INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

# Conjuntos dominantes e produto direto de ciclos

*A. R. Oliveira* *C. N. Campos*

Technical Report - IC-13-14 - Relatório Técnico

June - 2013 - Junho

# Conjuntos Dominantes e Produto Direto de Ciclos

A. R. Oliveira* C. N. Campos†

6 de junho de 2013

**Resumo**

Este trabalho determina o *idomatic number* do produto direto de um ciclo com quatro vértices e um ciclo com $n$ vértices. Além disso, é determinado um limitante inferior simples para a cardinalidade do conjunto dominante independente mínimo destes grafos.

## 1 Introdução

Seja $G$ um grafo com conjunto de vértices V(G) e conjunto de arestas E(G). Um grafo $G$ é *simples* se não possui laços ou arestas múltiplas. O *grau* de um vértice $v$, denotado por $d(v)$, é o número de vezes em que $v$ é extremo de alguma aresta. No caso de grafo sem laços, isto corresponde ao número de arestas incidentes no vértice. Um grafo é *k-regular*, se cada um de seus vértices possui grau $k$. Um grafo é dito *conexo*, se para toda bipartição $(X, Y)$ de *V(G)* existe pelo menos uma aresta com um extremo em $X$ e outro em $Y$. A *vizinhança aberta* de um vértice $v \in V(G)$, denotada por $N(v)$, é o conjunto de todos os vértices de $G$ que são adjacentes a $v$. A *vizinhança fechada* de um vértice $v \in V(G)$, denotada por $N[v]$, é $N(v) \cup \{v\}$.

Um conjunto $D \subseteq V(G)$ é dito um *conjunto dominante* se $\forall v \in V(G)$, $v \in D$ ou $v$ é adjacente a um elemento de $D$. Um vértice $v_i$ é *dominado* por um vértice $v_j$ se $v_j \in N(v_i)$ e $v_j \in D$, sendo $D \subseteq V(G)$ um conjunto dominante de $V(G)$. Um conjunto $D_i$ *domina* um conjunto $D_j$, se todo vértice de $D_j$ é adjacente a pelo menos um vértice do conjunto $D_i$. O *número de dominação* de $G$, $\gamma(G)$, é definido como a cardinalidade mínima de um conjunto dominante de $G$, ou seja, $\gamma(G) := \min\{|S| : S \text{ é um conjunto dominante de } G\}$.

O *problema do conjunto dominante mínimo* consiste em encontrar, num dado grafo $G$, um conjunto dominante de cardinalidade mínima. Embora vários problemas que se reduzem a este problema já viessem sendo considerados há muito tempo, um tratamento mais formal destes problemas só surgiu por volta de 1962 [1]. Com esta formalização, diversos problemas, de natureza mais aplicada, foram formulados como problemas de conjuntos dominantes [2, 3, 4, 5, 6]. Estas aplicações levaram à definição de variantes do problema original. Uma dessas variantes é o problema de determinar se um dado grafo $G$ possui uma partição de seus vértices em conjuntos dominantes. Esta partição é denominada *partição dominante*.

*Aluno do Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas

†Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas

Quando os vértices de um grafo $G$ possuem uma partição dominante, define-se o *domatic number*[1] como $d(G) := \max\{|\mathscr{P}| : \mathscr{P}$ é uma partição dominante$\}$.

Outras variações do problema do conjunto dominante mínimo, bem como o de particionar $V(G)$ em conjuntos dominantes, consideram conjuntos dominantes com propriedades adicionais. Um conjunto dominante $D$ é um *conjunto dominante independente* se D não possui vértices adjacentes. Define-se uma *partição dominante independente* como uma partição de V(G) em conjuntos dominantes independentes. Ademais, define-se o *idomatic number*[2] de um grafo $G$ como $id(G) := \max\{|\mathscr{P}| : \mathscr{P}$ é uma partição dominante independente$\}$. Klavzar e Mekis [7] abordaram o problema de determinar o *idomatic number* para a classe dos grafos obtidos pelo produto direto de grafos completos. Este trabalho aborda o mesmo problema para grafos obtidos pelo produto direto de ciclos.

## 2 Preliminares

O *produto direto*[2] $G_1 \times G_2$ de dois grafos simples $G_1$ e $G_2$ possui $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ e dois vértices $(u, v)$ e $(x, y)$ são adjacentes em $G_1 \times G_2$ se, e somente se, $ux \in E(G_1)$, e $vy \in E(G_2)$.

