de dois tipos: didáticas e pedagógicas. As orientações didáticas versam sobre a prática docente de um modo geral, enquanto as orientações pedagógicas referem-se especificamente ao ensino de Matemática.

C.3.1 Orientações didáticas

- **Use a sua voz natural**

  Como a turma do Mês da Matemática contém o dobro do número de alunos das turmas regulares, a sala onde acontecem as aulas é maior do que a usual. Dessa maneira, é importante prestar atenção ao volume de sua voz e projetá-la de forma que mesmo os alunos que sentem nas fileiras de trás possam ouvi-la com clareza. Isso não significa, no entanto, que o professor deva forçar a voz a ponto de gritar: isso causa problemas vocais e convida os alunos a conversarem mais alto.

  Além disso, é importante saber diferenciar o tom da voz de acordo com a situação: caso você esteja orientando os alunos sobre a forma como uma tarefa deve ser feita, use um tom de voz declarativo; se, por outro lado, você estiver fazendo uma pergunta ou verificando o entendimento de certo ponto do conteúdo, use um tom de voz convidativo, como em uma conversa amigável, de modo a não intimidar os alunos mais tímidos.

- **Apenas fale quando os alunos estiverem em silêncio**

  Em uma sala de aula com 100 alunos, é impossível se fazer ouvir caso haja muitos focos de conversa. Espere o necessário para que os alunos façam silêncio, chamando a atenção delicadamente de cada grupo de alunos até que a conversas cessem. Após alguns momentos de espera, os próprios alunos começam a repreender uns aos outros, percebendo a intenção do professor de continuar a aula apenas com a sala em silêncio.

  No entanto, é importante mencionar que são raros os problemas com conversa em sala de aula no Mês da Matemática, por conta de o curso ter se iniciado há pouco e os alunos ainda não se conhecerem bem.

- **Use comunicação não-verbal**

  A movimentação de um professor na sala de aula é fator importante na retenção da atenção do aluno. É bastante comum que os alunos do Curso trabalhem e estudem, o que torna sua rotina extremamente exaustiva. Uma aula monótona, em que o professor apenas recita o conteúdo, tem grandes chances de servir de sonífero.

  Dessa maneira, é importante que a aula contenha estímulos visuais, além de auditivos. A movimentação do professor pela sala, o uso de gestos durante a explicação e a interação com os alunos pode incentivar o aprendizado.

  Também é importante que o professor faça sempre contato visual com os alunos, para que suas reações o ajudem a medir o ritmo adequado da aula. Nesse sentido, o professor deve evitar escrever no quadro negro estando completamente de costas para a turma, sendo preferível se posicionar de lado, de modo a conseguir escrever e observar os alunos ao mesmo tempo.

- **Não se limite aos slides**

  O quadro negro deve sempre ser considerado um recurso indispensável durante uma aula de Matemática, pois permite que o raciocínio seja construído em conjunto, de forma colaborativa. Havendo necessidade de refazer algum exemplo ou complementar a explicação, deve-se recorrer a ele para que o conteúdo fique melhor esclarecido.

  Os slides das aulas do Mês da Matemática foram projetados para serem auto-suficientes, contendo teoria, exemplos e exercícios, mas é possível, e provável, que surjam dúvidas que de alguma maneira não estão cobertas no material. Quando isso acontecer, o professor não deve hesitar em abandonar o computador e fornecer uma explicação adicional mais detalhada usando o quadro negro.

- **Sempre tenha uma aula muito bem preparada**

  Um ditado popular da sala dos professores diz que "se você não tiver um plano para os alunos, os alunos terão um plano para você". É comum que algumas aulas corram num ritmo diferente do esperado pelo professor, causando ou um atraso no planejamento ou minutos livres no fim da aula. As duas situações devem ser evitadas a todo custo. Além de passar uma impressão pouco profissional aos alunos, no primeiro caso o atraso causa um efeito dominó que atrapalha todas as aulas subsequentes, enquanto no segundo caso desperdiçamos minutos preciosos que poderiam ser usados para melhorar o aprendizado da turma.

  Por isso, é sempre melhor planejar excessivamente do que se preparar pouco. Conheça bem o material da aula, tenha exemplos e analogias em mente para os assuntos mais difíceis do dia e alguns exercícios extras para cada tópico, para o caso de a turma sentir mais dificuldade do que o esperado. Além disso, é importante que o professor tenha estudado todo o planejamento do Mês da Matemática, para entender como cada assunto se liga aos outros e como encadear a explicação da melhor maneira. Essa preparação é importante pois haverá interrupções com dúvidas variadas e o professor precisa ter domínio suficiente do conteúdo para transitar entre os diferentes assuntos de modo fluido. É boa prática, também, levar notas com observações e pontos chaves da aula.

- **Evite desviar do assunto da aula**

  Pode acontecer de algum aluno fazer uma pergunta cuja resposta vá além do escopo da aula ou que adiante algum conteúdo de aulas seguintes; nesse caso, se a resposta da pergunta não for extremamente sucinta ou se o aluno tiver dúvidas subsequentes, a melhor reação é gentilmente prometer responder a questão ao fim da aula. Desvios intensos do assunto da aula fazem com que a turma disperse a atenção e interrompem o raciocínio dos alunos, que pode não ser facilmente retomado.

- **Faça críticas construtivas**

  Os alunos que o Curso Exato recebe frequentemente têm histórico de experiências acadêmicas ruins, o que resulta em certos bloqueios psicológicos que dificultam o pleno aprendizado em algumas matérias. Em geral, possuem baixa autoestima e autoconfiança. Dessa forma, ao fazer observações sobre o trabalho deles, procure fazer comentários positivos que ressaltem a parte acertada do raciocínio, que mostrem a importância de um esforço sincero e que estimulem o estudante a continuar tentando. Note, entretanto, que ser construtivo é diferente de ser condescendente.

- **Nenhuma dúvida é básica demais**

  É muito importante tomar bastante cuidado com a reação a dúvidas apresentadas pelos alunos. Expressões faciais hostis ou que de certa forma transpareçam surpresa ou desprezem a pergunta costumam intimidar bastante os alunos, desincentivando-os a apresentarem novas questões. Dessa forma, trate todas as dúvidas com naturalidade e esmiúce a explicação da forma mais básica possível, para que o estudante se sinta à vontade para expor novamente suas dúvidas, caso necessário.

C.3.2 Orientações pedagógicas

Há inúmeros materiais que podem ser utilizados para consulta teórica de modo a fundamentar a base expositiva das aulas. De livros, uma ótima indicação é a coleção *Fundamentos de Matemática Elementar* [9], de fácil obtenção em bibliotecas e inclusive parte da coleção do próprio Curso Exato. Ela possui 11 volumes, que servem como uma referência sólida de todo o conteúdo sobre Matemática de Ensino Médio. Além disso, outra ótima referência é *Matemática e Ensino* [11], de Elon Lages Lima, que discute o ensino de Matemática com foco nos temas de Ensino Fundamental II.

A Internet também possui uma miríade de recursos que podem ser explorados para ajudar o professor em sua preparação de aulas e os alunos em seu estudo. Os materiais virtuais ainda se destacam por uma didática apurada, abusando da informalidade para dialogar com os estudantes de uma forma mais íntima. Apesar de o material em língua portuguesa ainda ser bastante básico, é possível encontrar ótimas referências em língua inglesa que podem ajudar o professor a fundamentar uma linha de explicação.

A principal indicação para esse propósito é o site *Math is fun* [2], que prima por apresentar os conteúdos de uma forma leve, cheia de exemplos e bastante compreensível ao público leigo. Outra indicação é a página *Purple Math* [3], que também aborda uma variedade impressionante de assuntos. Sua abordagem, entretanto, é um pouco mais formal. Além disso, o site Khan Academy [1] possui uma biblioteca imensa de vídeo-aulas sobre os mais diversos assuntos, direcionados a estudantes de vários níveis. O professor deve estimular os alunos a acessarem o site e conhecerem a plataforma, de modo a permitir que eles continuem seus estudos por conta própria.

C.4 Orientações aula a aula

As orientações aula a aula têm como objetivo guiar os professores sobre a abordagem pretendida em cada uma das aulas do Mês da Matemática, frisando pontos importantes, destacando tópicos que costumam causar confusão nos alunos, sugerindo maneiras de abordar assuntos com os quais os alunos usualmente têm dificuldade e dando dicas de exemplos e aplicações. No caso de assuntos que envolvem mais de uma aula, recomenda-se fortemente aos professores que leiam as recomendações de todas elas, para que todas as nuances relativas ao tópico em questão sejam identificadas.

Além disso, há indicações de materiais virtuais sobre os assuntos da aula em questão. Os materiais escritos sugeridos, de um modo geral, abordam o conteúdo de uma forma bastante didática, de modo que sua leitura pode ajudar o professor a elaborar estratégias e exemplos para melhor explicar o conteúdo.

Os materiais em vídeo, por outro lado, além de servirem como exemplo para o professor, podem e devem ser utilizados como material de estudo pelos alunos. Um dos principais objetivos do Curso é tornar os alunos mais autônomos em seus estudos; fornecer ferramentas que possibilitem que os alunos complementem e aprofundem seu aprendizado de forma independente é um passo importante nessa direção. Por isso, os vídeos sugeridos devem ser divulgados em sala de aula e compartilhados com as turmas.

Aula 1

A primeira aula apresenta os critérios de divisibilidade, introduz a definição de números primos e o algoritmo para decomposição de um número inteiro em fatores primos. Ela é importante pois fornece as bases para o cálculo do Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e do Máximo Divisor Comum (MDC), que serão explorados na segunda aula e são conceitos necessários para a manipulação de frações. Por isso, espera-se que os alunos terminem a aula conhecendo e sabendo executar a decomposição de um número em fatores primos.

Materiais sugeridos

Para consulta:

- Regras de divisibilidade:

  `http://www.mathsisfun.com/divisibility-rules.html`

- Números primos:

  `http://www.mathsisfun.com/definitions/prime-number.html`

- Decomposição em fatores primos:

  `http://www.mathsisfun.com/prime-factorization.html`

Para assistir:

- Regras de divisibilidade:

  `https://pt.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-factors-multiples/pre-algebra-divisibility-tests/v/divisibility-tests-for-2-3-4-5-6-9-10`

- Números primos:

  `https://pt.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-factors-multiples/pre-algebra-prime-numbers/v/prime-numbers`

- Decomposição em fatores primos:

  `https://pt.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-factors-multiples/pre-algebra-prime-factorization-prealg/v/prime-factorization`

Aula 2

A segunda aula utiliza as definições introduzidas na primeira aula para apresentar os conceitos de Mínimo Múltiplo Comum (MMC) e Máximo Divisor Comum (MDC), além de ensinar um algoritmo para calculá-los. O algoritmo escolhido foi o da decomposição simultânea, por acreditarmos que seja um método simples e poderoso, suficiente para as necessidades dos alunos.

Como o algoritmo para cálculo do MMC é essencial para a realização de operações com frações, o professor deve dedicar atenção especial a esse assunto, garantindo que os alunos saibam executá-lo corretamente.

Materiais sugeridos

Para consulta:

- Mínimo Múltiplo Comum:

  `http://www.mathsisfun.com/least-common-multiple.html`

- Máximo Divisor Comum:

  `http://www.mathsisfun.com/greatest-common-factor.html`

Para assistir:

- Mínimo Múltiplo Comum:

  `https://pt.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-factors-multiples/pre-algebra-lcm/v/least-common-multiple-exercise-2`

- Máximo Divisor Comum:

  `https://pt.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-factors-multiples/pre-algebra-greatest-common-divisor/v/greatest-common-divisor`

Aula 3

A terceira aula introduz a ideia de frações e aborda conceitos relacionados, como frações equivalentes. Neste tópico, também explica como encontrar frações equivalentes com um dado denominador e como simplificar frações.

