

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

**Subdivisão Econômica 3-Colorível
de uma Triangulação Esférica**

Lucas Moutinho Bueno *Jorge Stolfi*

Technical Report - IC-12-29 - Relatório Técnico

December - 2012 - Dezembro

The contents of this report are the sole responsibility of the authors.
O conteúdo do presente relatório é de única responsabilidade dos autores.

Subdivisão Econômica 3-Colorível de uma Triangulação Esférica

Lucas Moutinho Bueno (lucas.bueno@students.ic.unicamp.br)

Jorge Stolfi (stolfi@ic.unicamp.br)

13 de dezembro de 2012

Resumo

Descrevemos um algoritmo para subdividir uma triangulação arbitrária da esfera de modo a produzir uma triangulação que é colorível nos vértices com três cores. (Triangulações 3-coloríveis podem ser eficientemente representadas e manipuladas pela estrutura de dados “gema” de Montagner e Stolfi.) A solução usual para este problema é a subdivisão baricêntrica, que produz $6n$ triângulos quando aplicada a uma triangulação com n faces. Nosso algoritmo elimina todos os vértices de grau ímpar (que são os únicos obstáculos para 3-coloração) aos pares, bissectando apenas alguns triângulos de cada vez. Embora nosso algoritmo tenha apenas um limitante superior de pior caso exponencial, espera-se que ele produza entre n e $2n$ triângulos em casos típicos.

Abstract

We describe an algorithm to subdivide an arbitrary triangulation of the sphere to produce a triangulation that is vertex-colorable with three colors. (Three-colorable triangulations can be efficiently represented and manipulated by the “gem” data structure of Montagner and Stolfi.) The standard solution to this problem is the barycentric subdivision, which produces $6n$ triangles when applied to a triangulation with n faces. Our algorithm eliminates all vertices of odd degree (which are the only obstacles to 3-colorability) in pairs, by bisecting only a few triangles at a time. While our algorithm has an exponential worst-case upper bound, it is expected to produce between n and $2n$ triangles in typical cases.

Sumário

1	Introdução	3
2	Definições básicas	3
2.1	Triangulações	3
2.2	Caminhos duais	4
2.3	Correntes redutoras	4
3	Caso de dois vértices ímpares	5
4	Caso com diversos vértices ímpares	9
5	Conclusões	10

1 Introdução

Nosso objetivo é encontrar um algoritmo econômico para transformar uma triangulação bidimensional arbitrária em uma triangulação 3-colorível, pela divisão de alguns triângulos. (Triangulações 3-coloríveis podem ser representadas pela estrutura de dados *gema* [6, 3], que é muito fácil de implementar e manipular.) Neste artigo vamos considerar apenas o caso de triangulações da esfera.

Sabe-se que uma triangulação da esfera é 3-colorível se e somente se todo vértice tem grau par [2]. Portanto, nosso objetivo será dividir triângulos de modo a deixar todos os vértices com grau par.

Há uma maneira simples de obter esse resultado, que é usar a *subdivisão baricêntrica* de todos os triângulos [6]. Neste processo cada face é dividida em 6 triângulos; o grau de cada vértice dobra, e são criados novos vértices de grau 4 ou 6. Porém, em muitos casos é possível resolver o problema dividindo apenas alguns dos triângulos e/ou dividindo-os em menos do que seis partes.

No restante deste artigo vamos mostrar um algoritmo que resolve o problema e que divide, na prática e em média, cada face em bem menos que 6 triângulos. A idéia é encontrar um conjunto especial de triângulos que une dois vértices de grau ímpar e dividir esses triângulos ao meio, de modo a deixar esses dois vértices com grau par, sem criar novos vértices de grau ímpar. Esse processo é repetido até eliminar todos vértices de grau ímpar.

Supomos que o leitor deste artigo conhece conceitos básicos de Teoria dos Grafos [1]. Em particular, usaremos a notação $d_G(x)$ para o grau de um vértice ou face x em um desenho de grafo G , e G^* para o desenho dual de G .