Um grafo conexo 2-regular com $n$ vértices, $C_n$, é um *grafo ciclo*. Sejam $C_m$ e $C_n$, com $m, n \geq 3$, $V(C_m) := \{v_1, v_2, ..., v_m\}$ e $V(C_n) := \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Seja $G := C_m \times C_n$. Para simplificar a notação, o vértice $(v_i, v_j) \in V(G)$ será denotado por $v_{ij}$. Ademais, operações envolvendo os índices dos vértices de $G$ serão modulares. Neste texto, representamos $G$ por meio de uma grade $(m + 2) \times (n + 2)$ tal que:

(i) a numeração das linhas vai de 0 a $n + 1$;

(ii) a numeração das colunas vai de 0 a $m + 1$;

(iii) o vértice $v_{ij}$ está na posição $(i, j)$ da grade, $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$;

(iv) as linhas 0 e $n + 1$ são cópias das linhas $n$ e 1, respectivamente;

(v) as colunas 0 e $m + 1$ são cópias das colunas $m$ e 1, respectivamente.

A Figura 1 exemplifica esta representação para o caso em que $G = C_4 \times C_5$. As repetições nas linhas 1 e $n + 1$ e colunas 1 e $m + 1$ são usadas para evitar cruzamentos no desenho.
A seguir, são apresentadas algumas propriedades de produto direto de ciclos que são úteis neste trabalho.

**Propriedade 1.** *Seja $G := C_m \times C_n$, $m, n \geq 3$ e $v_{ij} \in V(G)$. Então*

$$N(v_{ij}) = \{v_{(i-1)(j-1)}, v_{(i-1)(j+1)}, v_{(i+1)(j-1)}, v_{(i+1)(j+1)}\}.$$

*Demonstração.* O resultado segue diretamente da definição. Note que, não existe $v_{pq} \in N(v_{ij})$, com $p \neq \{i - 1, i + 1\}$ e $q \neq \{j - 1, j + 1\}$ pois se tal vértice existisse $v_i v_p \in E(C_m)$ e $v_j v_q \in E(C_n)$. □

[1] Não foi encontrada uma tradução satisfatória do termo em inglês.
[2] Em inglês é conhecido como *direct product, categorical product e tensor product.*

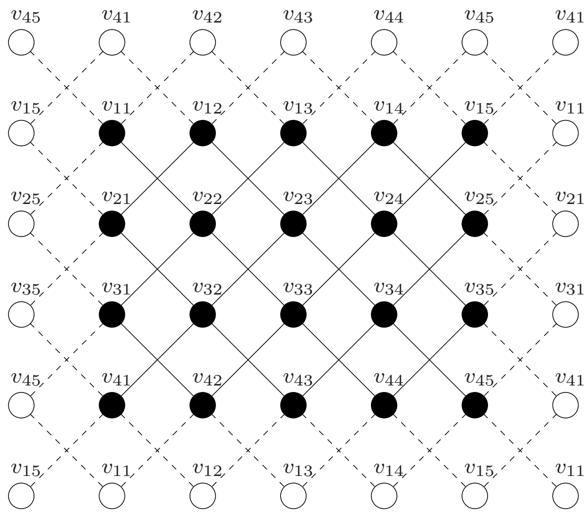


Figura 1: Grafo obtido do produto direto dentre $C_4$ e $C_5$

**Propriedade 2.** *Seja $G := C_m \times C_n,\ m, n \geq 3$. Então:*

*(i) $v_{ij}$ e $v_{pq}$ quando $p = i$ ou $q = j$ são não-adjacentes;*

*(ii) o conjunto $D_{i\bullet} := \{v_{ij}, 1 \leq j \leq n\}$ é um conjunto independente;*

*(iii) o conjunto $D_{\bullet i} := \{v_{ji}, 1 \leq j \leq m\}$ é um conjunto independente;*