O professor deve garantir que a ideia de fração seja internalizada pelos alunos, utilizando vários exemplos além dos contidos nos slides; para isso, pode utilizar situações cotidianas como a ida a uma pizzaria com amigos, a divisão de uma barra de chocolate, a obtenção de nota parcial em uma prova, entre outros. Sugere-se que o processo de exemplificação seja feito em um estilo conversacional, expondo as situações aos alunos e fazendo diversas perguntas sobre cada uma delas. O uso de recursos visuais, nesse ponto, é essencial para assegurar o entendimento dos alunos.

Por exemplo, pode-se imaginar uma situação em que Andreza e Renato se encontram em uma pizzaria para jantar e pedem uma pizza de oito pedaços, dos quais Andreza come um e Renato come outros três. Pergunta-se então que fração da pizza cada um deles comeu e que fração da pizza sobrou após o jantar. A resposta dos alunos, que provavelmente será de quatro oitavos, pode ser utilizada para explorar a ideia de frações equivalentes e simplificação de frações, por meio da observação de que o que sobrou foi exatamente metade da pizza. Pode-se perguntar, também, que fração da pizza original cada um deles levou para casa, se eles dividiram os restos igualmente entre eles.

A situação também pode ser aprofundada imaginando em seguida uma distribuição diferente dos pedaços: um caso, por exemplo, em que Andreza comeu dois pedaços da pizza e Renato outros três. Nesse caso, uma pergunta interessante que pode ser feita é que fração da pizza cada um deles levou para casa, se dividiram os restos igualmente. Os alunos perceberão com facilidade que sobraram três pedaços e que, portanto, cada um deles levou um pedaço e meio, mas podem ter maior dificuldade em expressar essa ideia em frações. O professor pode auxiliar dizendo que meio pedaço de uma pizza dividida em oito partes iguais equivale a um pedaço inteiro de uma pizza dividida em dezesseis partes iguais, solucionando o problema e estabelecendo as bases de um raciocínio que será útil aos alunos nas aulas seguintes.

Materiais sugeridos

Para consulta:

- Tópicos de frações:

  `http://www.mathsisfun.com/fractions-menu.html`

Para assistir:

- Tópicos de frações:

  `https://pt.khanacademy.org/math/arithmetic/fraction-arithmetic`

Aula 4

A quarta aula é sobre adição e subtração de frações. Os alunos são primeiro expostos à ideia de adicionar pedaços de mesmo tamanho, o que é conceitualmente e praticamente simples. O professor deve, em seguida, mostrar que adicionar pedaços de tamanhos diferentes não é simplesmente igual a somar os numeradores e os denominadores separadamente; para isso, pode-se utilizar a lousa para, com barras de chocolates, mostrar que um meio mais um terço não equivale a dois quintos. Quando os alunos aceitarem esse fato pela confirmação visual, pode-se prosseguir com o método de encontrar frações equivalentes a cada parcela que tenham o mesmo denominador.

Materiais sugeridos

Para consulta:

- Tópicos de frações:
  `http://www.mathsisfun.com/fractions-menu.html`

Para assistir:

- Tópicos de frações:
  `https://pt.khanacademy.org/math/arithmetic/fraction-arithmetic`

Aula 5

A quinta aula continua o tema de operações com frações explorando multiplicação e divisão de frações. A ideia de multiplicação de frações pode ser introduzida interpretando o sinal de multiplicação como a preposição "de". Assim, os alunos podem pensar na operação $2 \times \frac{1}{3}$ como sendo o cálculo do dobro de $\frac{1}{3}$, ou no resultado da operação $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ como sendo o tamanho de metade de um pedaço de um objeto que foi dividido em três. O professor pode desenhar alguns exemplos dessas operações na lousa, para que os alunos se familiarizem com o conceito, de forma mais intuitiva.

A ideia de divisão de frações, por outro lado, é um pouco mais complexa. Idealmente, o professor deve discutir um pouco o significado da operação com a turma antes da apresentação da regra do cálculo. Essa apresentação deve ser feita por passos, trabalhando com casos específicos de divisão com dificuldade incremental.

Inicialmente, apresenta-se o caso da divisão de uma fração unitária (com denominador igual a um) por um número inteiro. Por exemplo, cria-se um contexto para a realização do cálculo de $\frac{1}{3} \div 4$ e usa-se um desenho de barras para mostrar qual é o quociente. Um contexto possível para essa operação é o de um grupo que disputava uma competição e recebeu um terço do valor total de uma premiação, tendo que dividi-lo entre seus quatro membros. Então, pode-se explorar a relação entre a multiplicação e divisão para explicar que $\frac{1}{3} \div 4 = \frac{1}{12}$ porque $\frac{1}{12} \times 4 = \frac{1}{3}$.

Em seguida, interpreta-se a divisão de um número inteiro por uma fração unitária e calcula-se o quociente. Por exemplo, cria-se um contexto para apresentar a realização do cálculo de $4 \div \frac{1}{2}$ e usa-se um desenho de barras para mostrar qual é o quociente. Um contexto possível para essa operação é uma situação em que uma pessoa, de posse de uma garrafa de quatro litros de água, quer descobrir quantas garrafas de meio litro ela consegue encher (cuidado: deve ser utilizada apenas a representação fracionária de metade porque, no contexto do Mês da Matemática, os alunos não foram introduzidos ainda à ideia de número decimal). Então, pode-se explorar a relação entre a multiplicação e a divisão para explicar que $4 \div \frac{1}{2} = 8$ porque $8 \times \frac{1}{2} = 4$.

Outros exemplos possíveis para situações que representam os dois primeiros casos são: se três pessoas dividirem meio quilo de chocolate igualmente, com que fração de quilograma de chocolate cada pessoa ficará? Se Mariana separou duas canecas inteiras de açúcar para uma receita, quantas canecas de um terço do tamanho da caneca maior ela consegue encher com a mesma quantidade de açúcar?

Por último, interpreta-se a divisão entre frações e calcula-se o quociente. Por exemplo, cria-se um contexto para o cálculo de $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4}$ e usa-se um desenho de barras para mostrar qual é o quociente. Então, pode-se explorar a relação entre multiplicação e divisão para explicar que $\frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$ porque $\frac{3}{4} \times \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$. Em seguida, pode-se generalizar o resultado para mostrar que dividir duas frações é o mesmo que multiplicar a primeira pelo inverso da segunda.

Para a contextualização da divisão de frações, pode-se usar, por exemplo, o conceito de área geométrica, perguntando qual é a largura de uma fazenda retangular que tem $\frac{3}{4}$ de quilômetro de comprimento e $\frac{1}{2}$ quilômetro quadrado de área. Outra opção é perguntar quantas garrafinhas de $\frac{3}{4}$ de litro pode-se encher com $\frac{5}{2}$ de litros de suco.

Após a introdução do conceito de divisão, o professor pode voltar para os slides, apresentar a definição de inverso e formalizar a regra da divisão.

Considerando que esta aula apresenta um conteúdo mais sensível e mais difícil de explicar, recomenda-se, na medida do possível, que ela fique a cargo de um voluntário mais experiente.

Materiais sugeridos

Para consulta:

- Tópicos de frações:

  `http://www.mathsisfun.com/fractions-menu.html`

Para assistir:

- Tópicos de frações:
  `https://pt.khanacademy.org/math/arithmetic/fraction-arithmetic`

Aula 6

A sexta aula introduz números decimais. No início, quando da apresentação do conceito de sistema de numeração, deve-se dar bastante atenção a como funciona o sistema posicional e de que forma ele permite expressar numericamente vastas quantias com um número limitado de algarismos distintos. Para isso, o professor deve efetuar uma contagem a partir do zero, escrevendo cada número na lousa; ao chegar no número nove, ele mostra aos alunos que, em vez de usar um outro símbolo para representar o número dez, ele pode utilizar um dígito a mais, à esquerda da unidade, para representar uma dezena completa. A mesma ideia também pode ser aplicada para continuar contando depois do 99: usa-se um dígito a mais, à esquerda da dezena, para representar uma dezena de dezenas, ou centena. Assim, com a utilização de vários dígitos, pode-se expressar numericamente qualquer quantidade, utilizando apenas dez algarismos distintos.

Caso o professor sinta interesse da turma, ele pode exemplificar melhor esse conceito fazendo um paralelo com o sistema de numeração binário, extremamente utilizado em áreas como Computação e Engenharia Elétrica. É possível, além disso, contar aos alunos sobre uma camiseta muito popular entre estudantes e trabalhadores da área de tecnologia, com a frase "Existem apenas 10 tipos de pessoas no mundo: as que entendem binários e as que não.". Explicando o significado da frase e prestando atenção na reação dos alunos, o professor pode perceber se o conceito de sistema de numeração posicional foi entendido com clareza. Uma versão da camiseta, com os dizeres em inglês, está exibida na Figura 1.

Em seguida, explora-se a diferença entre valor relativo e valor absoluto de um algarismo. O professor deve salientar que um dígito sempre tem valor intrínseco dez vezes maior que o dígito imediatamente à sua direita, e dez vezes menor que o dígito imediatamente à sua esquerda. Na introdução da ideia de utilizar dígitos à direita da unidade para representar valores fracionários, deve-se observar que é necessário um marcador que delimite a posição da unidade, já que ela não é mais o dígito mais à direita do número, e para isso utilizamos a vírgula.

As frações decimais são apresentadas com o objetivo de mostrar aos alunos que os números decimais são apenas uma nova forma de representar um conceito já conhecido. Os exercícios de conversão entre as duas formas exercitam esse conceito. A representação utilizando frações decimais também pode ser utilizada para facilitar a comparação de decimais, mas o foco principal da seção de ordenação deve ser o entendimento do valor relativo associado a cada dígito. Deve-se prestar atenção especial à presença de zeros nos números e salientar que zeros à direita do número, depois da vírgula, não alteram o seu valor.

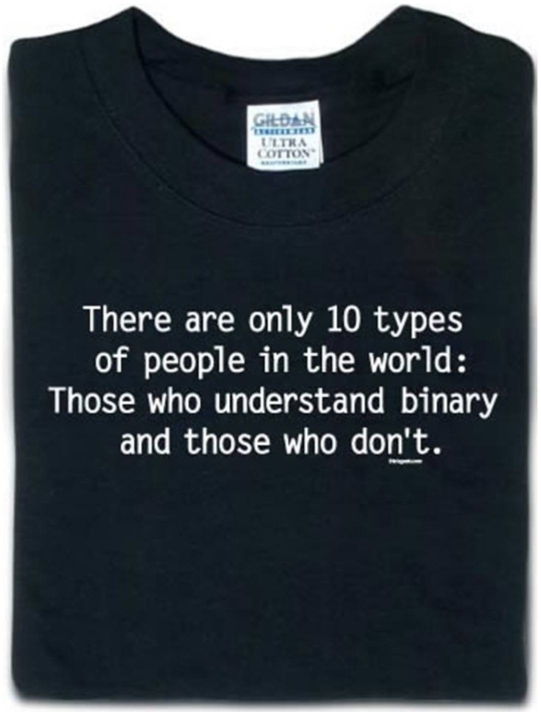


Figura 1: Camiseta contendo, em inglês, a frase ”Existem apenas 10 tipos de pessoas no mundo: as que entendem binários e as que não.”

Por fim, a adição e subtração de decimais devem ser explicadas fazendo paralelos com o algoritmo usual de adição e subtração, utilizado com números inteiros.

