INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Resultados teóricos para leilões de um único item

Iago A. Neves *Rafael C. S. Schouery*

Relatório Técnico - IC-PFG-16-07 - Projeto Final de Graduação

December - 2016 - Dezembro

Resultados teóricos para leilões de um único item

Iago A. Neves*   Rafael C. S. Schouery*

Resumo

A Teoria dos Leilões é uma área da Teoria de Jogos que estuda as propriedades de leilões e as ações dos seus participantes. Este trabalho aborda os principais conceitos da Teoria dos Leilões para a venda de um único item e os discute para os principais tipos de leilão. Analisamos as estratégias possíveis e ótimas para participantes de leilões de carta fechada de primeiro preço e de segundo preço e apresentamos a receita esperada para o organizador em cada tipo de leilão. Estudamos ainda o leilão de Myerson como alternativa para maximizar a receita do leiloeiro e sua viabilidade perante os demais tipos de leilão.

1 Introdução à Teoria dos Jogos

Diversas vezes nos encontramos em situações em que é de nosso interesse que um grupo de pessoas aja de certa forma, mas as pessoas, pensando em seus próprios interesses, optam por favorecer a si mesmas, prejudicando as demais pessoas no processo. Buscamos aqui entender como funcionam essas dinâmicas, dos pontos de vista dos participantes e dos organizadores dessas situações, e como podemos utilizar esses conhecimentos para desenvolvermos os melhores planos de ação.

Vamos considerar a seguinte situação: temos um rei que é o governante de uma próspera vila, e ele tem como objetivo coletar o máximo possível de impostos dos habitantes de sua vila. Os conselheiros do rei (que podemos assumir que nunca erram) o informaram que taxar mais do que metade da renda de cada habitante prejudicaria a prosperidade econômica da vila, o que a longo prazo seria ruim para o rei e para os habitantes. Este governante impõe então que 50% da renda de cada habitante deve ser dada a ele como imposto. Podemos supor que o imposto será utilizado para tornar a vida do rei mais luxuosa, e não será usado direta nem indiretamente para melhorar a vida dos contribuintes.

Se o governante apenas perguntar aos habitantes qual a sua renda, e se supusermos ainda que o rei não consegue verificar a veracidade das informações fornecidas pelos habitantes (i.e. não há punição para a mentira), então, naturalmente, é de se esperar que os habitantes não sejam totalmente honestos sobre sua renda.

Eis que temos um conflito de interesses: do ponto de vista do governante, o ideal é que os habitantes informem suas verdadeiras rendas; ao passo que do ponto de vista dos habitantes, o ideal é informar renda igual a zero. O que o rei considera como teimosia e insolência, na verdade nada mais é do que um comportamento perfeitamente *racional* por parte dos habitantes.

*Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas

Nessa situação fictícia, parece óbvio que não devemos culpar as pessoas por apresentarem comportamento racional, pois estão simplesmente fazendo o que é melhor para si mesmas. Em Teoria dos Jogos, é comum considerarmos que os participantes agem de forma perfeitamente racional, ou seja, buscam sempre maximizar seu próprios ganhos e, com as informações que possuem, sempre tomam as melhores decisões no âmbito do benefício próprio.

Para entendermos esse desalinhamento de interesses entre o rei e os habitantes, vamos considerar que os habitantes são jogadores de um *jogo* criado pelo rei. Definimos como jogo um conjunto de três fatores: i) os jogadores, ii) as estratégias que podem ser escolhidas pelos jogadores, e iii) os ganhos obtidos pelos jogadores como função das estratégias escolhidas.

Definimos também que, dado as regras do jogo, e de acordo com as estratégias escolhidas pelos demais jogadores, uma *resposta ótima* de um jogador será escolher, do conjunto de estratégias possíveis, uma estratégia que maximizará seu ganho. Podemos perceber que, no jogo proposto pelo rei, a resposta ótima dos jogadores é sempre declarar renda igual a zero. Se uma estratégia de um jogador é sempre uma resposta ótima, independentemente das estratégias escolhidas pelos demais jogadores, então damos a isso o nome de *estratégia dominante*.

Agora que entendemos que, no jogo proposto pelo rei, os jogadores possuem uma estratégia dominante que é de sempre mentir e declarar renda igual a zero, percebemos que o objetivo do rei não está alinhado com os objetivos dos jogadores. O jogo criado pelo rei não é *compatível com o incentivo*, ou seja, as respostas ótimas dos jogadores não levam ao objetivo desejado pelo criador do jogo. Dizemos que um jogo é à *prova de estratégia* se os jogadores devem falar a verdade para obter o máximo de ganho para si próprios.

O estudo da Teoria do Jogos nos permite desenvolver jogos cada vez mais adequados para os nossos objetivos. Na vida real, frequentemente precisamos criar sistemas em que outras pessoas terão que participar e tomar decisões, e estas decisões terão impacto para elas próprias, para os outros participantes, e para o criador do sistema.

Uma companhia que implementa um sistema de metas para os funcionários está tentando incentivar os funcionários a se comportarem de maneira que favoreça a companhia. Ao associar a meta do funcionário a um bônus no final de ano, por exemplo, a companhia está alinhando o benefício individual do funcionário com o que é melhor para a companhia, pois os funcionários, buscando beneficiar a si próprios ao ganhar o bônus, tentarão atingir a meta, assim agindo de forma benéfica para a companhia.

Pais que prometem castigos aos filhos que não se comportarem de forma adequada estão implementando sistemas que alinham os incentivos dos filhos com os objetivos dos pais. Se os filhos não querem receber o castigo, então evitar o mau comportamento, que é o objetivo dos pais, passa a ser também a decisão que mais beneficiará os filhos.

Os leilões são exemplos de jogos em que os participantes devem escolher suas estratégias de acordo com as regras do jogo, as características do próprio jogador, e a percepção do jogador sobre as características dos demais jogadores. Os leilões, portanto, nos dão a oportunidade de estudar a fundo a aplicação da Teoria dos Jogos em situações reais e relevantes.

Neste trabalho, estudamos os leilões de um único item, especialmente os Leilões de Primeiro Preço, de Segundo Preço e o Leilão de Myerson. Analisamos as estratégias ótimas do ponto de vista dos jogadores e calculamos a receita esperada para os diferentes tipos de leilão do ponto de vista do leiloeiro. Para isso, utilizamos os trabalhos de Vickrey [6], Shoham [5], Nisan [3], Bergstrom [1], Schouery [4] e Myerson [2].

2 Definições

Para que possamos discutir a Teoria dos Jogos de forma clara e exata, devemos utilizar notações que facilitem o entendimento e atribuam significados precisos a expressões comumente usadas. Nesta seção, trazemos a definição de jogo [4] e de outros conceitos-chave que serão utilizados nas próximas seções.

Definição 2.1. Definimos como *jogo* a família de três conjuntos: um conjunto de n *jogadores* $P = \{1, 2, ..., n\}$; uma família de n conjuntos de *estratégias* possíveis $\mathbb{S} = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$, onde S_i é o conjunto de estratégias possíveis do jogador i, para todo $i \in P$; e um conjunto de funções $U = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, onde u_i é uma função $S \to \mathbb{R}$ que define a *utilidade* do jogador i de acordo com todas as estratégias escolhidas, em que $S = S_1 \times S_2 ... \times S_n$.

Dessa forma, podemos considerar que as regras de um jogo definem quais as estratégias possíveis dos jogadores (o conjunto $\mathbb{S}$), e também definem como as estratégias escolhidas, por meio do conjunto U, levam aos resultados dos jogadores. Nesse sentido, dadas as regras do jogo, as estratégias escolhidas são suficientes para definir o resultado do jogo.

Definição 2.2. Chamamos de *resultado do jogo* $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ o vetor das estratégias escolhidas pelos jogadores, em que $s \in \mathbb{S}$.

Muitas vezes analisamos qual a melhor estratégia a ser escolhida por um jogador considerando que todos os demais jogadores já escolheram suas respectivas estratégias. Para isso, utilizamos a notação *situação do jogador* para definir as estratégias escolhidas por todos os demais jogadores.