*(iv) se $m = 4$, então $N(v_{ij}) = N(v_{(i+2)j})$.*

*Demonstração.* Considere inicialmente que $p = i$. Suponha que $v_{ij}$ e $v_{iq}$ sejam adjacentes. Pela definição de produto direto, $v_i v_i \in E(C_m)$, mas isto é uma contradição. O caso em que $q = j$ é análogo. Os itens (ii) e (iii) seguem como corolário do item (i). Pela Propriedade 1,

$$N(v_{ij}) = \{v_{(i-1)(j-1)}, v_{(i-1)(j+1)}, v_{(i+1)(j-1)}, v_{(i+1)(j+1)}\}, \text{ e}$$

$$N(v_{(i+2)j}) = \{v_{((i+2)-1)(j-1)}, v_{((i+2)-1)(j+1)}, v_{((i+2)+1)(j-1)}, v_{((i+2)+1)(j+1)}\}.$$

Logo, $N(v_{(i+2)j}) = \{v_{(i+1)(j-1)}, v_{(i+1)(j+1)}, v_{(i+3)(j-1)}, v_{(i+3)(j+1)}\}$. Uma vez que $(i+3) \equiv (i-1) \pmod 4$, então $N(v_{(i+2)j}) = \{v_{(i+1)(j-1)}, v_{(i+1)(j+1)}, v_{(i-1)(j-1)}, v_{(i-1)(j+1)}\} = N(v_{ij})$. □

**Lema 3.** *Seja $G := C_4 \times C_n, n \geq 3$, e seja $D$ um conjunto dominante independente de $G$. Se $v_{ij} \in D$, então $v_{(i+2)j} \in D$.*

*Demonstração.* Sejam $G$ e $D$ dados como na hipótese. Suponha que $v_{ij} \in D$. Por construção, $N[v_{(i+2)j}] = (N[v_{ij}] \setminus \{v_{ij}\}) \cup \{v_{(i+2)j}\}$. Como $D$ é um conjunto dominante independente e $v_{ij} \in D$, para que $v_{(i+2)j}$ seja dominado, mantendo a independência de $D$, devemos ter $v_{(i+2)j} \in D$.

□

Neste texto, os vértices $v_{ij}$ e $v_{(i+2)j}$ são denominados *vértices correspondentes*. Esta notação é inspirada no lema anterior.

**Lema 4.** *Seja $G := C_4 \times C_n, n \geq 3$, e seja $D$ um conjunto dominante independente de $G$. O conjunto $D_{\bullet i}$ domina todos os elementos de $D_{\bullet(i-1)}$ e $D_{\bullet(i+1)}$, bem como o conjunto $D_{i\bullet}$ domina todos os elementos de $D_{(i-1)\bullet}$ e $D_{(i+1)\bullet}$.*

*Demonstração.* Por construção, todo vértice de $D_{\bullet(i-1)}$ e $D_{\bullet(i+1)}$ é adjacente a exatamente dois vértices da coluna $i$. Uma vez que o conjunto $D_{\bullet i}$ contém todos os vértices da coluna $i$, todos os vértices de $D_{\bullet(i-1)}$ e $D_{\bullet(i+1)}$ estão dominados. Analogamente, todo vértice de $D_{(i-1)\bullet}$ e $D_{(i+1)\bullet}$ é adjacente a exatamente dois vértices da linha $i$. Portanto, o conjunto $D_{i\bullet}$ garante que todos os vértices de $D_{(i-1)\bullet}$ e $D_{(i+1)\bullet}$ estejam dominados. $\square$

**Lema 5.** *Seja $G := C_4 \times C_n$, $n \geq 3$, e seja $D$ um conjunto dominante independente de $G$. Então, $|D| \geq 2\lceil\frac{|V(G)|}{6}\rceil$.*

*Demonstração.* Sejam $G := C_4 \times C_n$, $n \geq 3$, $v_{ij} \in V(G)$ e $D$ um conjunto dominante independente de G. Suponha que $v_{ij} \in D$. Pelo Lema 3, $v_{(i+2)j} \in D$. Pelo item (iv) da Propriedade 2, $N(v_{ij}) = N(v_{(i+2)j})$. Ademais, pela Propriedade 1, $|N(v_{ij})| = 4$. Logo, $v_{ij}$ e $v_{(i+2)j}$ dominam juntos seis vértices.