Materiais sugeridos

Para consulta:

- Tópicos de números decimais:
  `http://www.mathsisfun.com/decimals-menu.html`

Para assistir:

- Tópicos de números decimais:
  `https://pt.khanacademy.org/math/arithmetic/arith-decimals`

Aula 7

A sétima aula continua a abordagem de números decimais, tratando os casos de multiplicação e divisão de decimais. O assunto deve ser introduzido mencionando o caso específico de divisão/multiplicação de um número por uma potência de dez. Para isso, é importante relembrar o valor relativo de cada dígito em um número (os comentários iniciais sobre a aula 6 podem ser úteis) e o fato de que cada dígito tem um valor intrínseco dez vezes maior que o dígito imediatamente à sua direita e dez vezes menor que o dígito imediatamente à sua esquerda. Assim, multiplicar por dez significa aumentar em dez vezes o valor relativo de cada algarismo, o que equivale a fazê-lo ocupar a ordem imediatamente superior. Da mesma forma, dividir por dez significa diminuir em dez vezes o valor relativo de cada algarismo, o que equivale a fazê-lo ocupar a ordem imediatamente inferior. A novidade, nessa aula, é aplicar essa ideia a números decimais, o que se dá pela movimentação da vírgula. Deve-se, então, generalizar o resultado para outras potências de 10.

Em seguida, o professor deve conversar com os alunos e relembrar o algoritmo usado para multiplicar números inteiros e então adaptá-lo ao uso de decimais. Também é interessante retomar o algoritmo de divisão euclidiana antes de iniciar a seção de divisão, dedicando uma atenção especial a quando o quociente for um número decimal. A divisão de um decimal por número inteiro pode ser ensinada, então, fazendo paralelo com a adaptação utilizada para a multiplicação de decimais.

A introdução à divisão com divisor decimal pode ser precedida pela análise de uma propriedade interessante, que pode ajudar os alunos a se familiarizarem melhor com o conceito: o fato de que, em uma divisão, multiplicar o dividendo e o divisor pelo mesmo número não altera o quociente. Para isso, escreva algumas divisões simples na lousa (com um espaçamento conveniente) e peça para os alunos responderem qual é o quociente; em seguida, escreva embaixo de cada uma novas divisões, originadas da multiplicação do divisor e do dividendo por um mesmo número (por 2, 3, 10, ...) e peça para os alunos calcularem novamente o quociente de cada uma. A turma logo irá perceber que os quocientes se mantêm inalterados. Peça, então, que a turma sugira de que forma isso pode ser utilizado para transformar uma divisão de decimais em divisão de inteiros. Se necessário, guie o raciocínio dos alunos na direção certa. Após chegarem na resposta, a última seção pode ser apresentada.

Materiais sugeridos

Para consulta:

- Tópicos de números decimais:

  `http://www.mathsisfun.com/decimals-menu.html`

Para assistir:

- Tópicos de números decimais:

  `https://pt.khanacademy.org/math/arithmetic/arith-decimals`

Aula 8

A oitava aula é essencialmente uma aula de exercícios, abrangendo todo o conteúdo de frações e números decimais. A aula foi planejada para conter exercícios curtos, para serem feitos rapidamente, de modo a permitir que todo o conteúdo seja coberto. O professor responsável pelo primeiro bloco de aula deve, então, informar o professor responsável pelo segundo bloco qual é o assunto em que os alunos tiveram mais dificuldades, para que ele possa dar a atenção necessária ao tópico.

Materiais sugeridos

Para consulta:

- Tópicos de frações:

  `http://www.mathsisfun.com/fractions-menu.html`

- Tópicos de números decimais:

  `http://www.mathsisfun.com/decimals-menu.html`

Para assistir:

- Tópicos de frações:

  `https://pt.khanacademy.org/math/arithmetic/fraction-arithmetic`

- Tópicos de números decimais:

  `https://pt.khanacademy.org/math/arithmetic/arith-decimals`

Aula 9

A nona aula apresenta os conjuntos numéricos e as operações com inteiros. Além de listar os principais conjuntos, é útil que o professor mencione as aplicações de cada tipo de número: enquanto os números naturais são utilizados para o tipo mais básico de contagem, os inteiros expandem essa noção podendo indicar débito ou diminuição, já os racionais permitem a representação de partes de objetos e valores e, por fim, os números reais têm uma relação profunda com a geometria, sendo utilizados para a representação de medidas.

O restante da aula explorará o conjunto dos números inteiros. Posicioná-los na reta numérica fornece um auxílio visual para uma melhor assimilação do conceito de números negativos; dessa forma, somar/subtrair uma quantidade corresponde simplesmente a caminhar na reta em algum dos seus sentidos. O sinal negativo pode ser entendido como tomar o sentido contrário; assim, fica clara a relação profunda entre adição e subtração.

No item de adição e subtração de inteiros dos materiais sugeridos, pode ser encontrada uma ótima analogia para a explicação do significado de adição e subtração de inteiros, utilizando balões e pesos presos em uma cesta. A mesma ideia pode ser utilizada em sala de aula para ajudar a turma a visualizar melhor a situação. A leitura do material é fortemente recomendada para embasar a preparação da aula.

É mais fácil para os alunos aprender a operar com números negativos tendo clara a noção de módulo ou valor absoluto e esse um bom momento para a exposição desse conceito, que deve ser apresentado como a distância de um número até o número zero na reta numérica.

A multiplicação e divisão de inteiros não costuma ser um problema para os alunos, mas os alunos costumam confundir as regras de adição/subtração com as de multiplicação/divisão; uma atenção grande por parte do professor é necessária nesse ponto, portanto.

Materiais sugeridos

Para consulta:

- Conjuntos numéricos:
  `http://www.mathsisfun.com/sets/number-types.html`
- Adição e subtração de inteiros:
  `http://www.mathsisfun.com/positive-negative-integers.html`
- Multiplicação de inteiros:
  `http://www.mathsisfun.com/multiplying-negatives.html`
- Divisão de inteiros:
  `http://www.purplemath.com/modules/negative3.htm`

Para assistir:

- Tópicos sobre números negativos:
  `https://pt.khanacademy.org/math/arithmetic/arith-review-negative-numbers`

Aula 10

A décima aula é sobre potenciação e suas propriedades. Inicialmente, as propriedades são apresentadas no contexto dos números naturais, para que a turma possa praticá-las sem as complicações que o manejo de conjuntos numéricos mais amplos acarreta. Em seguida, trata-se de potenciação de racionais positivos e, por último, potenciação de números negativos.

A potenciação de números negativos pode ser introduzida explorando a relação entre multiplicação e divisão. Na adição, somar uma parcela negativa é a mesma coisa que subtrair; de forma análoga, enquanto elevar uma base a um número positivo significa multiplicá-lo um determinado número de vezes, elevar a uma potência negativa é equivale a dividir a unidade por ele um determinado número de vezes.

Materiais sugeridos

Para consulta:

- Potenciação:
  `https://www.mathsisfun.com/exponent.html`
- Propriedades da potenciação:
  `https://www.mathsisfun.com/algebra/exponent-laws.html`

Para assistir:

- Tópicos sobre expoentes e potências:
  `https://pt.khanacademy.org/math/in-eighth-grade-math/exponents-powers-1`

Aula 11

A décima primeira aula continua o assunto da anterior, abordando radiciação. O tema é introduzido por meio da inversão da potenciação, que é um conceito com o qual os alunos já estão familiarizados. Utilizando potenciação, o entendimento da relação entre expoentes fracionários e radiciação fica facilitado: utilizando as propriedades de exponenciação, mostramos que $9^{\frac{1}{2}} \times 9^{\frac{1}{2}} = 9^1 = 9$ e, portanto, $9^{\frac{1}{2}}$ é simplesmente o número que ao quadrado é igual a nove, ou a raiz quadrada de nove. Um raciocínio similar pode ser adotado para a generalização do denominador do expoente.

O professor deve garantir que a turma pratique extensivamente as propriedades e, principalmente, que o tempo seja adequadamente planejado para cada seção, para que o último assunto, sobre raízes não-exatas, receba a atenção necessária.

Materiais sugeridos

Para consulta:

- Expoentes fracionários:
  `http://www.mathsisfun.com/algebra/exponent-fractional.html`
- Raízes quadradas:
  `http://www.mathsisfun.com/square-root.html`
- Raízes cúbicas:
  `http://www.mathsisfun.com/numbers/cube-root.html`
- Raízes genéricas:
  `http://www.mathsisfun.com/numbers/nth-root.html`

Para assistir:

- Radiciação:

  https://pt.khanacademy.org/math/pre-algebra/pre-algebra-exponents-radicals

Aula 12

A décima segunda aula inicia a abordagem de Álgebra por meio de expressões algébricas. Para introduzir o assunto, é útil começar relembrando o conceito de expressões numéricas e as regras de resolução (como parentesiação e ordem de prioridade de operações) associadas a elas.

Na definição de expressões algébricas, é importante dedicar algum tempo à discussão do significado de variável[3]. Uma boa forma de encaminhar a discussão é argumentar que a modelagem de certos problemas, quando há alguma informação faltante, exige uma forma de representar quantias desconhecidas.

Como exemplo, podemos utilizar o salário de um vendedor. Normalmente, vendedores recebem uma quantia fixa, chamada de salário base, que é incrementada pelas comissões de venda. Podemos representar essa descrição em linguagem matemática, mas é necessária uma ferramenta mais abstrata e a Aritmética disponibiliza apenas números. Para isso, utilizamos *variáveis*, que representam as quantias indeterminadas na descrição. Assim, podemos dizer que $S = Q + C$, ou seja: que o salário de um vendedor (S) é composto por uma quantia fixa[4] (Q) mais uma comissão variável (C).

É importante que os alunos tenham, também, um bom entendimento das definições relativas às outras partes constituintes de uma expressão algébrica. *Coeficientes* podem ser definidos como cada um dos números que multiplicam cada variável e termos podem ser tanto um único número ou variável, quanto números e variáveis multiplicados. As definições podem ser exercitadas utilizando alguns exemplos, em que o professor pergunta à turma qual é a variável, quais são os coeficientes e quantos são os termos algébricos de cada um. Aconselha-se a prestar atenção especial ao caso em que a variável aparentemente não está multiplicada por coeficiente algum, como em x, y^3 ou k^7.

Por fim, após alguns exemplos de situações que podem ser modeladas por expressões algébricas, menciona-se o conceito de valor numérico de uma expressão. Dando valor

[3]Tatiana Roque e Bruna Corrêa são autoras de uma ótima discussão sobre a diferença conceitual entre incógnitas, variáveis e coeficientes, disponível no site da Sociedade Brasileira de Matemática: http://simposio.profmat-sbm.org.br/docs/minicurso_SFPM_Historia_no_Ensino-Bruna.pdf. Resumidamente, tanto incógnitas quanto variáveis representam grandezas desconhecidas; mas enquanto a incógnita é um quantidade desconhecida cujo valor pode ser determinado pelas condições fornecidas pela equação, a variável é uma quantidade indeterminada.

[4]Na representação do salário do vendedor como uma função, seu salário base é, na verdade, uma constante arbitrária; no entanto, essa distinção é mais avançada e será feita num momento mais oportuno.

numérico às variáveis, saímos de uma representação geral de uma situação para casos particulares.