Definição 2.3. Para cada jogador i, chamamos de *situação do jogador* o conjunto s_{-i} das estratégias escolhidas por todos os jogadores exceto o jogador i, em que $s_{-i} \in S_{-i}$, e $S_{-i} = S_1 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n$.

Como notação auxiliar, definimos o resultado do jogo $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ em termos da situação do jogador s_{-i} denotando s por (s_{-i}, s_i). Ou seja, o resultado do jogo é a estratégia s_i escolhida por i juntamente com o vetor s_{-i} das estrátegias escolhidas pelos demais jogadores.

Definição 2.4. Para o jogador i, uma *resposta ótima* para a situação do jogador s_{-i} é uma estratégia $s_i \in S_i$ tal que $\forall s'_i \in S_i$, $\nexists u_i(s'_i, s) > u_i(s_i, s_{-i})$, ou seja, de todas as estratégias possíveis para o jogador i, nenhuma estratégia s'_i fará i ter uma utilidade maior do que s_i.

Temos, portanto, que uma resposta ótima é uma estratégia que maximiza a utilidade u_i de um jogador i dado a sua situação do jogador s_{-i}. Um jogador que, baseado nas informações que possui, escolhe sempre uma resposta ótima é dito um jogador *racional*.

Definição 2.5. Um jogador i possui uma *estratégia dominante* s_i se, para qualquer situação do jogador, s_i é uma resposta ótima para s_i.

Uma situação particular ocorre se, para um resultado do jogo, todos os jogadores escolherem como estratégias individuais respostas ótimas, e damos a isso o nome de *equilíbrio de Nash*.

Definição 2.6. Um vetor de estratégias $s \in S$ é um *equilíbrio de Nash* se, para cada jogador $i \in P$, s_i é uma *resposta ótima* para s_{-i}.

O equilíbrio de Nash foi proposto por John Nash, vencedor do prêmio Nobel em Ciências Econômicas de 1994. Devemos ressaltar que nem todos os jogos possuem um equilíbrio de Nash, e alguns jogos possuem mais de um equilíbrio de Nash.

Nos jogos em que há um equilíbrio de Nash, utilizamos a expressão *estratégia de equilíbrio* para denotar uma estratégia que compõe algum equilíbrio de Nash. Caso todos os jogadores utilizem a mesma estratégia de equilíbrio, será gerado um equilíbrio de Nash. Se, no entanto, os jogadores utilizarem estratégias de equilíbrio diferentes (i.e. estratégias de equilíbrio para diferentes equilíbrios de Nash), então não necessariamente será gerado um equilíbrio de Nash.

3 Introdução à Teoria dos Leilões

Nesta seção, definimos o que é um leilão no âmbito da Teoria dos Jogos e em seguida introduzimos os tipos mais comuns de leilão. Consideramos apenas leilões de item único, ou seja, leilões em que temos um único item sendo leiloado, um único leiloeiro, e vários compradores. O item deve ser indivisível e apenas um jogador pode receber o item. Por simplicidade, consideramos apenas leilões de venda (também chamados de leilões avançados), mas todos os conceitos discutidos aqui podem ser aplicados, de forma análoga, a leilões de compra (também conhecidos como leilões reversos).

Leilões são um tipo de jogo em que buscamos determinar duas questões: i) como será feita a alocação do item aos jogadores e ii) qual será o preço a ser pago por esse item. A fim de conseguirmos extrair informações úteis que nos permita analisar os leilões estrategicamente, devemos modelá-los matematicamente.

Consideramos que, para os tipos de leilões que estudaremos, temos um conjunto de n jogadores. Cada jogador i possui um *valor real* v_i que atribui ao item, e esse valor real representa quanto o item vale para o jogador. No caso de um leilão de obras de arte, por exemplo, podemos entender v_i como o valor que o jogador i acredita que a obra de arte possui, e ele estaria disposto a pagar qualquer preço menor que v_i pelo item, pois dessa forma ele teria um ganho. Vale ressaltar que nem todos os leilões alocam necessariamente o item ao jogador que apresenta o maior valor real. A esses leilões damos o nome de leilões *eficientes*.

Definição 3.1. Um leilão é dito *eficiente* se, no caso em que todos os jogadores são racionais, o vencedor é o jogador com o maior valor real v_i. Isto é, o vencedor é o jogador i tal que $v_i = max\{v_j : j \in P\}$.

Num leilão, cada jogador submete um lance l_i, que representa quanto, no máximo, ele estaria disposto a pagar pelo item. O lance é portanto uma informação pública ao leiloeiro, e possivelmente pública também para os outros jogadores, dependendo do tipo de leilão. Já o valor real v_i representa o quanto o item sendo leiloado realmente vale para o jogador i, e é portanto uma informação privada que apenas o jogador i conhece.

Caso tenhamos um jogo em que a estratégia dominante para todos os jogadores consiste em informar dados verdadeiros (i.e. falar a verdade), então o jogo é dito *à prova de estratégia* ou *compatível com o incentivo*. Isso é equivalente a dizer que, se um jogador racional possui como estratégia dominante falar a verdade, então o jogo é à prova de estratégia. Um leilão é considerado à prova de estratégia se, para todos os jogadores i, a estratégia dominante é informar $l_i = v_i$.

Conforme nossa definição de jogo, o lance l_i é a estratégia escolhida pelo jogador i. Caso ele seja o vencedor, sua utilidade é dada por $u_i(l_1, l_2, ..., l_n)$, visto que ele poderá vencer ou não o leilão, dependendo das regras do leilão, do seu lance e dos lances dos demais jogadores. Caso ele vença, ele deverá pagar um preço p_i que dependerá do tipo de leilão, e sua utilidade será $u_i = v_i - p_i$. No entanto, caso o jogador não vença, ele não realizará pagamentos e sua utilidade será igual a zero. Dizemos que um leilão é *individualmente racional* se a utilidade dos jogadores é não-negativa.

Os jogadores que, além de racionais, são *neutros em relação ao risco* são aqueles que, dentre suas opções, escolherão aquela que apresentar maior utilidade esperada, sem apresentar preferência por opções com utilidades esperadas equivalentes. Por exemplo, caso tenha a opção de escolher entre receber 100$ com probabilidade 1 e ter probabilidade $\frac{1}{2}$ de receber 200$ e $\frac{1}{2}$ de receber zero, um jogador neutro em relação ao risco não terá preferência, pois a esperança de ambas as alternativas é a mesma. Um jogador *favorável ao risco* irá optar por receber 200$ com probabilidade $\frac{1}{2}$, e um jogador *avesso ao risco* irá preferir ter a certeza de receber 100$.

Ainda, um jogador avesso ou favorável ao risco pode estar disposto a sacrificar sua utilidade esperada. Um jogador avesso ao risco poderá, por exemplo, preferir a certeza de receber 70$ a ter probabilidade $\frac{1}{2}$ de receber 200$, mesmo que sua dessa forma sua utilidade esperada seja mais baixa.

Consideramos também que, para cada jogador i, o seu valor real v_i é uma variável aleatória advinda de uma distribuição de probabilidade D_i independente da distribuição de probabilidade D_{-i} dos demais jogadores. Assumimos também que, embora os jogadores não saibam o valor real dos demais jogadores, eles conhecem suas distribuições de probabilidade. Os jogos em que os jogadores possuem informações privadas e independentes, mas as distribuições de probabilidade dessas informações são públicas são chamados de *jogos Bayesianos*.

Um *equilíbrio de Bayes-Nash* é um equilíbrio de Nash num jogo Bayesiano. Sabemos que a utilidade $u_i(v_i, l_i(v_i), l_{-i}(v_{-i}))$ de um jogador i é uma função do seu valor real v_i, do seu lance $l_i(v_i)$ (pois seu lance será uma função do seu valor real), e dos lances $l_{-i}(v_{-i})$ dos demais jogadores. Temos então que a utilidade esperada $E_{D_{-i}}(u_i(v_i, l_i(v_i), l_{-i}(v_{-i})))$ do jogador i é a esperança da utilidade $u_i(v_i, l_i(v_i), l_{-i}(v_{-i}))$ sobre a distribuição de probabilidade D_{-i} dos demais jogadores. Portanto, num equilíbrio de Bayes-Nash nenhum jogador poderá aumentar sua utilidade esperada ao trocar seu lance $l_i(v_i)$ por um outro lance $l'_i(v_i)$.