2 Definições básicas

2.1 Triangulações

Definição 1. *Uma triangulação esférica (ou simplesmente triangulação) é um desenho T na esfera bidimensional \mathbb{S}^2 de um grafo biconexo em que todas faces têm grau três (são triângulos).*

Observações:

- Uma triangulação esférica é essencialmente um desenho no plano de um grafo biconexo cujas faces, incluindo a externa, tem todas grau três.
- Por ser um grafo biconexo, uma triangulação não pode ter laços, embora possa ter arestas paralelas.
- Ainda pelo mesmo argumento, todos os cantos de uma mesma face são vértices distintos, todos os lados de uma mesma face são arestas distintas, e toda aresta separa duas faces distintas.

Definição 2. *O enlace de um vértice $v \in V(T)$ em é a trilha fechada $L_T(v)$, formada pelos vértices adjacentes a v e pelas arestas dos triângulos incidentes a v que são opostas a v , tomadas na ordem em que as arestas e triângulos ocorrem em torno de v .*

Definição 3. A estrela de um vértice $v \in V(T)$ é a sequência cíclica alternada $S_T(v)$ dos triângulos e arestas de T incidentes a v , na ordem em que eles ocorrem em torno de v .

Observe que o enlace pode repetir vértices e arestas, e portanto não é necessariamente um circuito; já a estrela não pode repetir nem triângulos nem arestas, e é portanto um circuito na triangulação dual. Tanto no enlace quanto na estrela, o início e o sentido de percurso são arbitrários e não afetam seu uso neste artigo.

O vértice inicial e sentido de percurso da trilha fechada são arbitrários e não afetam seu uso neste artigo.

2.2 Caminhos duais

Observamos que o dual de uma triangulação esférica T , denotado por T^* , é um desenho de um grafo na esfera cujos vértices tem todos grau 3.

Definição 4. Um caminho dual em uma triangulação T é uma sequência alternante de n triângulos distintos e $n - 1$ arestas $(t_1, e_1, t_2, e_2, \dots, e_{n-1}, t_n)$, tais que, para todo $1 \leq i \leq n - 1$, os triângulos t_i e t_{i+1} compartilham a aresta e_i .

Veja a Figura 1(a). Um caminho dual é essencialmente um caminho no grafo dual T^* . Note que dois triângulos t_i e t_j do caminho dual podem compartilhar outras arestas e/ou vértices além dos implicados pela definição.

Definição 5. Dizemos que um vértice v é um extremo de um caminho dual $D = (t_1, e_1, t_2, e_2, \dots, e_{n-1}, t_n)$, se ele for o canto de t_1 oposto a e_1 (extremo inicial), ou o canto de t_n oposto a e_{n-1} (extremo final). Em particular, se $n = 1$, quaisquer dois vértices de t_1 são considerados extremos (iniciais ou finais) de D .

Proposição 1. Seja $D = (t_1, e_1, t_2, e_2, \dots, e_{n-1}, t_n)$ um caminho dual em uma triangulação T . Seja x um vértice incidente em t_1 e y um vértice incidente em t_n . Existe um sub-caminho dual $E = (t_i, e_i, t_{i+1}, e_{i+1}, \dots, e_{j-1}, t_j)$ de D , com $1 \leq i \leq j \leq n$, que tem extremo inicial x e extremo final y .

Demonstração. Prova-se por indução no número n de triângulos de D . Para $n = 1$, a proposição é verdadeira por definição de extremo de caminho dual. Para $n \geq 2$, se x não é vértice extremo de D então ele não é oposto a aresta e_1 ; nesse caso ele é extremo de e_1 e, portanto, incidente também a t_2 . Uma observação análoga vale para y e t_n . \square

2.3 Correntes redutoras

Definição 6. Uma corrente de triângulos é uma sequência de $2n > 0$ triângulos distintos alternados com $n + 1$ vértices e n arestas

$$(v_0, s_1, e_1, t_1, v_1, \dots, v_{n-1}, s_n, e_n, t_n, v_n)$$

tal que, para todo $1 \leq i \leq n$, os triângulos s_i e t_i compartilham a aresta e_i , e os vértices v_{i-1} e v_i de, respectivamente, s_i e t_i , são ambos opostos a e_i . Dizemos que v_0 e v_n são os vértices extremos da corrente (inicial e final).