Materiais sugeridos

Para consulta:

- Ordem de operação:

  https://www.mathsisfun.com/operation-order-bodmas.html

- Definições básicas[5]:

  http://www.mathsisfun.com/algebra/definitions.html

- Valor numérico de uma expressão:

  https://www.mathsisfun.com/algebra/substitution.html

Para assistir:

- Introdução às variáveis e expressões:

  https://pt.khanacademy.org/math/cc-sixth-grade-math/cc-6th-expressions-and-variables

Aula 13

A décima terceira aula continua o assunto da anterior, com o ensino das regras que permitem operar com termos algébricos. Novamente, uma comparação com expressões numéricas e sua resolução é necessária. No entanto, a presença de variáveis e o fato de que nem todas as expressões que aparecem dentro de parênteses podem ser completamente resolvidas exigem regras adicionais, não necessárias no desenvolvimento de expressões numéricas, como a propriedade distributiva.

Materiais sugeridos

Para consulta:

- Ordem de operação:

  https://www.mathsisfun.com/operation-order-bodmas.html

- Redução de termos semelhantes:

  https://www.mathsisfun.com/algebra/expanding.html

- Propriedades:

  https://www.mathsisfun.com/associative-commutative-distributive.html

[5] É importante observar que, em inglês, não é utilizada de forma tão clara a distinção entre variável e incógnita.

Para assistir:

- Introdução às variáveis e expressões:

  `https://pt.khanacademy.org/math/cc-sixth-grade-math/cc-6th-expressions-and-variables`

Aula 14

A décima quarta aula introduz equações. Para tornar o conceito mais concreto, é muito útil comparar uma equação a uma balança de pratos equilibrada, em que cada membro da equação corresponde a um dos pratos da balança. Encontrar a raiz de uma equação, portanto, equivale a descobrir qual é o peso dos objetos presentes nos pratos que mantêm a balança equilibrada.

Ao conceituar raiz de uma equação, é interessante fazer uma observação sobre a diferença no papel das variáveis entre equações e expressões algébricas: enquanto em expressões as variáveis podem assumir qualquer valor, a depender da situação, em equações apenas algum(ns) valores tornam a igualdade verdadeira.

No momento de explicar o processo de resolução de equações de primeiro grau, a analogia da balança é novamente bem-vinda. Para manter a balança equilibrada, todas as alterações feitas nos objetos de um dos pratos deve ser replicada no outro prato, o que, em linguagem matemática, significa submeter os dois membros da equação à mesma operação. A lembrança da relação inversa entre adição/subtração e multiplicação/divisão também pode ajudar os alunos a entender melhor o processo de isolar uma incógnita.

Materiais sugeridos

Para consulta:

- Equações:

  `https://www.mathsisfun.com/definitions/equation.html`

- Resolvendo equações:

  `https://www.mathsisfun.com/algebra/equations-solving.html`

Para assistir:

- Introdução às equações:

  `https://pt.khanacademy.org/math/cc-sixth-grade-math/cc-6th-equations-and-inequalities`

Aula 15

A última aula é dedicada ao exercício da escrita e resolução de equações do primeiro grau. Como os dois assuntos são extremamente importantes, o tempo dedicado a cada um deles deve ser similar. O professor também deve estar pronto para fornecer novos exemplos, caso seja necessário.

Materiais sugeridos

Para consulta:

- Equações:
  https://www.mathsisfun.com/definitions/equation.html
- Resolvendo equações:
  https://www.mathsisfun.com/algebra/equations-solving.html

Para assistir:

- Introdução às equações:
  https://pt.khanacademy.org/math/cc-sixth-grade-math/cc-6th-equations-and-inequalities

D Aula interdisciplinar: A Matemática e a Música

D.1 Orientações

Matemática e Música - Roteiro e Orientações

A ideia central da aula é mostrar como a Matemática aparece e se manifesta na Música. Objetiva-se que ela seja ministrada por dois professores, um de Música e um de Matemática que, juntos, a conduzirão em seus aspectos teóricos e práticos. A aula é dividida em três blocos, nos quais elementos musicais são introduzidos paulatinamente e abordados em suas relações com a Matemática.

Para imprimir um bom ritmo para aula, é importante levar em consideração as observações a seguir.

1) A preparação prévia é fundamental.
   O conteúdo da aula, apesar de envolver operações básicas, exige uma boa preparação prévia. É essencial que os professores saibam utilizar os exemplos de maneira a completar o conteúdo que apresentam. Neste sentido, é importante que eles se reúnam com antecedência para discutir a aula e a forma como irão trabalhar os exemplos em sala.

2) A utilização dos recursos sonoros e de instrumentos enriquece a aula.
   Consta do material didático preparado uma série de exemplos musicais que ilustram as operações e os conceitos apresentados durante a aula. O momento da utilização de cada exemplo é apontado nos slides. O uso efetivo destes instrumentos permite a atuação simultânea de ambos os professores, tornando a aula mais lúdica e interativa, bem como permitindo a fixação dos conceitos apresentados, em particular, os do segundo bloco.

3) A utilização de referências a músicas atuais conecta o tema à realidade dos alunos.
   Para aproximar o conteúdo da aula dos alunos e facilitar a sua absorção, recomenda-se a utilização de músicas presentes no repertório dos estudantes.

4) É importante não se prender demais aos cálculos.
   O principal objetivo da aula é trazer a Matemática para o cotidiano dos alunos, mostrando que ela aparece, e é reconhecida pelo cérebro, de forma natural, muitas vezes sem sequer nos darmos conta disso. Para este objetivo o foco deve ser a sua relação com a música e não os seus aspectos técnicos.

Como já foi dito, esta aula está dividida em três blocos. O primeiro cobre conceitos teóricos musicais básicos. Espera-se que, ao seu final, os alunos tenham compreendido a atribuição de letras às notas musicais e o que são intervalos musicais. As atividades a seguir contribuem para este objetivo.

1) Tocar a escala maior de dó utilizando algum instrumento. Convidar os alunos para fazerem coral com as notas os aproxima do conteúdo, permitindo que eles sintam que o dominam, mesmo sem ter estudo formal.

2) Realizar algumas operações matemáticas utilizando a escala de dó para mostrar como a música segue regras matemáticas. Sem se estender demais nos exemplos, recomendamos que sejam feitos dois exercícios simples, com a única finalidade de fixar os conceitos. Salientamos a importância de enfatizar como os resultados desses exercícios se traduzem em som e sua relação com os intervalos musicais.

Por meio de certas operações matemáticas, na segunda parte da aula, é apresentada a construção da *Escala Pitagórica*. Espera-se que ao seu final, os alunos tenham entendido como operações matemáticas foram usadas na primeira forma rudimentar de escala musical conhecida. A seguir, são descritas duas atividades que auxiliam na dinâmica deste bloco.

1) Utilizar um violão para ilustrar os conceitos de som consoante e dissonante. Esses conceitos podem ser facilmente demonstrados no instrumento, utilizando os exemplos fornecidos nos slides.

2) Mostrar a relação do comprimento de cordas com o som emitido: instrumentos de cordas, como violão, ilustram facilmente esta relação, que é um ponto fundamental da aula.

O terceiro, e último, bloco explora o conceito de som como um fenômeno físico e discute alguns problemas da Escala Pitagórica. O objetivo é que os estudantes entendam como diferentes operações matemáticas são fundamentais para construções musicais. Para o bom andamento deste bloco é importante utilizar exemplos para reforçar o conceito de frequências. Isto porque, compreendendo que frequências mais altas representam sons mais agudos e frequências mais baixas sons mais graves, o aluno conseguirá traçar um paralelo com a sua experiência, absorvendo melhor o conteúdo da aula. Salientamos também a importância de tocar um trecho da obra *O Cravo Bem Temperado*, de J. S. Bach, utilizada como exemplo durante a aula, como uma forma de contextualizá-la.

Como um fecho para a aula, sugere-se que os professores, utilizando algum instrumento musical, toquem uma sequência de notas simples que remeta a uma música conhecida entre os alunos. Desta forma, eles perceberão como estas notas simples, vistas durante a aula, são a base para estruturas musicais mais complexas.

Material para consulta:
Matemática e Música - Parte 1 (https://www.youtube.com/watch?v=ETPzsN-vgE8)
Matemática e Música - Parte 2 (https://www.youtube.com/watch?v=GFZngfZU6Yk)
Matemática na Música (https://www.youtube.com/watch?v=Z93YDhKfgkc&t=1329s)

D.2 Transparências

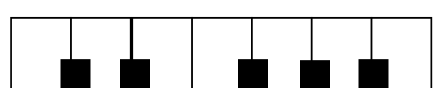
Matemática e Música

Curso Exato

” Matemática, de modo algum, são fórmulas, assim como a música não são notas.” - Y Jurquim

Matemática e Música?

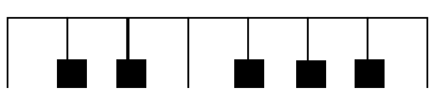
Quais são as relações entre matemática e música?



Matemática e Música!

- Linguagens Universais com **elementos** e **leis de formação** próprios.

Notas musicais	Números
↓	↓
Escalas musicais Tonalidade	Conjuntos
↓	↓
Música	Matemática

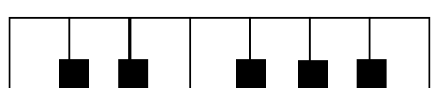


Matemática e Música!

- Onde elas se cruzam?

- Quais as relações que existem entre a matemática e a música?
  - Veremos adiante!

- Precisamos entender alguns conceitos da música!



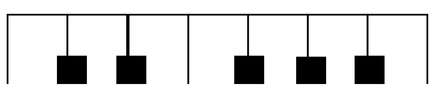
Linguagem Musical

- Em um piano comum existem **88 notas**

- **No piano**, as notas podem ser agrupadas em **8 intervalos:** 7 oitavas + 1 terça

- São **sete** as notas musicais principais:

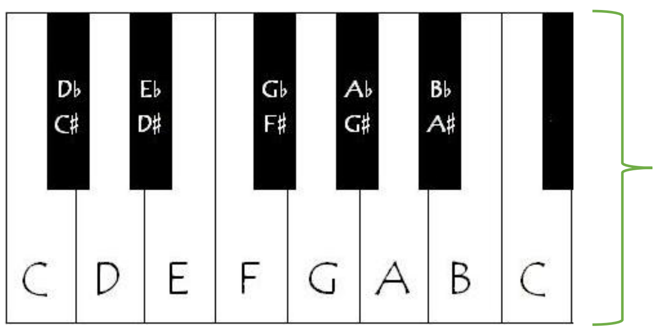
Dó **ou** C	Sol **ou** G
Ré **ou** D	Lá **ou** A
Mi **ou** E	Si **ou** B
Fá **ou** F	



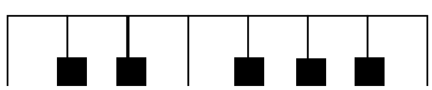
Linguagem Musical

- A **oitava** é o único intervalo comum a todas as culturas.