Definição 3.2. Um vetor de estratégias $l \in S$ é um *equilíbrio de Bayes-Nash* se, num jogo Bayesiano, para cada jogador $i \in P$, l_i é uma *resposta ótima* para $l_{-i}(v_{-i})$, ou seja, $E_{D_{-i}}(u_i(v_i, l_i(v_i), l_{-i}(v_{-i})) \geq E_{D_{-i}}(u_i(v_i, l'_i(v_i), l_{-i}(v_{-i}))$.

Temos duas classes típicas de leilão: os leilões de carta fechada (e.g. Leilões de Primeiro Preço e de Segundo Preço) e os leilões dinâmicos (e.g. Leilões Ingleses, Holandeses e Japoneses). Os leilões de carta fechada são aqueles em que os lances são dados simultaneamente, ou seja, os jogadores não possuem informações sobre os lances dos demais jogadores ao darem seus próprios lances. Já os leilões dinâmicos são aqueles em que os lances são dados de forma sequencial. Exploramos primeiramente o Leilão de Primeiro Preço.

3.1 Leilão de Primeiro Preço

No *Leilão de Primeiro Preço*, temos um organizador do leilão que deseja vender um item para um grupo de compradores. As regras para os participantes são que cada comprador deve informar seu próprio lance apenas uma vez. O jogador que informar o maior lance vence o leilão, e deve pagar o valor do seu próprio lance. Isso significa que o preço a ser pago pelo item é o preço dado pelo maior lance, de onde vem o nome Leilão de Primeiro Preço.

Modelamos então o Leilão de Primeiro Preço da seguinte forma. Temos n jogadores, cada um possui um valor real v_i e informa um lance l_i. Caso i seja o vencedor, sua utilidade é $u_i(l_1, l_2, ..., l_n) = v_i - l_i$ e, caso não vença, sua utilidade é zero. Dessa forma, a utilidade para o jogador é *quasi-linear*, pois é linear em l_i para v_i constante.

Dessa forma, l_i é o lance divulgado ao leiloeiro, e do ponto de vista do jogador i, é o menor valor que ele acredita ser necessário para vencer o leilão, levando em conta o fato de o jogador i não possuir conhecimento dos lances dos demais jogadores.

Definição 3.3. No *Leilão de Primeiro Preço*, o vencedor é o jogador $i \in P$ tal que $l_i = max\{l_j : j \in P\}$, e o valor a ser pago por i é $p_i = l_i$.

Analisando esse tipo de leilão e as estratégias possíveis dos jogadores, podemos notar que os jogadores não são encorajados a darem como lances os valores que eles realmente atribuem ao item. Se $l_i = v_i$, então mesmo que o jogador i vença o leilão, sua utilidade será igual a zero. Isso significa que os jogadores são incentivados a dar um lance $l_i = v_i - \epsilon_i$, em que $\epsilon_i > 0$ representa o lucro que o jogador i terá se ganhar o leilão.

Como o Leilão de Primeiro Preço não apresenta uma estratégia dominante, utilizamos o conceito de estratégia de equilíbrio para definir o comportamento mais adequado [1] por parte dos jogadores para maximizarem suas utilidades esperadas.

Lema 1. *No Leilão de Primeiro Preço com dois jogadores neutros em relação ao risco, cujos valores reais v_i são independentes e advindos de uma distribuição uniforme de probabilidade no intervalo $[0, 1]$, existe um equilíbrio de Bayes-Nash no qual a estratégia de equilíbrio é informar $l_i = \frac{v_i}{2}$, para todo $i \in P$.*

Demonstração. Para calcularmos qual a melhor estratégia que um jogador i pode utilizar num Leilão de Primeiro Preço em que há apenas dois jogadores, assumimos que, para cada jogador i, v_i é uma variável aleatória advinda de uma distribuição uniforme de probabilidade no intervalo $[0, 1]$. Denotamos por $F(x) = x$ a *Função de Distribuição Acumulada* desta distribuição de probabilidade, que representa a probabilidade de v_i ser menor ou igual a um valor x, ou seja, $P(v_i \leq x) = x$. Denotamos por $f(x) = 1$ a *Função Densidade de Probabilidade* desta distribuição de probabilidade, que representa a probabilidade relativa de v_i assumir o valor x.

Supomos então que o jogador adversário j dará um lance que é uma fração do seu valor real, ou seja, $l_j = c \cdot v_j$, onde $0 \leq c \leq 1$. Temos então que a probabilidade de o jogador i vencer o leilão, ou seja, de $l_i \geq l_j$, é igual à probabilidade de $c \cdot v_j = l_j \leq l_i$. Portanto, a probabilidade de o jogador i vencer é igual a $F(\frac{l_i}{c}) = \frac{l_i}{c}$. Dessa forma, a utilidade esperada $E(u_i)$ de i é o lucro que ele terá caso vença, multiplicado pela probabilidade de ele vencer, ou seja,

$$E(u_i) = (v_i - l_i) \cdot \frac{l_i}{c} = \frac{v_i \cdot l_i - {l_i}^2}{c}. \tag{1}$$

Do ponto de vista do jogador i, sua melhor estratégia é aquela cujo lance l_i maximiza a equação (1). Para isso, calculamos a derivada em função de l_i:

$$\frac{d}{dl_i}E(u_i) = \frac{v_i - 2 \cdot l_i}{c} = 0. \tag{2}$$

Vemos portanto que a solução da equação (2) é $l_i = \frac{v_i}{2}$. Isso significa que, nesse caso, a melhor estratégia é informar seu lance como igual à metade do seu valor real, e o mesmo se aplica ao jogador j. □

Vamos calcular então qual seria a melhor estratégia [1] caso tivéssemos n jogadores.

Lema 2. *No Leilão de Primeiro Preço com n jogadores neutros em relação ao risco, cujos valores reais v_i são independentes e advindos de uma distribuição uniforme de probabilidade no intervalo $[0, 1]$, existe um equilíbrio de Bayes-Nash no qual a estratégia de equilíbrio é informar $l_i = v_i \cdot \frac{n-1}{n}$, para todo $i \in P$.*

Demonstração. Nesse caso, a probabilidade de i vencer é igual a probabilidade de todos os $n-1$ demais jogadores informarem lances menores que l_i. Como a probabilidade de um dos jogadores informar seu lance menor que l_i é igual a $\frac{l_i}{c}$, temos que a probabilidade de todos eles informarem seus lances como menores que l_i, ou seja, a probabilidade de i vencer, é $F(\frac{l_i}{c})^{n-1}$. Dessa forma, temos a seguinte utilidade esperada para i:

$$E(u_i) = (v_i - l_i) \cdot \left(\frac{{l_i}^{n-1}}{c^{n-1}}\right) = \frac{v_i \cdot {l_i}^{n-1} - {l_i}^n}{c^{n-1}}. \tag{3}$$

Para maximizar $E(u_i)$, temos então que

$$\frac{d}{dl_i}E(u_i) = \frac{(n-1) \cdot ({l_i}^{n-2} \cdot v_i) - n \cdot {l_i}^{n-1}}{c^{n-1}} = 0. \tag{4}$$

Resolvendo a equação (4), temos que $l_i = v_i \cdot \frac{n-1}{n}$. □

Isso confirma que o resultado intuitivo que, quanto maior o número de competidores num leilão, maiores devem ser os lances dos jogadores. Vale ressaltar que, ao passo que num leilão com 2 jogadores os lances representam apenas 50% do valor real dos jogadores, num leilão com 10 jogadores os lances representam 90% do valor real dos jogadores. Esse crescimento na receita esperada do leiloeiro, portanto, reflete a importância, para o leiloeiro, de ter mais jogadores no leilão para obter maiores lances, principalmente se há inicialmente poucos jogadores no leilão.