Quando cada par de vértices correspondentes de $D$ domina seis vértices distintos, então $|D| = 2\frac{|V(G)|}{6}$. Se este particionamento não é possível, então $|D| > 2\frac{|V(G)|}{6}$. Concluímos que $|D| \geq 2\lceil\frac{|V(G)|}{6}\rceil$. $\square$

## 3 Resultados

Nesta seção, o problema da partição dominante independente é estudado para $G := C_4 \times C_n$, com $n \geq 3$. Inicialmente é demonstrado que $G$ possui uma partição dominante independente. A seguir, é determinado o $id(G)$.

**Teorema 6.** *Seja $G := C_4 \times C_n$, $n \geq 3$. Então, $D_{\{1,3\}\bullet} := D_{1\bullet} \cup D_{3\bullet}$ e $D_{\{2,4\}\bullet} := D_{2\bullet} \cup D_{4\bullet}$ são conjuntos dominantes independentes. Ademais, $\{D_{\{1,3\}\bullet}, D_{\{2,4\}\bullet}\}$ forma uma partição dominante independente.*

*Demonstração.* Pelo item (ii) da Propriedade 2, cada $D_{i\bullet}$ é um conjunto independente. Pelo Lema 4, $D_{2\bullet} \cup D_{4\bullet}$ é dominado tanto por $D_{1\bullet}$ como por $D_{3\bullet}$. Além disso, pela Propriedade 1, $D_{1\bullet}$ e $D_{3\bullet}$ não possuem vértices adjacentes entre si. Como $V(G) = D_{1\bullet} \cup D_{2\bullet} \cup D_{3\bullet} \cup D_{4\bullet}$, segue que $D_{\{1,3\}\bullet}$ é um conjunto dominante independente. O caso $D_{\{2,4\}\bullet}$ é análogo. Como $D_{\{1,3\}\bullet} \cap D_{\{2,4\}\bullet} = \emptyset$, $D_{\{1,3\}\bullet}$ e $D_{\{2,4\}\bullet}$ formam uma partição dominante independente. $\square$

A partição dominante independente exibida acima é denominada *partição canônica*.

**Lema 7.** *Seja $G := C_4 \times C_n$, $n \geq 3$. Então,* G *não possui partição dominante independente de cardinalidade maior ou igual a quatro.*

*Demonstração.* Seja $G := C_4 \times C_n, n \geq 3$. Suponha que $G$ possua uma partição dominante independente de cardinalidade $l$, com $l \geq 4$. Seja $\mathfrak{D} := \{D_1, D_2, ..., D_l\}$ uma tal partição. Então, $|V(G)| = \sum_{i=1}^{l} |D_i|$.

Considere $n = 3k+r$, com $k \geq 1$ e $r \in \{0,1,2\}$. Então, $|V(G)| = 12k+4r$. Pelo Lema 5, $|D_i| \geq 2\lceil \frac{|V(G)|}{6} \rceil = 4k + 2\lceil \frac{4r}{6} \rceil$. Assim, $12k + 4r = |V(G)| = \sum_{i=1}^{l} |D_i| \geq 4kl + 2l\lceil \frac{4r}{6} \rceil$, o que é uma contradição, uma vez que $l \geq 4$. Portanto não existe partição dominante independente de cardinalidade maior ou igual a quatro. $\square$

**Teorema 8.** *Seja $G := C_4 \times C_n$, com $n \equiv 0 \pmod 3$. Então, existe partição dominante independente de cardinalidade três.*

*Demonstração.* Considere os conjuntos definidos a seguir:

$D_0 := \bigcup_{i=1}^{n/3} D_{\bullet(3i)}$

$D_1 := \bigcup_{i=1}^{n/3} D_{\bullet(3i-2)}$

$D_2 := \bigcup_{i=1}^{n/3} D_{\bullet(3i-1)}$

Pelo item (iii) da Propriedade 2, $D_{\bullet i}$ é um conjunto independente. Da Propriedade 1, concluímos que os vértices de $D_{\bullet i}$ não possuem vizinhos em $D_{\bullet j}$, com $j \neq i \pm 1$. Além disso, pelo Lema 3, o conjunto $D_{\bullet i}$ domina os conjuntos $D_{\bullet(i-1)}$ e $D_{\bullet(i+1)}$. Portanto, cada $D_i$ é um conjunto dominante independente. Como $V(G) := D_0 \cup D_1 \cup D_2$ e $D_i \cap D_j = \emptyset$, concluímos que $\{D_0, D_1, D_2\}$ é uma partição dominante independente de $G$. $\square$