- No piano, uma oitava é constituída por 12 teclas:



7 teclas brancas
+
5 teclas pretas



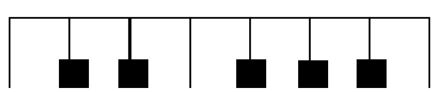
Linguagem Musical

- O menor intervalo entre duas notas é um **semitom** (ou: ½ tom)

- A escala de **Dó Maior**, tem a seguinte **lei de formação:**

C	D	E	F	G	A	B	C
1 tom	1 tom	½ tom	1 tom	1 tom	1 tom	½ tom	

(1)



Linguagem Musical

- **1 tom = ½ tom + ½ tom** *(ex: C + 1 tom = D)*

(2)

C **C# ou D♭** **D**

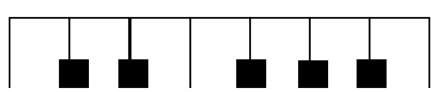
½ tom ½ tom

- Portanto:

Símbolo	Nome	Efeito	Exemplo
#	Sustenido	Aumentar um semitom	C + ½ tom = C#
♭	Bemol	Diminuir um semitom	D – ½ tom = D ♭

(3)

(4)



Linguagem Musical

- Sabendo que:

1 tom = ½ tom + ½ tom

C D E F G A B C

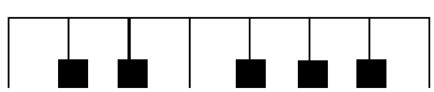
1 tom 1 tom ½ tom 1 tom 1 tom 1 tom ½ tom

C C# ou D ♭ D

½ tom ½ tom

- Resolva:

- G – 2 tons = D♯ ou E ♭ (5)
- D ♭ + 7/2 tons = G♯ ou A ♭ (6)
- E + 11/2 tons = D♯ ou E ♭ *(uma oitava acima)* (7)

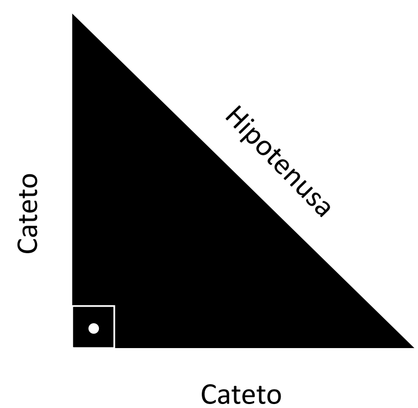


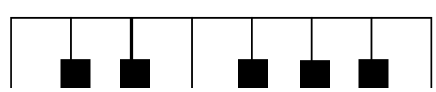
”A música exprime a mais alta filosofia numa linguagem que a razão não compreende” - Schopenhauer

Matemática e Música!

Conhece Pitágoras?

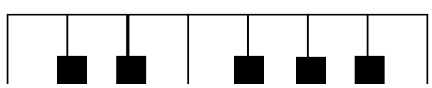
Teorema de Pitágoras?





Pitágoras (570 a.c. – 495 a.c.)

- Físico, matemático, filósofo grego.
- Famoso pelo Teorema de Pitágoras
- Primeiro a unir matemática e música.

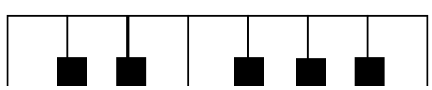


Lenda dos Martelos

"Diz a lenda que:

Pitágoras, ao passar em frente a uma oficina de ferreiros, ouviu o som produzido pelos martelos ao baterem nas bigornas.

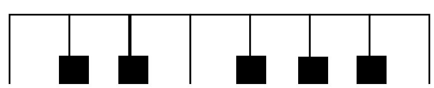
Pitágoras ficou muito curioso ao perceber que alguns sons gerados pelas batidas eram agradáveis e soavam muito bem juntos, enquanto outros não soavam tão bem assim."



Lenda dos Martelos

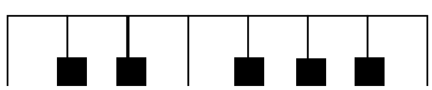
- *Quais propriedades fazem com que o som de dois martelos soem bem juntos?*

- *Se conhecermos cada um dos sons emitidos pelos martelos, será que conseguimos prever, com a ajuda de alguma relação matemática, se eles soarão bem juntos?*



Metalofone

- Simulação: **Metalofone**
- Lâminas de Metal de diversos tamanhos e pesos.
- Dispostas como teclas de um teclado.



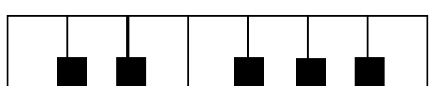
Metalofone

- Ao batermos determinadas teclas juntas obtemos sons que harmonizam bem entre si.

- Consonantes

(8)

(9)

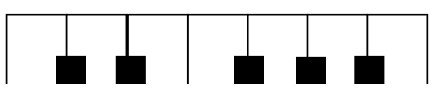


Metalofone

- Outros, porém, não harmonizam tão bem assim.

- Dissonantes

(10)

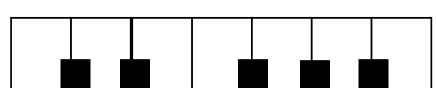


Lenda dos Martelos

- Pitágoras pesou os martelos.

- **Relação entre peso dos martelos consonantes era 1:2**

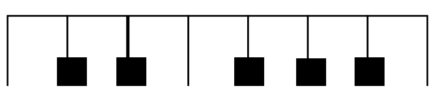
- Aprofundou a investigação com um novo instrumento: **Monocórdio de Pitágoras**

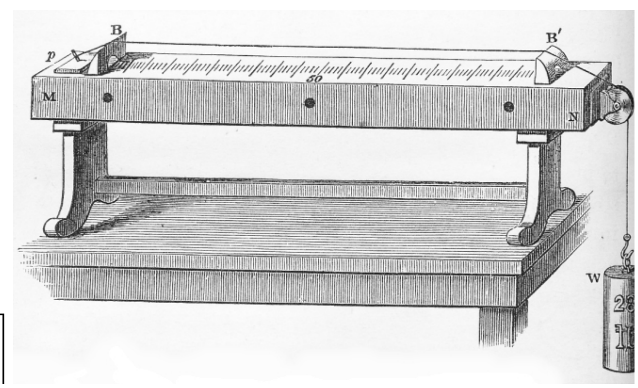


O Monocórdio de Pitágoras

Corda de tripa esticada, sobre uma caixa de madeira, com as extremidades presas a cavaletes.

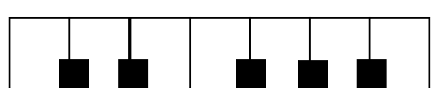
No meio há um cavalete móvel que anda pelo braço do instrumento permitindo ouvir o som da corda com diferentes comprimentos.





O Monocórdio de Pitágoras

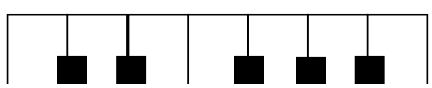
Quais instrumentos atuais são similares ao monocórdio de Pitágoras?



O Monocórdio de Pitágoras

Quais instrumentos atuais são similares ao monocórdio de Pitágoras?

- Guitarra
- Violão
- Baixo
- Violino
- Violoncelo
- Piano de Calda
- Voz
- Instrumentos de cordas

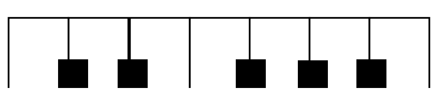


O Monocórdio de Pitágoras

- Objetivo: Investigar relação entre comprimento da corda e sons consonantes

- Som da corda solta: **Fundamental**

- Experimento: alterar comprimento da corda e procurar sons consonantes com o som fundamental



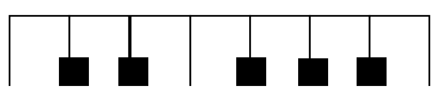
Oitavas

- Primeiro Teste: **metade da corda**

- Razão de comprimento com a fundamental = **1:2**

- Produz som consonante que chamamos de **oitava** (11)

- **Mesma nota que a fundamental**, porém **mais aguda** (uma **oitava acima**)



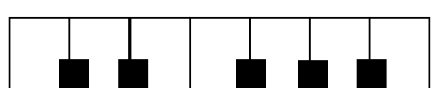
5ª e 4ª justas

- Mais duas relações interessantes

Fração do tamanho original	Nome
2/3	5ª Justa
3/4	4ª Justa

(12)

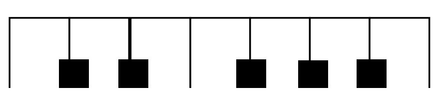
(13)



Relações de Consonância

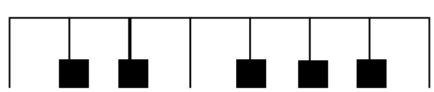
- **Razões entre números simples** (1 a 4)

- Números de 1 a 4 eram sagrados para os pitagóricos (1+2+3+4 = 10)



Relações de Consonância

Razão	Nome atual	Exemplo de Intervalo
1:1	Uníssono	Dó-Dó
1:2	Oitava justa	Dó grave – Dó Agudo
2:3	Quinta justa	Dó – Sol
3:4	Quarta justa	Dó – Fá

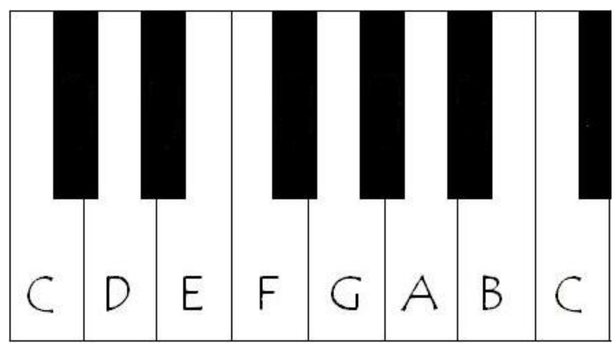


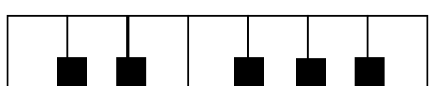
Escala Pitagórica

- Pitágoras contruiu então a própria escala: **Escala Pitagórica**

- **7 notas + 1 oitava**

- Similar ao piano





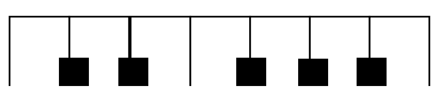
Escala Pitagórica

- Princípios da Escala Pitagórica:

- **Equivalência (oitava)**: a corda dividida ao meio produz a mesma nota uma oitava acima.

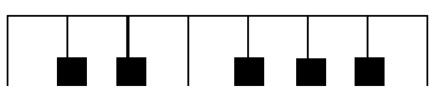
- **Unidade**: cada unidade de construção da escala é gerada a partir de uma divisão progressiva da escala na razão de 2/3 (ciclo de quintas).

- **Limites**: todas as notas de uma escala devem estar entre a fundamental e sua oitava.



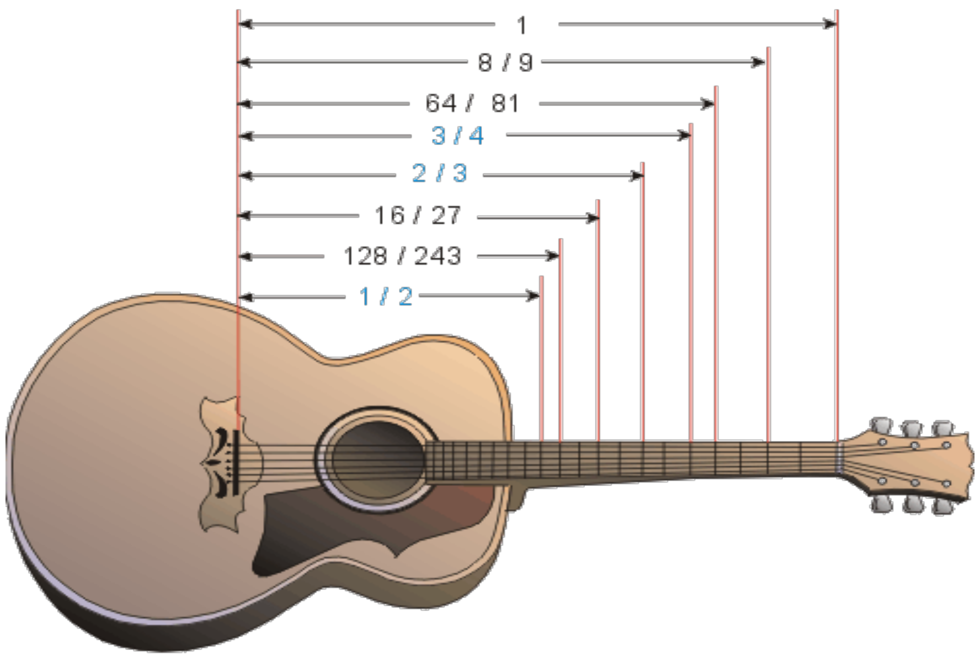
Escala Pitagórica

Largura da Corda (Li)	Ciclo de quintas (⅔ de Li)	Largura resultante (Lr)	Condição de existencia: ½ < Lr < 1	Nota equivalente (Oitava: 2x)
1	⅔ de 1	⅔ = 0,6666	sim	-
$\frac{2}{3}$	⅔ de ⅔	$\frac{4}{9}$ = 0,4444..	não	$\frac{8}{9}$ = 0,8888...
$\frac{8}{9}$	⅔ de $\frac{8}{9}$	$\frac{16}{27}$ = 0,52	sim	-
$\frac{16}{27}$	⅔ de $\frac{16}{27}$	$\frac{32}{81}$ = 0, 395	não	$\frac{64}{81}$ = 0,79
$\frac{64}{81}$	...	...	...	...