Analisamos em seguida um tipo de leilão que é à prova de estratégia, ou seja, em que a estratégia dominante, para todos os jogadores, é informar $l_i = v_i$.

3.2 Leilão de Segundo Preço

O *Leilão de Segundo Preço*, ou *Leilão de Vickrey* [6], foi proposto em 1961 por William Vickrey, professor de economia da Universidade de Columbia em Nova York e vencedor do prêmio Nobel em Ciências Econômicas de 1996. O Leilão de Segundo Preço é um tipo de leilão muito similar ao Leilão de Primeiro Preço. Nesse caso, temos novamente um organizador que deseja vender um item e compradores que devem informar seus lances sem saberem os lances dos demais participantes, e o vencedor é o jogador que informar o maior lance. No entanto, o preço a ser pago pelo vencedor é igual ao valor do segundo maior lance. Por essa razão, o Leilão de Vickrey é também chamado de Leilão de Segundo Preço.

Definição 3.4. No *Leilão de Segundo Preço*, o vencedor é o jogador $i \in P$ tal que $l_i = max\{l_j : j \in P\}$, e o valor a ser pago por i é igual a $p_i = max\{l_j : j \neq i, j \in P\}$.

Nesse tipo de leilão, diferentemente do Leilão de Primeiro Preço, existe uma estratégia dominante [1] para todos os jogadores, que é a de informarem seus lances como $l_i = v_i$.

Lema 3. *No Leilão de Segundo Preço, informar $l_i = v_i$ é uma estratégia dominante para todo $i \in P$.*

Demonstração. Para provarmos que o Leilão de Segundo Preço é à prova de estratégia, consideremos dois casos: no qual o jogador i possui v_i acima e abaixo dos valores reais dos demais jogadores.

No caso em que $v_i > l_j$, para todo $j \neq i$, se $l_i = v_i$, o jogador i vencerá o leilão e pagará $p_i = max\{l_j : j \neq i, j \in P\}$. Se o jogador i informasse $l_i > v_i$, o resultado seria exatamente o mesmo. Se, por outro lado, tivéssemos $l_i < v_i$, então poderíamos ter dois cenários. Caso l_i ainda assim fosse maior que todos os demais lances, então teríamos ainda assim o mesmo resultado. Caso contrário, ou seja, se $l_i < max\{l_j : j \in P\}$, então o jogador i não venceria o leilão e teria utilidade igual a zero.

Caso tenhamos que $v_i < l_j$, então existe $j \neq i$ tal que, se $l_i = v_i$, o jogador i não vencerá o leilão, mas terá a garantia de que sua utilidade será igual a zero. Se o jogador i informasse $l_i < v_i$, o resultado seria exatamente o mesmo. Se, por outro lado, tivéssemos $l_i > v_i$, então poderíamos ter dois cenários. Caso l_i ainda assim fosse menor que algum dos demais lances, então teríamos ainda assim o mesmo resultado. Caso contrário, ou seja, se $l_i = max\{l_j : j \in P\}$, então o jogador i venceria o leilão e, como teria $p_i > v_i$, sua utilidade seria negativa e portanto teria um prejuízo. □

Portanto, não existe cenário em que informar $l_i \neq v_i$ é mais vantajoso do que $l_i = v_i$, e em alguns casos seria efetivamente menos vantajoso. Essa característica surpreendente do Leilão de Segundo Preço faz com que a estratégia ótima dos jogadores seja sempre a mesma, independente do número de jogadores, e independente até mesmo dos lances dos demais jogadores.

No entanto, apesar de apresentar características interessantes, o Leilão de Segundo Preço é pouco utilizado na prática. Para ser utilizado corretamente, ele requer que os jogadores entendam o seu funcionamento e sejam convencidos de sua estratégia dominante. Além disso, ele requer que os jogadores informem ao leiloeiro o valor real que atribuem ao item, o que pode ser indesejável por parte dos jogadores por motivos outros que não apenas o resultado do leilão. Num leilão de compra, por exemplo, o valor real de um jogador pode representar o seu custo de produção do item, o que pode ser uma informação que o jogador gostaria de manter privada, independente do resultado do leilão.

Analisamos então outros tipos de leilão, chamados de leilões dinâmicos, e como eles se relacionam com os Leilões de Primeiro Preço e de Segundo Preço.

3.3 Leilão Inglês

O *Leilão Inglês* é o tipo de leilão mais usado na prática, e é usado frequentemente na venda de obras de arte. Nesse tipo de leilão, os jogadores anunciam seus lances de forma sequencial, e os lances devem ascender gradativamente, ou seja, o novo lance deve ser maior que todos os lances já informados por algum jogador. Pode-se considerar, portanto, que a cada novo lance há uma nova etapa em que os jogadores devem avaliar a situação e agir de acordo, informando ou não novos lances. Após um determinado tempo sem novos lances, é considerado que o jogador que deu o lance mais alto é o vencedor, e o preço a ser pago é igual ao valor desse lance.

É comum os leiloeiros fixarem um incremento mínimo ϵ para novos lances (e.g. os lances devem ser múltiplos de 100). Isso ocorre pois permitir que os lances sejam arbitrariamente maiores que os lances anteriores poderia prologar demasiadamente o leilão. Podemos perceber também que a política de definição do vencedor e do preço a ser pago é idêntica à definição do Leilão de Primeiro Preço.

No entanto, devido à natureza sequencial do Leilão Inglês, o lance do vencedor será igual ao valor do segundo maior lance acrescido de um valor ϵ. Como os jogadores conseguem submeter vários lances iterativamente, conforme observam os lances dos demais jogadores, o Leilão Inglês é considerado uma versão iterativa do Leilão de Segundo Preço, em que os lances ascendem gradativamente até que o maior lance supere o segundo maior lance.

O Leilão Inglês é, portanto, estrategicamente equivalente [5] ao Leilão de Segundo Preço. Isto ocorre pois, para ambos os leilões, os jogadores possuem a mesma estratégia dominante de informarem como lance o real valor que atribuem ao item. No Leilão de Segundo Preço, isso equivale a informar diretamente $l_i = v_i$ e, no Leilão Inglês, de ascender o lance gradativamente até $l_i = v_i$.

3.4 Leilão Holandês

No *Leilão Holandês*, o leiloeiro define um preço base, relativamente alto. Esse preço proposto é decrescido gradativamente pelo próprio leiloeiro, em etapas, até que algum jogador decida aceitar o preço. Por exemplo, o preço base pode ser igual a 1000, e a cada etapa esse preço é decrescido em 100. Cada etapa dura um tempo determinado ou até que algum jogador informe que aceita comprar o item pelo preço da etapa atual, e esse jogador será o vencedor do leilão.

Diferentemente do Leilão Inglês, em que os lances (e portanto os preços a serem pagos) crescem, no Leilão Holandês os preços decrescem. No entanto, ambos os leilões são considerados dinâmicos devido à existência de várias etapas em que os jogadores devem avaliar a situação e decidir informar ou não seus lances.

Estrategicamente, o Leilão Holandês é equivalente [5] ao Leilão de Primeiro Preço, pois o lance l_i do jogador vencedor i depende exclusivamente de v_i e da percepção do jogador i sobre os possíveis valores que os demais jogadores atribuem ao item.

3.5 Leilão Japonês

O *Leilão Japonês* é um leilão dinâmico composto de várias etapas que duram um tempo determinado pelo leiloeiro. A cada etapa, os preços crescem gradativamente de acordo com um valor definido pelo leiloeiro, de forma semelhante ao Leilão Holandês. E a cada etapa, os jogadores devem informar se aceitam o aumento do lance, ou se não aceitam e desistem do leilão. O vencedor é o último jogador a desistir do leilão.