**Lema 9.** *Seja $G := C_4 \times C_n$, com $n \not\equiv 0 \pmod 3$. Então, não existe partição dominante independente de cardinalidade três.*

*Demonstração.* Seja $G$ como dado na hipótese e $D$ um conjunto dominante independente de $G$. Suponha que $G$ possua partição dominante independente de cardinalidade três. Seja $\mathfrak{D} := \{D_1, D_2, D_3\}$ uma tal partição. Então, $|V(G)| = \sum_{i=1}^{3} |D_i|$. Considere $n = 3k + r$, com $k \geq 1$ e $r \in \{1, 2\}$. Então, $|V(G)| = 12k + 4r$. Pelo Lema 5, $|D_i| \geq 2\lceil \frac{|V(G)|}{6} \rceil = 4k + 2\lceil \frac{4r}{6} \rceil$. Vamos agora analisar separadamente os valores possíveis de $r$:

Quando $r = 1$, $|D_i| \geq 4k + 2\lceil \frac{4}{6} \rceil = 4k + 2$. Assim, temos que

$$12k + 4r = 12k + 4 = |V(G)| = \sum_{i=1}^{3} |D_i| \geq 12k + 6,$$

o que é uma contradição.

Quando $r = 2$, $|D_i| \geq 4k + 2\lceil \frac{8}{6} \rceil = 4k + 4$. Desta forma, temos que

$$12k + 4r = 12k + 8 = |V(G)| = \sum_{i=1}^{3} |D_i| \geq 12k + 12,$$

o que também é uma contradição.

Concluímos que não existe partição dominante independente de cardinalidade três quando $n \not\equiv 0 \pmod 3$. □

**Corolário 10.** *Seja* $G := C_4 \times C_n, n \geq 3$. *Então,*

$$id(G) = \begin{cases} 3, & \textit{se } n \equiv 0 \pmod 3; \\ 2, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

*Demonstração.* Seja $G$ dado como na hipótese. Pelo Lema 7, não existe partição dominante independente de cardinalidade maior ou igual a quatro. Pelo Teorema 8, existe partição dominante independente de cardinalidade três quando $n \equiv 0 \pmod 3$. Logo, $id(G) = 3$ neste caso. Pelo Lema 9, não existe partição dominante independente de cardinalidade três quando $n \not\equiv 0 \pmod 3$. Entretanto, o Teorema 6 afirma que existe partição dominante independente de cardinalidade dois. Concluímos que $id(G) = 2$ neste caso. □

### 3.1 Observações finais

Seja $G := C_m \times C_n$, com $m, n \geq 3$. Este trabalho determinou *id(G)* para $m = 4$. Uma continuidade natural deste trabalho é considerar casos em que $m > 4$. Ressaltamos que algumas propriedades estruturais válidas para $m = 4$ não são generalizáveis. Em particular o limitante inferior para um conjunto dominante independente proposto no Lema 5.

## Referências


[1] O. Ore. Theory of graphs. *In American Mathematical Society Colloquium Publications* volume XXXVIII. American Mathematical Society, 1962.

[2] Teresa W. Haynes, Michael A. Henning, Lucas C. van der Merwe, Anders Yeo. On the existence of $k$-partite or $k_p$-free total domination edge-critical graph. *Discrete Mathematics*, Volume 311, Issue 13, Pages 1142-1149, 2011.

[3] Michael A. Henning, Lucas C. van der Merwe. The maximum diameter of total domination edge-critical graphs. *Discrete Mathematics*, Volume 312, Issue 2, Pages 397-404, 2012.

[4] H. Karami, S. M. Sheikholeslami, Abdollah Khodkar, Douglas B. West. Connected Domination Number of a Graph and its Complement. *Graphs and Combinatorics*, pages 123-131, 2012. Article in Press.

[5] Michael A. Henning, Anders Yeo. Girth and Total Domination in Graphs. *Graphs and Combinatorics*, pages 199-214, 2012. Article in Press.

[6] Xue-gang Chen, Moo Young Sohn. Domination Number of Graphs Without Small Cycles. *Graphs and Combinatorics*, pages 821-830, 2011. Article in Press.

[7] S. Klavzar, G. Mekis On idomatic partitions of direct products of complete graphs. *Graphs and Combinatorics*, pages 1-14, 2011. Article in Press.