Escala Pitagórica

- Transpondo as relações da Escala Pitagórica para o violão:

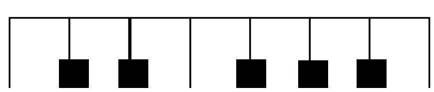


”Música é matemática e física, mas com cálculos diferentes das matérias tradicionais.” – Autor Desconhecido

A Matemática do Som

- Na Escala Pitagórica: **Som subordinado à matemática**

- Visão limitada em função da época
  - Não haviam instrumentos físicos que dessem sustentação a esta teoria.

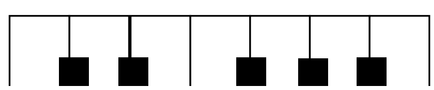


A Matemática do Som

- Revolução Científica *(Séc. XVI – Séc. XVIII)*: **Som como fenômeno acústico.**

Você já ouviu a expressão ”Onda Sonora”
ou sentiu a vibração causado por uma caixa de som?

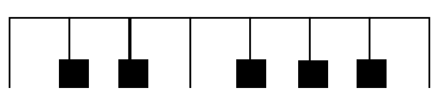
O que é o som?



O que é o som?

- De maneira simples, a física define o som como:

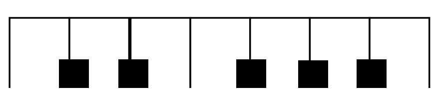
” O som é uma **vibração do ar** que se **propaga no formato de ondas** às quais **nosso ouvido é sensível**.”



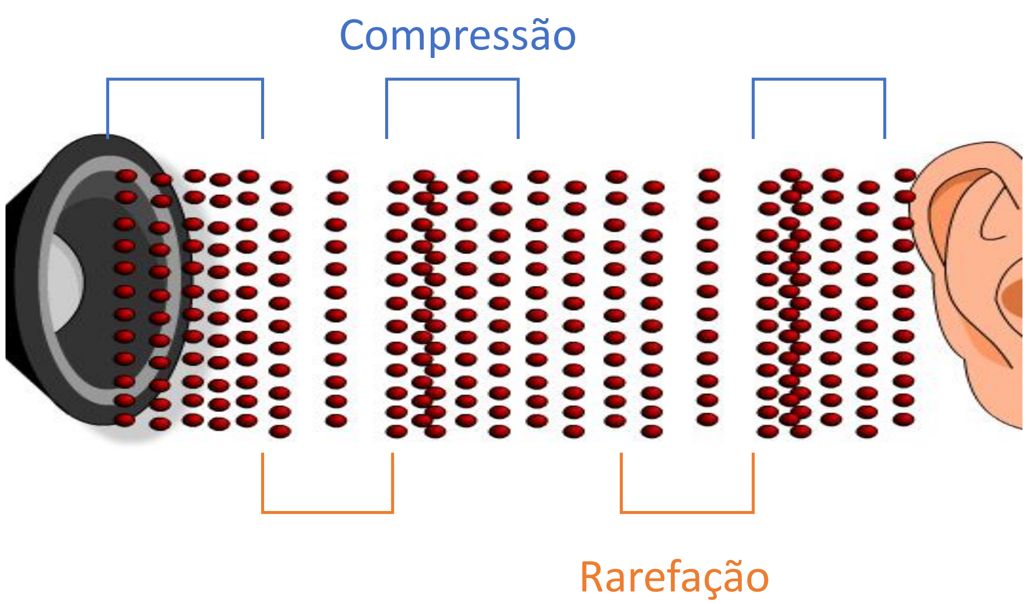
O que é o som?

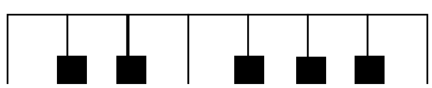
- Emissão da onda sonora provoca uma **vibração no ar** que **altera a configuração das suas moléculas** de ar.

- Ao alterar a configuração das moléculas de ar são criadas:
  - Zonas de compressão (moléculas de ar mais concentradas)
  - Zonas de rarefação (moléculas de ar mais esparsas)



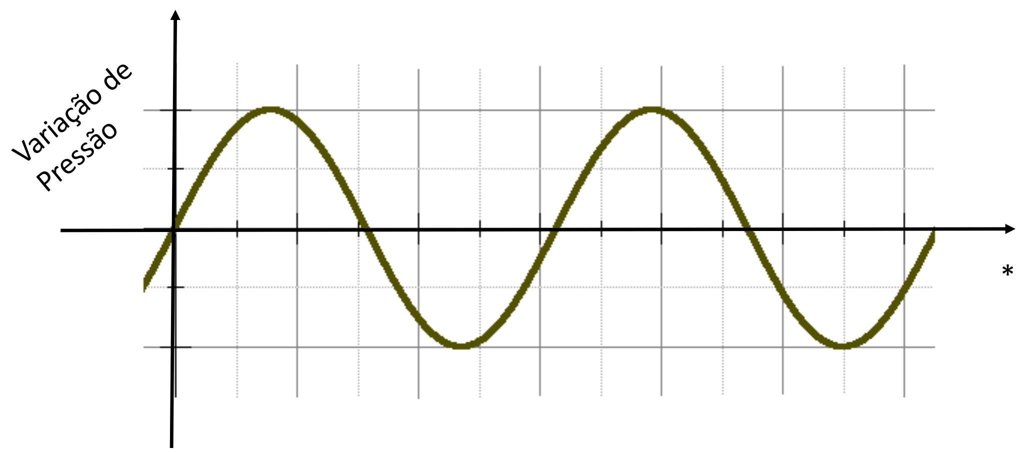
O que é o som?



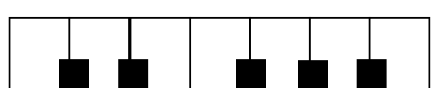


O que é o som?

- Onda sonora em gráfico:



** No eixo x podemos representar tempo, espaço ou outra característica que queremos analisar*



O que é o som?

- Características das ondas sonoras:
    - Pressão
    - Comprimento de cada zona
    - Velocidade

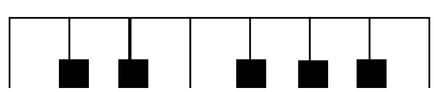
Diferentes ondas

↓

Percebidas de maneiras distintas

↓

Diferentes Sons



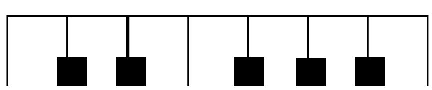
Frequências

- Existem dois tipos de som:

  - Sons ruídosos, ou ruídos: sons de regularidade indefinida (14) (15)
    - Ex.: explosão, chiado de tv, trovão, buzina, bateria, etc...

  - Sons regulares: sons de regularidade definida (16)
    - Ex.: notas musicais

- Na música: Instrumentos de percussão são ruídosos enquanto os demais, que possuem notas musicais bem definidas, são regulares.

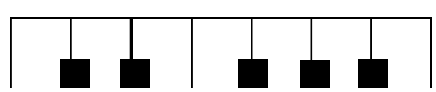


Frequências

- Um som regular pode ser caracterizado por sua **frequência.**

$$Frequência = \frac{Número\ de\ vibrações}{intervalo\ de\ tempo}$$

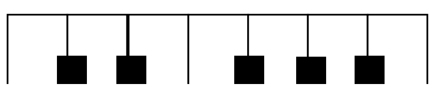
- Cada frequência é percebida como uma nota.



Frequências

- Ex.:

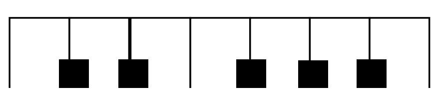
Nome da nota	Frequência	
Lá (diapasão, telefone)	440 Hz	(17)
Lá (Uma oitava abaixo)	220 Hz	(18)
Mi (Corda mais grossa do violão)	82,41 Hz	(19)
Si (2/3 da corda)	123,6 Hz (3/2 de 82,4 Hz)	(20)



Frequências

Nome da nota	Frequência
Corda lá do violão solta	440 Hz
Corda Lá do violão com metade do seu comprimento	880 Hz
Corda Lá do violão com 2/3 do comprimento (Quinta)	660 Hz

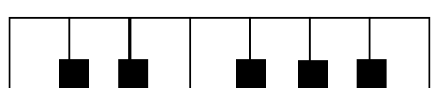
Qual a relação entre o comprimento da corda
e a frequência emitida por ela?



Frequências

- **Relação inversa** entre o **comprimento da corda e a frequência emitida**.

Quanto **maior o comprimento da corda**, **menor a frequência emitida**.
E quanto menor o comprimento, maior a frequência emitida.



Frequências

- Maior comprimento
- Menor frequência
- Som grave

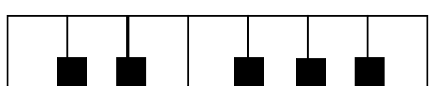
- Menor comprimento
- Maior frequência
- Som agudo

Revisitando a Escala Pitagórica

- Descrevendo a Escala Pitagórica com frequências:

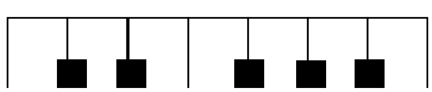
- $f_1 = 2\ f_0$ (***oitava***) Metade do comprimento → Dobro da frequência

- $f_1 = \frac{3}{2} f_0 = 1{,}5\ f_0$ (***quinta***) $\frac{2}{3}$ do comprimento → $\frac{3}{2}$ da frequência



Revisitando a Escala Pitagórica

Frequencia Original (f_i)	Ciclo de quintas ($\frac{3}{2}$ de f_i)	Próxima frequencia (f_r)	Condição de existencia: $f_0 < fr < 2\,f_0$	Nota equivalente (Oitava: $f_r \div 2$)
f_0	$\frac{3}{2}$ de f_0	$f_1 = \frac{3}{2} f_0$	sim	-
f_1	$\frac{3}{2}$ de f_1	$f_2 = \frac{3}{2} f_1 = \frac{9}{4} f_0$	não	$f_2 = \frac{9}{8}\, f_0$
f_2	$\frac{3}{2}$ de f_2	$f_3 = \frac{3}{2} f_2 = \frac{27}{16} f_0$	sim	-
f_3	$\frac{3}{2}$ de f_3	$f_4 = \frac{3}{2} f_3 = \frac{81}{32} f_0$	não	$f_3 = \frac{81}{64} f_0$



Problemas da Escala Pitagórica

- Problema 1: **Ciclo de Quintas não coincide com o Ciclo de Oitavas**

Ciclo de Quintas:

$f_1 = \frac{3}{2} f_0$

$f_2 = \frac{3}{2} f_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 f_0$

....