Existem dois tipos de leilões japoneses: com visibilidade e sem visibilidade. Nos leilões com visibilidade, os jogadores conseguem ver quantos jogadores estão em cada etapa do leilão, e portanto o leilão acaba assim que o penúltimo jogador desistir. Dessa forma, o leilão é estrategicamente equivalente [5] ao Leilão de Segundo Preço.

No Leilão Japonês sem visibilidade, a cada etapa os jogadores devem escolher se continuam no leilão ou se o abandonam, mas sem saber se ainda há outros jogadores participando. Isso permite que um jogador aumente seu lance mesmo depois de já haver superado todos os outros lances. Por essa razão, essa modalidade do Leilão Japonês é estrategicamente equivalente ao Leilão de Primeiro Preço.

Como pudemos analisar, temos dois tipos básicos de leilão, o Leilão de Primeiro Preço e o Leilão de Segundo Preço, e vários dos tipos mais comuns de leilão conseguem ser reduzidos a um desses dois tipos básicos. Percebemos que uma grande diferença entre esses tipos de leilão é que o Leilão de Segundo Preço possui uma estratégia dominante que equivale a informar $l_i = v_i$, enquanto o Leilão de Primeiro Preço não possui uma estratégia dominante, mas apresenta um equilíbrio de Bayes-Nash cuja estratégia de equilíbrio equivale a informar $l_i = \frac{v_i}{2}$.

Buscamos analisar qual tipo de leilão é o mais adequado caso o leiloeiro esteja buscando maximizar sua própria receita. Exploramos a seguir qual a receita esperada para cada tipo de leilão, e como podemos maximizá-la.

4 Maximização da Receita

Inicialmente, fazemos algumas suposições sobre os jogadores, para em seguida construirmos modelos matemáticos que nos permitam analisar a receita esperada para o leiloeiro. Analisamos então qual a receita esperada para os Leilões de Primeiro Preço e de Segundo Preço, primeiramente para apenas dois jogadores, e posteriormente generalizamos para n jogadores.

4.1 Receita Esperada do Leilão de Primeiro Preço

Para entendermos qual a receita esperada de um Leilão de Primeiro Preço, devemos entender antes qual o comportamento esperado dos jogadores. Conforme concluímos anteriormente, num leilão com dois jogadores uma estratégia de equilíbrio é informar $l_i = \frac{v_i}{2}$. Sabendo disso, podemos calcular a receita esperada [1] do Leilão de Primeiro Preço para o leiloeiro.

Lema 4. *No Leilão de Primeiro Preço com dois jogadores neutros em relação ao risco, cujos valores reais são independentes e advindos de uma distribuição uniforme de probabilidade no intervalo* $[0, 1]$*, a receita esperada do leiloeiro é* $\frac{1}{3}$.

Demonstração. Sabemos que, para uma distribuição de probabilidade, o seu valor esperado é dado por $\int_{-\infty}^{\infty}(x \cdot f(x))dx$, onde $f(x)$ é a Função Densidade de Probabilidade para x. Para o Leilão de Primeiro Preço, consideramos que a receita do leiloeiro é igual a $max\{l_i, l_j\} = max\{\frac{v_i}{2}, \frac{v_j}{2}\}$.

Denotamos $g(x, 2)$ como a Função Densidade de Probabilidade para $max\{v_i, v_j\} = x$. A Função Densidade de Probabilidade para $v_i = x$ e $v_j \leq v_i$ é $f(x) \cdot P(v_j \leq v_i) = f(x) \cdot F(x)$. Como $f(x) = 1$ e $F(x) = x$, temos $f(x) \cdot P(v_j \leq v_i) = x$. De forma análoga, para $v_j = x$ e $v_i \leq v_j$, temos que a Função Densidade de Probabilidade é $f(x) \cdot P(v_i \leq v_j) = x$. Somando as densidades de probabilidade de ambos os casos, obtemos $g(x, 2) = 2 \cdot x$.

Denotamos $h(x, 2)$ como a Função Densidade de Probabilidade para $max\{l_i, l_j\} = x$. Como $l_i = \frac{v_i}{2}$, temos que $h(x, 2) = \frac{g(x,2)}{2} = x$.

A receita esperada do leiloeiro é, portanto,

$$\int_0^1 x \cdot h(x, 2)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}. \tag{5}$$

□

Lema 5. *No Leilão de Primeiro Preço com n jogadores neutros em relação ao risco, cujos valores reais são independentes e advindos de uma distribuição uniforme de probabilidade no intervalo $[0, 1]$, a receita esperada do leiloeiro é $\frac{n-1}{n+1}$.*

Demonstração. Para o caso de n jogadores, temos que cada um dos n jogadores pode possuir o maior valor real e, para cada um desses casos, todos os $n - 1$ demais jogadores devem possui valores reais inferiores. Daí temos que $g(x, n) = n \cdot f(x) \cdot F(x)^{n-1}$.

Como sabemos que uma estratégia de equilíbrio para o Leilão de Primeiro Preço com n jogadores é informar $l_i = v_i \cdot \frac{n-1}{n}$, temos que $h(x, n) = g(x, n) \cdot \frac{n-1}{n}$, e portanto $h(x, n) = (n - 1) \cdot x^{n-1}$. A receita esperada para o leiloeiro é, então,

$$\int_0^1 x \cdot h(x, 2)dx = (n - 1) \cdot \int_0^1 x^n dx = \frac{n - 1}{n + 1}. \tag{6}$$

□

4.2 Receita Esperada do Leilão de Segundo Preço

O Leilão de Segundo Preço, diferentemente do Leilão de Primeiro Preço, possui a característica de ser à prova de estratégia. Dessa forma, uma estratégia dominante é informar $l_i = v_i$. Sabendo disso, podemos calcular a receita esperada [1] do Leilão de Segundo Preço para o leiloeiro.

Lema 6. *No Leilão de Segundo Preço com dois jogadores neutros em relação ao risco, cujos valores reais são independentes e advindos de uma distribuição uniforme de probabilidade no intervalo $[0, 1]$, a receita esperada do leiloeiro é $\frac{1}{3}$.*

Demonstração. Para o caso com dois jogadores, a receita do leiloeiro é igual ao segundo maior lance entre os jogadores, ou seja, $min\{l_i, l_j\} = min\{v_i, v_j\}$.

Denotamos $g(x, 2)$ como a Função Densidade de Probabilidade para $min\{v_i, v_j\} = x$. A Função Densidade de Probabilidade para $v_i = x$ e $v_j \geq v_i$ é $f(x) \cdot P(v_j \geq v_i) = f(x) \cdot (1 - F(x))$. Como $f(x) = 1$ e $F(x) = x$, temos $f(x) \cdot P(v_j \geq v_i) = 1 - x$. De forma análoga, para $v_j = x$ e $v_i \geq v_j$, temos que a Função Densidade de Probabilidade é $f(x) \cdot P(v_i \geq v_j) = 1 - x$. Somando as densidades de probabilidade de ambos os casos, obtemos $g(x, 2) = 2 \cdot (1 - x)$.

Denotamos $h(x,2)$ como a Função Densidade de Probabilidade para $min\{l_i, l_j\} = x$. Como o Leilão de Segundo Preço é à prova de estratégia, temos que $h(x,2) = g(x,2)$.

Portanto, a receita esperada do leiloeiro é

$$\int_0^1 x \cdot h(x,2)dx = \int_0^1 2 \cdot (x - x^2)dx = \frac{1}{3}. \tag{7}$$

□

Lema 7. *No Leilão de Segundo Preço com n jogadores neutros em relação ao risco, cujos valores reais são independentes e advindos de uma distribuição uniforme de probabilidade no intervalo* $[0,1]$*, a receita esperada do leiloeiro é* $\frac{n-1}{n+1}$*.*

Demonstração. Para o caso de n jogadores, temos que cada um dos n jogadores pode possuir o segundo maior valor real e, para cada um desses casos, um dos $n-1$ demais jogadores deve possuir valor real igual ou superior, e $n-2$ jogadores devem possuir valores reais iguais ou inferiores. Daí temos que $g(x,n) = n \cdot (n-1) \cdot f(x) \cdot (1 - F(x)) \cdot F(x)^{n-2}$.