Observação. Uma corrente de triângulos pode ter pares de triângulos que compartilham arestas e vértices além daqueles exigidos na definição. Por exemplo, é possível o triângulo t_k compartilhar uma aresta com s_{k+1} para algum $1 \leq k \leq n - 1$.

Definição 7. Uma corrente redutora de triângulos é uma corrente de triângulos cujos vértices extremos têm grau ímpar.

Veja a Figura 1(b). As correntes redutoras nos permitem reduzir o número de vértices de grau ímpar, dividindo cada triângulo em dois. Especificamente:

Definição 8. Seja $C = (v_0, s_1, e_1, t_1, v_1, \dots, v_{n-1}, s_n, e_n, t_n, v_n)$ uma corrente de triângulos em T . O corte de C consiste nas seguintes operações, para cada $1 \leq i \leq n$:

1. Divida a aresta e_i em duas, inserindo um novo vértice u_i ;
2. Adicione duas arestas, ligando u_i aos vértices v_{i-1} e v_i , através de s_i e t_i , respectivamente.

Veja a Figura 1(c). Esta operação substitui cada par (s_i, t_i) por quatro triângulos. Ela inverte a paridade dos vértices extremos da corrente, mantém a paridade dos demais vértices de T e adiciona n vértices de grau 4. Portanto, o corte de uma corrente redutora de triângulos diminui a quantidade de vértices ímpares da triangulação em dois.

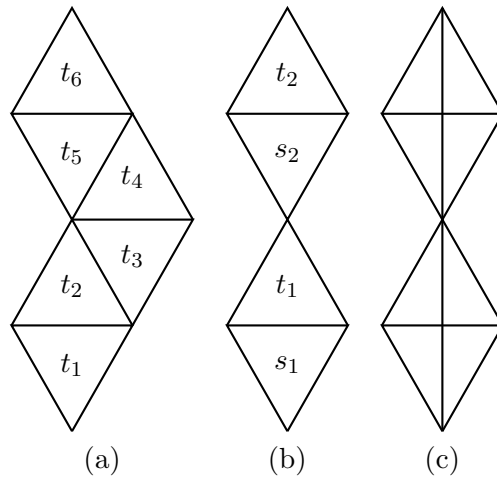


Figura 1: Um caminho dual de uma triangulação (a), uma corrente de triângulos (b) e o resultado do corte da mesma (c).

3 Caso de dois vértices ímpares

Vamos agora demonstrar que, se uma triangulação esférica tem apenas dois vértices de grau ímpar, então existe uma corrente redutora que os liga. Para isto, vamos necessitar do seguinte resultado:

Lema 1. *Não existe triangulação esférica com exatamente dois vértices ímpares, em que tais vértices têm vizinho em comum v e distância ímpar em $L_T(v)$.*

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que a afirmação não seja verdadeira. Seja então T um contra-exemplo com menor número n de vértices. Ou seja, uma triangulação T na esfera bidimensional com exatamente dois vértices ímpares, x e y , em que x e y têm vizinho em comum v e distância ímpar em $L_T(v)$.

O grau de v é par. Se $d_T(v) = 2$, então podemos remover v e os dois triângulos adjacentes a ele e juntar seus vizinhos por uma única aresta e' , conforme a Figura 2. O desenho resultante T' continua biconexo, e todas as demais faces de T continuam presentes em T' , com o mesmo grau que em T ; portanto T' é uma triangulação esférica, com com $n - 1$ vértices. A paridade de todos vértices restantes se mantém, e x e y continuam com um vértice em comum u e distância ímpar em $L_{T'}(u)$. Isto contradiz a suposição de que T era um contra-exemplo mínimo.