$f_m = \left(\frac{3}{2}\right)^m f_0$

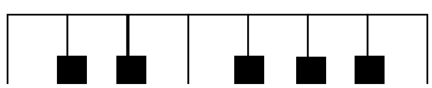
Ciclo de Oitavas:

$f_1 = 2f_0$

$f_2 = 2\, f_1 = 2^2 f_0$

....

$f_n = 2^n f_0$



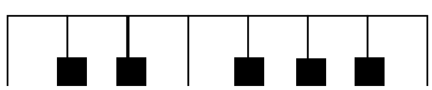
Problemas da Escala Pitagórica

- Problema 1: **Ciclo de Quintas não coincide com o Ciclo de Oitavas**

Ao se criar uma escala espera-se uma **nota de equivalência**.
Como saber se o Ciclo de Oitavas e de Quintas possuem nota equivalente?

Analogamente: Existem n e m, naturais e diferentes de 0, tais que:

$$\boxed{\left(\frac{3}{2}\right)^{m} = 2^{n}} \quad \text{ou} \quad \boxed{3^{m} = 2^{n+m}} \ ?$$



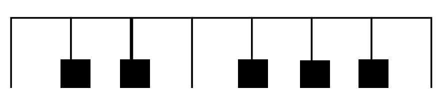
Problemas da Escala Pitagórica

- Problema 1: **Ciclo de Quintas não coincide com o Ciclo de Oitavas**

Não! $3^m \neq 2^n$ para quaisquer m e n naturais e diferentes de 0.

- Não existe nota de equivalência entre os ciclos.

- Testar a melhor aproximação!



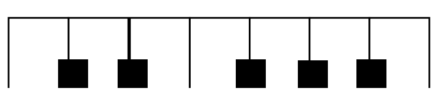
Problemas da Escala Pitagórica

- Problema 1: **Ciclo de Quintas não coincide com o Ciclo de Oitavas**

Melhor aproximação: **12 ciclos de quinta** e **7 de oitavas**.

$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = 129{,}746$ $\qquad\qquad$ $2^7 = 128$

- Diferença, mesmo pequena, causa desafinação, compromete composição, construção musical e transposição de um tom para outro.

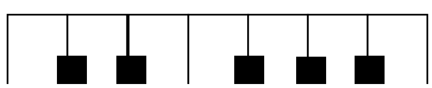


Problemas da Escala Pitagórica

- Problema 1: **Ciclo de Quintas não coincide com o Ciclo de Oitavas**

Razão: 12 ciclos de quinta/7 ciclos de oitavas: $\frac{129,746}{128} = 1,013$

- **Coma Pitagórico.**

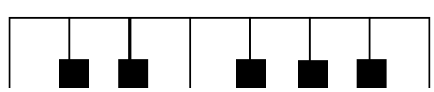


Problemas da Escala Pitagórica

- Problema 1: **Ciclo de Quintas não coincide com o Ciclo de Oitavas**

Definindo **Coma Pitagórico** de maneira mais simples:

É a **razão**, obtida na **melhor aproximação**, entre a **frequência da nota equivalente obtida após 12 ciclos de quinta** e a **frequência equivalente obtida após 7 ciclos de oitavas**.

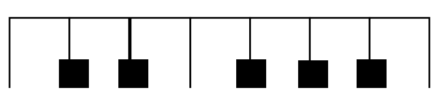


Efeitos do Coma Pitagórico

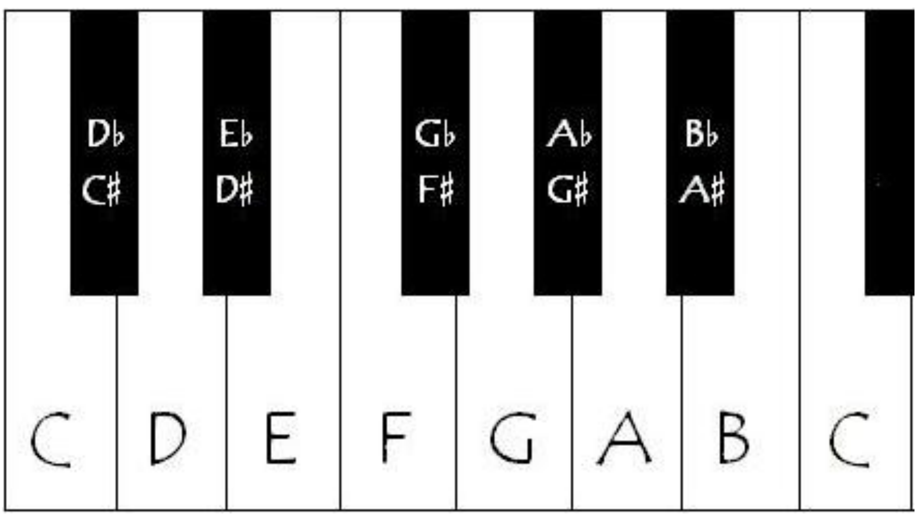
- Ampliação da Escala Musical:

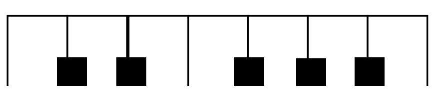
12 ciclos de quinta = 7 de oitavas → 12 notas dentro de uma oitava

Piano como conhecemos: **7 notas originais + 5 acidentes (teclas pretas)**



Efeitos do Coma Pitagórico





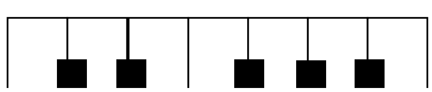
Efeitos do Coma Pitagórico

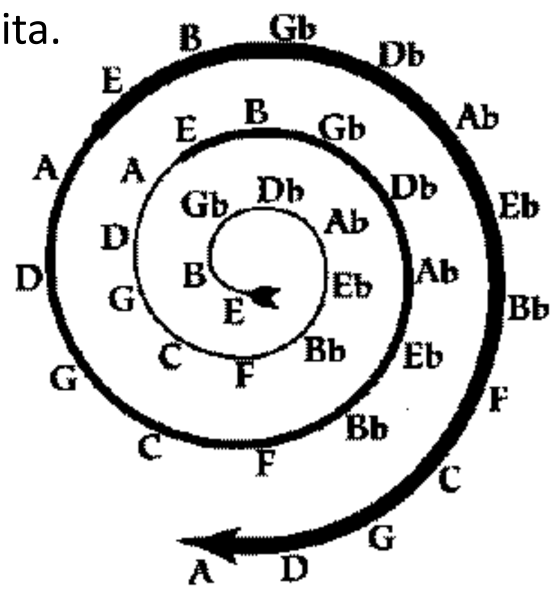
- Ciclo de Pitágoras (ou Ciclo de Quintas)

O Ciclo de Pitágoras nunca se torna uma escala perfeita.

Ex: Iniciando em E

E → B → Gb → Db → Ab → Eb → ….

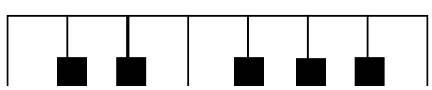




Efeitos do Coma Pitagórico

- Vamos ver na prática os efeitos do Coma Pitagórico!

- Vídeo



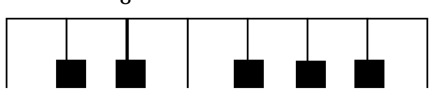
Problemas da Escala Pitagórica

- Problema 2: **Razão entre frequências sucesivas não é constante**

Nota	Dó	Ré	Mi	Fa	Sol	Lá	Si	Dó
Razão das Frequências em relação a Dó	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

Razão das Frequências entre as notas	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$
Distância entre as notas	1 Tom	1 Tom	$\frac{1}{2}$ Semitom	1 Tom	1 Tom	1 Tom	$\frac{1}{2}$ Semitom

Razão entre frequências com 1 tom de distância: $\frac{9}{8}$ = 1,125

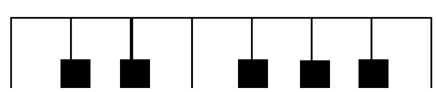


Problemas da Escala Pitagórica

- Problema 2: **Razão entre frequências sucesivas não é constante**

Razão entre frequências com 1 tom de distância: $\frac{9}{8} = 1{,}125$

Razão entre frequências com ½ tom de distância: $\frac{256}{243}$



Problemas da Escala Pitagórica

- Problema 2: **Razão entre frequências sucesivas não é constante**

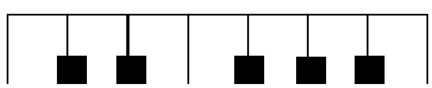
Hipótese: **dois ½ tom devem ser iguais a 1 tom**

Dois ½ tom: $f_2 = \frac{256}{243} * f_1 = \frac{256}{243} * \frac{256}{243} * f_0 = 1{,}1098\ f_0$

1 tom: $f_1 = 1{,}125 * f_0$

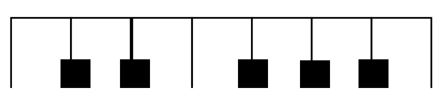
Razão não é constante!

- Para transpor uma música era necessário reafinar o instrumento!



Temperamento

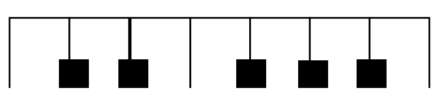
- Solução: Temperamento!
- Temperamento: **Divisão da oitava em 12 intervalos iguais.**
- Eliminar o Coma Pitagórico



Temperamento

- **J. S. Bach** (1685-1750)
- Obra: **O Cravo Bem Temperado** (1722)
- Explorou todas as tonalidades através do temperamento do Ciclo de Oitavas.
- **Nova Escala**: Ciclo de Quintas temperado

Para isto foi necessário um fundamento matemático!

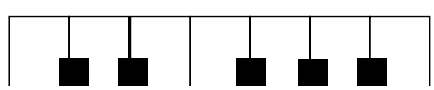


Temperamento

- **Simon Stevin** (1548-1620)

- Físico, matemático e engenheiro belga.

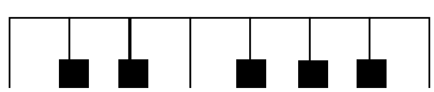
- Tentou resolver o problema com números Irracionais



Divisão da 8ª em 12 intervalos iguais

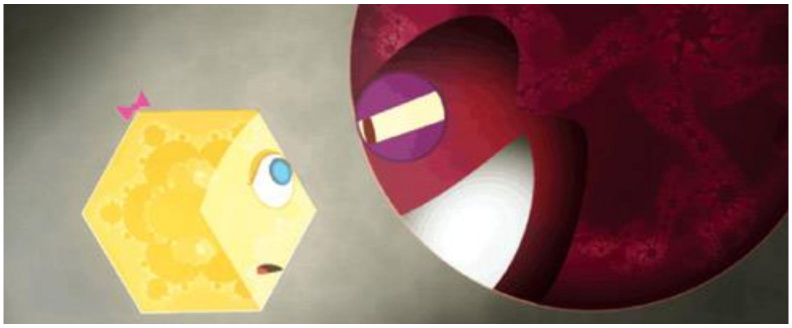
- **½ Temperado:** $f_1 = \sqrt[12]{2}\, f_0 = 1{,}059463\, f_0$
- **½ Pitagórico:** $f_1 = \frac{256}{243}\, f_0 = 1{,}05349794\, f_0$

- **Quinta justa Temperado:** $f_1 = \sqrt[12]{2^7}\, f_0 = 1{,}059463\, f_0$
- **Quinta justa Pitagórica:** $f_1 = \frac{3}{2}\, f_0 = 1{,}5\, f_0$



E Aula interdisciplinar: Flatland

E.1 Orientações



Flatland: The Movie – Roteiro e Orientações

Parte	Duração	Atividade
1	35min	Exibição do filme
2	1h15min	Discussão sociológica - questões de 1 a 4
3	1h	Discussão matemática - questões de 5 a 9

Objetiva-se que esta aula seja ministrada por dois professores em conjunto: um professor da Sociologia e um professor da Matemática. O primeiro conduzirá a discussão sociológica e o segundo, a matemática. É importante para a ideia de interdisciplinaridade que ambos os professores participem ativamente de ambas as discussões.