Devido à compatibilidade de incentivo, temos que $g(x,n) = h(x,n) = n \cdot (n-1) \cdot (1 - x) \cdot x^{n-2}$. Portanto a receita esperada do leiloeiro é

$$\int_0^1 x \cdot h(x,n)dx = (n^2 - n) \cdot \int_0^1 (x^{n-1} - x^n)dx = \frac{n-1}{n+1}. \tag{8}$$

□

Notamos então que Leilões de Primeiro Preço e de Segundo Preço apresentam exatamente a mesma receita esperada. Além disso, embora tenhamos utilizado a suposição que a distribuição de valores dos jogadores é uniforme, esse resultado se mantém mesmo que a distribuição não seja uniforme, bastando apenas que seja contínua e independente entre os jogadores.

4.3 Teorema da Equivalência de Receita

Como pudemos ver, satisfazendo algumas premissas básicas, os Leilões de Primeiro Preço e de Segundo Preço possuem a mesma receita esperada para o leiloeiro. Isso significa, portanto, que os Leilões Ingleses, Holandeses e Japoneses apresentam, também, a mesma receita esperada. O Teorema da Equivalência de Receita [3] afirma que, para todo um conjunto de tipos de leilões, a receita esperada para o leiloeiro é a mesma.

Denotamos por $u_i^*(v_i)$ a utilidade esperada do jogador i caso ele possua um valor real v_i e todos os jogadores, inclusive i, utilizem uma mesma estratégia de equilíbrio para o leilão em que estão participando.

Denotamos por $P_i(v_i)$ a probabilidade de o jogador i vencer o leilão dado que seu valor real é v_i e que todos os jogadores utilizam a mesma estratégia de equilíbrio. Denotamos também por $p_i^*(v_i)$ o total dos pagamentos esperados de i considerando que i está utilizando uma estratégia de equilíbrio como se seu valor real fosse v_i e que todos os demais jogadores utilizam a mesma estratégia de equilíbrio para seus próprios valores reais.

Teorema 8 (Teorema da Equivalência de Receita)**.** *A receita esperada para o leiloeiro é a mesma em qualquer leilão que possua as seguintes características: i) os jogadores possuem* *valores reais v_i independentes e advindos de uma distribuição cumulativa de probabilidade estritamente crescente e não atômica no intervalo $[v_{min}, v_{max}]$; ii) os jogadores com lances iguais a v_{min} possuem uma utilidade $u_i{}^*(v_{min}) = 0$; iii) o leilão é eficiente; e iv) os jogadores são neutros em relação ao risco.*

Demonstração. Para entendermos qual a receita esperada para o leiloeiro, devemos saber qual o pagamento esperado dos jogadores. Sabemos que a utilidade esperada $u_i^*(v_i)$ de um jogador i com valor real v_i será igual ao seu valor real v_i multiplicado por sua probabilidade de vencer $P_i(v_i)$, menos os seus pagamentos esperados $p_i^*(v_i)$. Portanto, temos que a utilidade esperada de i é

$$u_i^*(v_i) = v_i \cdot P_i(v_i) - p_i^*(v_i). \tag{9}$$

De forma análoga, caso o jogador i possua um valor real v_i', sua utilidade esperada será

$$u_i{}^*(v_i') = v_i' \cdot P_i(v_i') - p_i^*(v_i'). \tag{10}$$

Sabemos também que a utilidade esperada de i, utilizando uma estratégia de equilíbrio para seu valor real v_i, não pode ser menor que a utilidade esperada utilizando a mesma estratégia de equilíbrio para um outro valor $v_i^{'}$, visto que no equilíbrio o jogador i não pode ter um ganho ao alterar individualmente sua estratégia. Portanto, temos que

$$u_i^*(v_i) \geq v_i \cdot P_i(v_i^{'}) - p_i^*(v_i'). \tag{11}$$

Da equação (10), temos que $p_i^*(v_i') = v_i' \cdot P_i(v_i') - u_i{}^*(v_i')$. Substituindo na equação (11) obtemos $u_i^*(v_i) \geq v_i \cdot P_i(v_i^{'}) - (v_i' \cdot P_i(v_i') - u_i{}^*(v_i'))$, o que equivale a

$$u_i^*(v_i) \geq u_i^*(v_i') + P_i(v_i') \cdot (v_i - v_i'). \tag{12}$$

Considerando $v_i' = v_i + dv_i$ e substituindo em (12), temos

$$u_i^*(v_i) \geq u_i^*(v_i + dv_i) - P_i(v_i + dv_i) \cdot dv_i. \tag{13}$$

Isolando $P_i(v_i + dv_i)$, temos

$$P_i(v_i + dv_i) \geq \frac{u_i^*(v_i + dv_i) - u_i^*(v_i)}{dv_i}. \tag{14}$$

Se considerarmos que o valor real de i equivale a $v_i + dv_i$, temos que a utilidade de i não pode ser menor do que seria utilizando a mesma estratégia de equilíbrio para um outro valor v_i, portanto

$$u_i^*(v_i + dv_i) \geq u_i^*(v_i) + P_i(v_i) \cdot dv_i. \tag{15}$$

Isolando $P_i(v_i)$, temos

$$P_i(v_i) \leq \frac{u_i^*(v_i + dv_i) - u_i^*(v_i)}{dv_i}. \tag{16}$$

Combinando as equações (14) e (16), temos que

$$P_i(v_i + dv_i) \geq \frac{u_i^*(v_i + dv_i) - u_i^*(v_i)}{dv_i} \geq P_i(v_i). \tag{17}$$

No limite em que $dv_i \to 0$, obtemos

$$P_i(v_i) = \frac{du_i(v_i)}{dv_i}. \tag{18}$$

Integrando em relação a v_i, concluímos que

$$\int_{v_{min}}^{v_i} P_i(v_i)dv_i = u_i(v_i) - u_i(v_{min}). \tag{19}$$

Rearranjando a equação (19), temos

$$u_i(v_i) = u_i(v_{min}) + \int_{v_{min}}^{v_i} P_i(v_i)dv_i. \tag{20}$$

Portanto, para quaisquer tipos de leilão que apresentem as premissas do Teorema 1, teremos $u_i(v_{min}) = 0$. Como os leilões devem ser eficientes, todo os jogadores devem possuir a mesma probabilidade $P_i(v_i)$ de vencer para um mesmo valor real v_i. Daí temos que a utilidade esperada $u_i^*(v_i)$ de um jogador i deve ser a mesma. Da equação (9), temos que o pagamento esperado p_i^* dos jogadores também deve ser o mesmo, fazendo com que a receita esperada do leiloeiro seja equivalente, independente do tipo de leilão. □

4.4 Equivalência de Receita para Diferentes Perfis de Risco

Para situações em que as premissas do Teorema 1 não são cumpridas, deixamos de ter equivalência de receita entre os tipos de leilão. Um caso interessante é aquele em que a premissa iv) não é cumprida, ou seja, os jogadores não são neutros em relação ao risco. No Leilão de Segundo Preço, em que há uma estratégia dominante, o perfil de risco dos jogadores não afeta os lances dados e portanto a receita esperada é a mesma. No entanto, no Leilão de Primeiro Preço, o comportamento dos jogadores é afetado [5] pelo seu perfil de risco.

Se um jogador i é avesso ao risco e participa de um Leilão de Primeiro Preço, ele irá preferir vencer o leilão e obter uma utilidade positiva $u_i > 0$ a arriscar não vencer o leilão por uma chance de uma utilidade maior. Dessa forma, o jogador i apresentará uma tendência a dar lances mais altos, fazendo com que a receita esperada ao leiloeiro seja mais alta do que seria num Leilão de Segundo Preço.

Já para o caso em que o jogador i é favorável ao risco, num Leilão de Primeiro Preço ele tenderá a dar lances mais baixos em busca de uma utilidade mais alta. Dessa forma, o leiloeiro teria uma receita mais baixa do que aquela que teria caso o leiloeiro tivesse optado por um Leilão de Segundo Preço.

Curiosamente, o perfil de risco do leiloeiro também deve afetar o tipo de leilão a ser escolhido. Embora a receita esperada seja a mesma para ambos os tipos de leilão, os pagamentos esperados feitos pelos jogadores apresentam uma variância maior em Leilões de Segundo Preço. Isso ocorre pois os pagamentos esperados num Leilão de Primeiro Preço depende apenas do lance mais alto, ao passo que no Leilão de Segundo Preço os pagamentos esperados dependem dos dois lances mais altos.

Dessa forma, Leilões de Primeiro Preço são preferíveis para o leiloeiro caso o próprio leiloeiro ou os jogadores sejam avessos ao risco. Por outro lado, os Leilões de Segundo Preço são mais adequados ao leiloeiro caso o próprio leiloeiro ou os jogadores sejam favoráveis ao risco.

4.5 Leilão de Myerson

O *Leilão de Myerson* [2] foi proposto em 1981 por Roger Myerson, professor de economia e vencedor do prêmio Nobel de Ciência Econômicas de 2007. O Leilão de Myerson e ótimo no sentido de apresentar a maior receita esperada para o leiloeiro.

O Leilão de Myerson não cumpre a premissa iii) do Teorema da Equivalência de Receita. O Leilão de Myerson, visando maximizar a receita esperada do leiloeiro, emprega mecanismos para encorajar os jogadores a darem lances altos. Para isso, neste tipo de leilão, é possível que o item não seja alocado a qualquer um dos jogadores, ou ainda que seja alocado a um jogador que não apresentou o lance mais alto entre os jogadores.

Assumimos que, para cada jogador i, v_i é uma variável aleatória advinda de uma distribuição de probabilidade que não é necessariamente uniforme, e pode ser diferente para cada jogador. Denotamos a Função Densidade de Probabilidade $f_i(x)$ como a probabilidade relativa de v_i apresentar o valor x para o jogador i. Também, denotamos a Função de Distribuição Acumulada $F_i(x)$ como a probabilidade de v_i ser menor ou igual ao valor x para o jogador i.

Denotamos $\psi_i(l_i)$ como o lance virtual do jogador i, onde

$$\psi_i(l_i) = l_i - \frac{1 - F_i(l_i)}{f_i(l_i)}. \tag{21}$$

Para que a equação (21) se mantenha, devemos ter que $\psi_i(l_i)$ é estrita e monotonicamente crescente em l_i. Isso equivale a dizer que, quanto maior o lance real l_i, maior deve ser o lance virtual $\psi_i(l_i)$.

O Leilão de Myerson possui a característica peculiar de que o item não é alocado ao jogador com maior lance l_i, mas ao jogador com o maior lance virtual $\psi_i(l_i)$, desde que $\psi_i(l_i) \geq 0$. Caso $\psi_i(l_i) < 0$, para todo $i \in P$, então o item não é vendido.

Apenas o ganhador do item deve pagar ao leiloeiro, e o valor p_i a ser pago é equivalente ao menor lance l_i que ele poderia ter dado, e ainda assim ter vencido o leilão por ter obtido um lance virtual $\psi_i(l_i)$ não-negativo e superior aos lances virtuais dos demais jogadores, isto é,

$$p_i = \inf\{l_i : \psi_i(l_i) \geq \psi_j(l_j), \forall j \neq i \text{ } e \text{ } \psi_i(l_i) \geq 0\} \tag{22}$$

Definição 4.1. No *Leilão de Myerson*, o vencedor é o jogador $i \in P$ tal que $\psi_i(l_i) = max\{\psi_j(l_i) \text{ e } \psi_j \geq 0 : j \in P\}$, e o valor a ser pago por i é igual a $p_i = \inf\{l_i : \psi_i(l_i) \geq \psi_j(l_j), \forall j \neq i \text{ } e \text{ } \psi_i(l_i) \geq 0\}$.

O Leilão de Myerson é à prova de estratégia pelos mesmos argumentos utilizados para mostrar que o Leilão de Segundo Preço é à prova de estratégia. Caso o jogador i vença o leilão informando $l_i = v_i$, ele não pagaria menos por informar $l_i \neq v_i$ e talvez não vencesse o leilão. Caso não vença o leilão informando $l_i = v_i$, ele poderia vencer com utilidade $u_i < 0$ por informar $l_i \neq v_i$.

Lema 9. *No Leilão de Myerson, informar $l_i = v_i$ é uma estratégia dominante para todo $i \in P$.*

O requerimento de que $\psi_i(l_i) \geq 0$ para que o item seja alocado a i reflete a existência de um preço de reserva r_i^*, ou seja, um lance mínimo que deve ser dado por cada jogador baseado em sua distribuição de probabilidade. O preço de reserva do leilão é dado pelo valor l_i tal que $\psi_i(l_i) = 0$. Para que $\psi_i(l_i) \geq 0$, portanto, devemos ter $l_i \geq r_i^*$. Caso nenhum lance seja superior ao preço de reserva, o item permanece com o leiloeiro, e tanto os jogadores quanto o leiloeiro obtém receita igual a zero.

No caso em que a distribuição de probabilidade dos jogadores não é uniforme, são utilizados os lances virtuais conforme a equação (21). Os lances virtuais são utilizados para inflar os lances dos jogadores que possuem baixa probabilidade de ofertar lances altos devido às suas distribuições de probabilidade. Isso, portanto, serve o propósito de forçar os jogadores mais competitivos, ou seja, aqueles com distribuições de probabilidade nas quais possuir valor real alto ocorre com alta probabilidade, a realizarem pagamentos que sejam altos.

Para o caso em que as distribuições de probabilidade dos jogadores é uniforme, o Leilão de Myerson pode ser considerado equivalente ao Leilão de Segundo Preço com o acréscimo de um preço de reserva, o que aumenta a receita esperada do leiloeiro.

4.6 Receita Esperada do Leilão de Myerson

Para que possamos relacionar a receita esperada do Leilão de Myerson com os resultados que obtivemos para os leilões de Primeiro e de Segundo Preço, vamos analisar o caso em que as distribuições de probabilidade dos jogadores são uniformes e independentes no intervalo $[0, 1]$. Analisaremos primeiramente a situação em que temos dois jogadores e, posteriormente, generalizaremos para n jogadores.

Como o Leilão de Myerson apresenta um preço de reserva r_i^*, devemos considerá-lo em nossos cálculos. Temos que $f(r_i^*) = 1$ e $F(r_i^*) = r_i^*$ (pois a distribuição de probabilidade é uniforme). Para que tenhamos $\psi_i(r_i^*) = 0$, de acordo com a equação (21), o preço de reserva será

$$\psi_i(r_i^*) = r_i^* - \frac{1 - r_i^*}{1} = 0. \tag{23}$$

Resolvendo a equação (23), obtemos $r_i^* = \frac{1}{2}$.

Lema 10. *No Leilão de Myerson com 2 jogadores neutros em relação ao risco, cujos valores reais são independentes e advindos de uma distribuição uniforme de probabilidade no intervalo $[0, 1]$, a receita esperada do leiloeiro é $\frac{5}{12}$.*

Demonstração. Devido ao preço de reserva, teremos 4 casos, pois cada um dos dois jogadores pode apresentar um lance maior ou menor que o preço de reserva.

O primeiro caso ocorre com probabilidade $P_1 = \frac{1}{4}$ e é aquele em que temos $l_i < \frac{1}{2}$ e $l_j < \frac{1}{2}$. Dessa forma, o item não é vendido e a receita do leiloeiro é igual a 0.

Os segundo e terceiro casos ocorrem quando temos $l_i < \frac{1}{2}$ e $l_j \geq \frac{1}{2}$, e quando $l_i \geq \frac{1}{2}$ e $l_j < \frac{1}{2}$, respectivamente. Esses dois casos em conjunto ocorrem com probabilidade $P_{2,3} = \frac{1}{2}$, resultando numa receita de $\frac{1}{2}$ ao leiloeiro.