A elaboração desta aula contou com a colaboração do Prof. Sávio Cavalcante, docente do IFCH-Unicamp, que tem interesse em ministrá-la. Recomendamos que a sua disponibilidade seja consultada. Caso ele não possua disponibilidade, ele irá indicar uma outra pessoa da área para conduzir a discussão.

A primeira parte da aula envolve a exibição do filme. A seguir apresentamos uma análise, breve e superficial, de alguns temas levantados pelo filme.

> O filme é uma crítica feroz à sociedade. Se contextualizada na época em que o livro foi escrito, a história se torna ainda mais revolucionária. A explicação de Arthur para a divisão de trabalho existente em *Flatland* é consequência do anúncio do "axioma do dia", propaganda ideológica diária. O "axioma do dia", que afirma que "a configuração faz o homem" e que fundamenta a explicação de Arthur para Hex, pode ser comparado a um dogma religioso. *Axioma*, na Matemática, é uma noção comum ou afirmação geral aceita sem discussão, por se tratar de um consenso inicial necessário para a construção de uma teoria; *dogma*, por sua vez, é um ponto fundamental de uma doutrina religiosa que se apresenta como algo indiscutível ou inquestionável. O "axioma do dia" era uma verdade tida como evidente, que os habitantes de *Flatland* repetiam antes de sair de casa, como um versículo da Bíblia.
>
> Quando Artur questiona Hex acerca do "axioma do dia", ela fornece como resposta uma explicação empírica, baseada na sua observação da realidade: os triângulos são os operários, enquanto os quadrados são um tipo de classe média (trabalham em escritórios) e os círculos constituem o Estado, assumindo o papel de classe dominante. Hex demonstra um raciocínio independente, ainda não moldado pela propaganda ideológica. Arthur, então, intervém e fornece a explicação dogmática, reproduzindo a ideologia dominante em *Flatland*. Os círculos, nesse modelo, cumprem o papel da figura geométrica perfeita, com número de lados infinito; os mais sábios.
>
> Essa ideologia, criada pelos círculos como forma de dar um sentido à divisão do trabalho, é questionada por Hex: por que alguns fazem e outros comandam? Estaria na natureza das coisas e definido desde que nascemos? Ora, o que ela percebe é que não há resposta objetiva natural para esse fato social. Ela diz não se sentir mais inteligente que o avô. No filme, este dogma é posto à

> prova quando Hex e Arthur, polígonos com poucos lados, se apropriam do avançado conceito da terceira dimensão, mostrando que a inteligência/sabedoria não está relacionada ao número de lados do polígono e derrubando os dogmas que sustentam a estratificação da sociedade de *Flatland*.

As discussões serão guiadas por um questionário, disponível no Apêndice E. Convidamos o leitor a fazer uma leitura destas questões antes de dar seguimento à leitura deste roteiro.

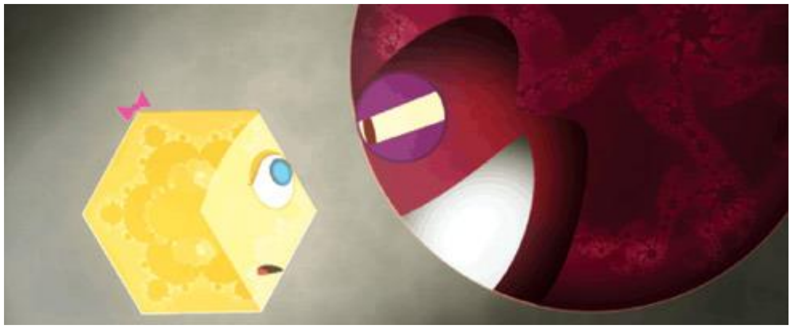
A segunda parte da aula é dedicada a uma discussão sociológica do filme, cujo tema está delineado nas quatro primeiras questões do questionário. Neste cenário, o professor atuará como um mediador, estimulando e ajudando a aprofundar a análise dos alunos.

Considerando que o professor será da área de Sociologia, ele terá os meios para intervir adequadamente na discussão, introduzindo aspectos teóricos interessantes quando estes se fizerem necessários. As questões servem como um guia, estendendo o assunto e fornecendo mais tópicos para a discussão. Além disso, elas são abertas, de modo a estimular a reflexão sem limitar o escopo do debate.

Para a primeira questão, os alunos devem perceber que a sociedade de Flatland é estratificada. Nela, o papel social de cada indivíduo é determinado desde o seu nascimento. O foco da questão é a divisão do trabalho e como ele é justificado na sociedade. Já a segunda pergunta foca nas formas de governos e nos aparelhos de dominação. Os itens da questão abordam mecanismos de repressão e estimulam uma análise comparativa com as sociedades reais. A terceira questão tem como foco o conceito de “verdade” e como “verdades” são construídas socialmente. Por último, a quarta questão traz à tona temas como eugenia, racismo e a dificuldade em conviver com a diversidade e a diferença.

As quatro últimas questões são dedicadas a discussões matemáticas. A quinta questão visa a uma reflexão sobre a noção de dimensão, enquanto as três últimas pretendem guiar o aluno à descoberta de que o menor número de triângulos t em que um polígono de n lados pode ser dividido é $n-2$.

E.2 Questionário



Flatland

Como a forma afeta seu lugar na sociedade?
Quanto mais lados você possui, maiores os seus ângulos. Então, mais sábio você é.

Aula elaborada em conjunto com o Prof. Dr. Sávio Cavalcante, IFCH, Unicamp.

Questões e reflexões sobre *Flatland*

1. Um ***axioma*** é uma afirmação, considerada evidente e admitida como verdade universal, sem exigência de uma demonstração. No início do filme, é exposta a rotina de uma família de habitantes de *Flatland*. Esta rotina inclui ouvir o rádio, que anuncia o axioma do dia: "a forma/configuração faz o homem". Segue-se a esta cena um diálogo entre o quadrado Arthur e sua neta hexágono Hex, em que este axioma volta à tona em uma pergunta que Arthur faz a Hex: "Como a sua forma afeta a sua posição na sociedade?". A resposta de Hex é baseada em sua observação empírica: "triângulos fazem o trabalho pesado, quadrados trabalham em escritórios e círculos fazem as regras que todos os outros devem obedecer". Neste ponto, Artur intervém dizendo que a resposta correta é outra: "quanto mais lados você tiver, maiores os seus ângulos e, portanto, mais sábio você é".

   a) A resposta de Arthur é composta de duas afirmações:
   (i) "Quanto mais lados você tiver, maiores os seus ângulos";
   (ii) "mais sábio você é".
   Ele as conecta logicamente, dizendo que a segunda é consequência da primeira. Em quê ele baseia o seu argumento e por que ele é importante nesta sociedade?

   b) Enquanto a resposta de Arthur procura dar um sentido à divisão do trabalho de Flatland, para Hex não há resposta objetiva, natural, para esta divisão de trabalho. Analise o papel dos triângulos, quadrados e círculos na sociedade de Flatland. É possível associar essas diferenças com a divisão do trabalho em nossa sociedade?.

   c) K. Marx e F. Engels, dois pensadores alemães do século XIX, afirmam que "os indivíduos que compõem a classe dominante possuem, entre outras coisas, também a consciência e, por isso [...] eles dominam também como pensadores, como produtores de ideias que regulam a produção e a distribuição de ideias de seu tempo; e, por conseguinte, suas ideias são as ideias dominantes da época".

   Como os dizeres acima se refletem em Flatland? E na nossa sociedade?

2. No filme, os círculos anunciam um axioma que torna ilegal qualquer conversa sobre uma terceira dimensão e sobre a área 33H. Qualquer habitante que mencione os assuntos proibidos deve ser considerado delirante e perigoso e deve ser reportado imediatamente para um círculo superior.
   a) Qual é a forma de governo que usa este tipo de mecanismo? A sociedade de *Flatland* lembra alguma outra que você já estudou nas aulas de História?
   b) Nos casos semelhantes que você conhece, o que você acha que motiva os governantes?
   c) Estas proibições são sempre explícitas? Se não, dê exemplos de casos em que não são.
   d) Por que você acha que os círculos não querem que os outros polígonos conversem sobre a área 33H?
   e) Em *Flatland*, o que você acha que acontece com quem quebra as regras? E na vida real? Pode exemplificar situações em ocorrem e/ou ocorreram situações assim e quais foram os desdobramentos?
   f) Axioma dos círculos: Uma língua quieta _________ _________ _________ _________.

3. Ao longo do filme, são usadas diversas expressões de cunho religioso, como “heresia”, “demônios”, “profetas”, entre outros. F. Nieztsche, filósofo alemão do século XIX, diz:

   “O que é, pois, a verdade? Um exército móvel de metáforas [...] que, após uma longa utilização, parecem a um povo consolidadas, canônicas e obrigatórias: as verdades são ilusões das quais se esquece que elas assim o são [...]”.

   a) Quais verdades são construídas em Flatland?
   b) De que forma estes conceitos são usados para evitar um questionamento a respeito da sociedade?
   c) Discuta o breve diálogo entre Arthur e seu amigo, no escritório, a respeito dos sonhos que tinham quando eram mais novos. Contraste a resignação deles com a postura de Hex, quando ela questiona o axioma da sabedoria no início do filme, conversando com o avô. Termine esta discussão analisando a evolução do pensamento de Arthur a respeito da sociedade, e de si mesmo, ao longo do filme.

4. Em certo momento do filme, aparece um bebê com formatos irregulares, que é levado para inspeção. Essa situação, em que um indivíduo é marginalizado ou excluído da sociedade, muitas vezes de forma brutal, tem paralelos com a realidade? Se sim, dê exemplos.

5. Quando Arthur e Hex conversam sobre pontos, eles dizem que pontos possuem zero dimensões. Mais tarde, em um sonho, Arthur se encontra com um ponto. O ponto fica cantando “eu, eu, eu, eu, eu”. Quando Arthur fala com o ponto e diz que há outro alguém ali, o ponto responde: “criatura tola, não há dois de mim”.

   a) Por que você acha que o ponto canta “eu, eu, eu, eu, eu”?
   b) O que é uma “dimensão”?
   c) Quais são as duas primeiras regiões que o quadrado Arthur visita na sua jornada pelo espaço?
   d) Qual artefato da terceira dimensão foi entregue de presente aos residentes de *Flatland* há muito tempo e agora reside na área 33H?

e) Por que você acha que eles mantinham este artefato escondido?

6. Desenhe polígonos com diversos números de lados. Para cada polígono, desenhe diagonais até que este polígono esteja dividido (apenas) em triângulos. Faça várias desenhos e divisões diferentes e analise o número de triângulos formados e sua relação com o número de lados do polígono original.

7. A partir da análise feita na questão anterior, preencha a tabela abaixo.

Número de lados (n)	**Número de triângulos (t)**
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

8. Analisando a tabela anterior, escreva uma expressão que descreva a relação entre o número de lados de um polígono e o número de triângulos desenhados.