O quarto caso ocorre com probabilidade $P_4 = \frac{1}{4}$ e é aquele em que temos $l_i \geq \frac{1}{2}$ e $l_j \geq \frac{1}{2}$. Para calcular a receita do leiloeiro neste caso, utilizamos uma abordagem similar àquela utilizada para calcularmos a receita esperada no Leilão de Segundo Preço.

Como estamos analisando o caso em que $v_i \geq \frac{1}{2}$ e $v_j \geq \frac{1}{2}$, a distribuição de probabilidade de v_i e v_j não será uniforme no intervalo $[0,1]$. Dessa forma, a Função Densidade de Probabilidade será $f'(x) = 2$ e a Função de Densidade Acumulada será $F'(x) = 2 \cdot x - 1$.

Denotamos $g(x,2)$ como a Função Densidade de Probabilidade para $min\{(v_i, v_j) : v_i \geq \frac{1}{2}, v_j \geq \frac{1}{2}\} = x$. A Função Densidade de Probabilidade para $v_i = x$ e $v_j \geq v_i$ é $f'(x) \cdot P(v_j \geq v_i) = f'(x) \cdot (1 - F'(x))$. Como $f'(x) = 2$ e $F'(x) = 2 \cdot x - 1$, temos $f'(x) \cdot P(v_j \geq v_i) = 4 - 4 \cdot x$. De forma análoga, para $v_j = x$ e $v_i \geq v_j$, temos que a Função Densidade de Probabilidade é $f'(x) \cdot P(v_i \geq v_j) = 4 - 4 \cdot x$. Somando as densidades de probabilidade de ambos os casos, obtemos $g(x,2) = 8 - 8 \cdot x$.

Denotamos por $h(x,2)$ a Função Densidade de Probabilidade para a variável aleatória $min\{l_i, l_j\}$ condicionada a $l_i \geq \frac{1}{2}$ e $l_j \geq \frac{1}{2}$. Como o Leilão de Myerson é à prova de estratégia, temos que $h(x,2) = g(x,2)$.

Portanto, a receita esperada do leiloeiro no caso 4 é

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} x \cdot h(x,2)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 8 \cdot (x - x^2)dx = \frac{2}{3}. \tag{24}$$

Finalmente, a receita total esperada do leiloeiro é

$$\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{12}. \tag{25}$$

□

Observa-se que no Leilão de Myerson obtemos receita esperada de $\frac{5}{12}$, enquanto os Leilões de Primeiro e Segundo Preço geram receita esperada de $\frac{1}{3}$. Um aumento, portanto, de 25% na receita esperada para um leilão com dois jogadores.

Lema 11. *No Leilão de Myerson com n jogadores neutros em relação ao risco, cujos valores reais são independentes e advindos de uma distribuição uniforme de probabilidade no intervalo $[0,1]$, a receita esperada do leiloeiro é $\frac{n}{n+1} - \frac{1-2^{-n}}{n+1}$.*

Demonstração. Para o caso geral com n jogadores, de forma análoga ao que fizemos para o caso com dois jogadores, vamos calcular a receita esperada do leiloeiro para a situação em que temos k jogadores informando lances $l_i \geq \frac{1}{2}$. Cada um dos k jogadores pode possuir o segundo maior valor real e, para cada um desses casos, um dos $k-1$ demais jogadores deve possuir valor real igual ou superior, e $k-2$ jogadores devem possuir valores reais inferiores. Daí temos a densidade de probabilidade $g(x,k) = k \cdot (k-1) \cdot f(x) \cdot (1 - F(x)) \cdot F(x)^{k-2}$.

Como o leilão é à prova de estratégia, temos que $g(x,k) = h(x,k) = k \cdot (k-1) \cdot 2 \cdot (2 - 2 \cdot x) \cdot (2 \cdot x - 1)^{k-2}$. Portanto a receita esperada do leiloeiro é

$$\int_{\frac{1}{k}}^{1} x \cdot h(x,k)dx = (k^2 - k) \cdot \int_{\frac{1}{2}}^{1} 4 \cdot (x - x^2) \cdot (2 \cdot x - 1)^{k-2}dx = \frac{k}{k+1}. \tag{26}$$

Para o Leilão de Myerson com dois jogadores, tínhamos um total de apenas 2^2 casos. Para o caso geral com n jogadores, teremos 2^n casos, pois cada um dos n jogadores pode ter um lance maior ou menor que $\frac{1}{2}$. Para cada um desses 2^n casos, podemos calcular a receita esperada do leiloeiro a partir da probabilidade de termos k jogadores com lances maiores que $\frac{1}{2}$. Podemos ter de 0 a n jogadores com lances acima de $\frac{1}{2}$. Temos portanto que a receita total esperada do leiloeiro é

$$\frac{1}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \frac{k}{k+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{1-2^{-n}}{n+1}. \tag{27}$$

□

5 Conclusão

Neste trabalho, estudamos leilões de um único item e apresentamos alguns dos principais conceitos que nos permitiram analisar suas estratégias e calcular a receita esperada para o leiloeiro.

Para o Leilão de Primeiro Preço, descobrimos que não há estratégia dominante, e que para o leilão com n jogadores uma estratégia de equilíbrio é informar

$$l_i = v_i \cdot \frac{n-1}{n}.$$

Já para o Leilão de Segundo Preço, que é à prova de estratégia, existe um estratégia dominante que consiste em informar

$$l_i = v_i.$$

Para ambos os leilões, assim como para quaisquer leilões que satisfaçam as premissas do Teorema da Equivalência de Receita, provamos que a receita esperada do leiloeiro é equivalente a

$$\frac{n-1}{n+1}.$$

Ao buscarmos um tipo de leilão que permite maximizar a receita esperada do leiloeiro, descobrimos o Leilão de Myerson, que não respeita todas as premissas do Teorema da Equivalência de Receita e apresenta uma receita esperada superior àquelas dos Leilões de Primeiro e Segundo Preço. Esse tipo de leilão introduz o conceito de lance virtual, ao utilizar a distribuição de probabilidade dos jogadores e seus lances reais para definir um lance virtual que definirá o vencedor do leilão. O Leilão de Myerson é à prova de estratégia, e sua estratégia dominante equivale a informar

$$l_i = v_i.$$

Para a situação em que a distribuição de probabilidade dos jogadores é uniforme, o Leilão de Myerson é equivalente ao Leilão de Segundo Preço com um preço de reserva igual a $\frac{1}{2}$. Dessa forma, a receita esperada do leiloeiro é

$$\frac{n}{n+1} - \frac{1-2^{-n}}{n+1}.$$

Apesar de o Leilão de Myerson apresentar alta receita esperada para o leiloeiro, ele possui as características de nem sempre alocar o item ao jogador com o lance mais alto, e de incorporar a distribuição de probabilidade dos jogadores à decisão de a qual jogador alocar o item. Dessa forma, apesar de ser muito interessante teoricamente, o Leilão de Myerson é difícil de ser utilizado na prática.

No entanto, ao termos um leilão que segue o Teorema da Equivalência de Receita com $n+1$ jogadores, teremos uma receita esperada superior ao Leilão de Myerson com n jogadores. Concluímos, portanto, que a concorrência é um fator tão relevante para a receita esperada do leiloeiro que a inclusão de um único jogador no leilão é mais importante do que a utilização de um leilão matematicamente ótimo para a maximização da receita.

Referências

[1] Professor Bergstrom. Notes on expected revenue from auctions. Economics 100C.

[2] R. Myerson. Optimal auction design. *Mathematics of Operations Research*, 6(1), 1961.

[3] Noam Nisan, Tim Roughgarden, Eva Tardos, and Vijay V Vazirani. *Algorithmic game theory*, volume 1. Cambridge University Press Cambridge, 2007.

[4] Rafael C. S. Schouery. Problemas de alocação e precificação de itens. 2014.

[5] Yoav Shoham and Kevin Leyton-Brown. *Multiagent systems: Algorithmic, game-theoretic, and logical foundations.* Cambridge University Press, 2008.

[6] W. Vickrey. Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders. *The Journal of Finance*, 16(1):8–37, 1961.