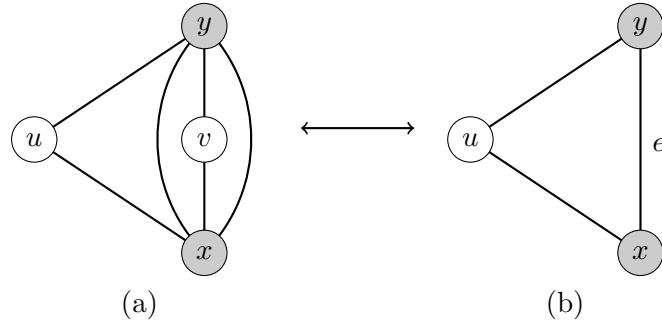


Figura 2: Caso em que o vizinho comum v de x e y tem grau 2.

Se o grau de v for maior que 2, tem que ser pelo menos 4. Seja

$$(u_1, e_1, u_2, e_2, \dots, u_m, e_m, u_{m+1})$$

o enlace de v , com $u_1 = u_{m+1}$. Cada vértice u_i deve ser distinto do vértice seguinte u_{i+1} , caso contrário e_i seria um laço. Pela planaridade de T , os dois vértices ímpares não podem se alternar em todo enlace, então pelo menos um dos vértices u_i tem grau par.

Concluimos então que existe um vértice par u que é vizinho a v e vizinho a x ou a y . Temos que considerar dois casos: u ocorre apenas uma vez no enlace, ou mais de uma vez.

No primeiro caso, podemos supor, sem perda de generalidade, que $x = u_1$ e $u = u_2$. Seja $z = u_3$; como a distância entre x e y no enlace é ímpar, concluimos que $z \neq y$. Construimos um desenho de grafo T' eliminando as arestas que ligam v a x e a z e contraindo a aresta e' que liga v a u . Veja a Figura 3.

Seja u' o vértice de T' resultante da contração da aresta e' . O desenho T' também é uma triangulação esférica (como u é distinto dos demais vértices de $L_T(v)$, nenhuma das arestas incidentes a u' torna-se um laço em T'). O grau de u' é par ($d_{T'}(u') = d_T(u) + d_T(v) - 4$) e os graus de x e z são decrementados em 1. Portanto T' também tem dois vértices ímpares: z e y se $x \neq z$, ou x e y se $x = z$. Nos dois casos, esses dois vértices ímpares tem o vizinho

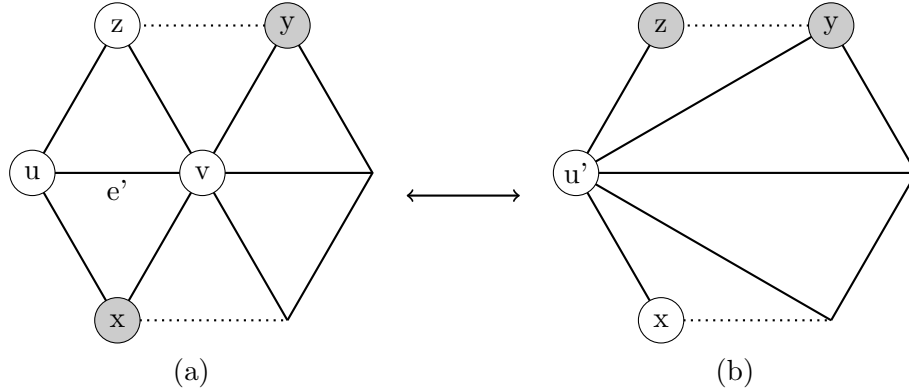


Figura 3: Caso em que o vizinho comum v de x e y tem grau maior ou igual a 4. Vértice u não se repete em $L_T(v)$.

par u' em comum, e a distância entre eles no enlace de u' é ímpar. Mas T' tem $n - 1$ vértices, contrariando a suposição de que T era o contra-exemplo mínimo.

Vamos agora considerar o caso em que o vértice u aparece mais de uma vez em $L_T(v)$. Sejam e e f duas arestas distintas que ligam v a u . Seja T' o desenho do grafo obtido a partir de T eliminando-se todos os vértices e arestas de T que estão em um dos lados do circuito $K = (v, e, u, f, v)$, bem como a aresta e ; e T'' o desenho obtido eliminando-se os elementos do outro lado do circuito K , bem como a aresta f . Veja a Figura 4.

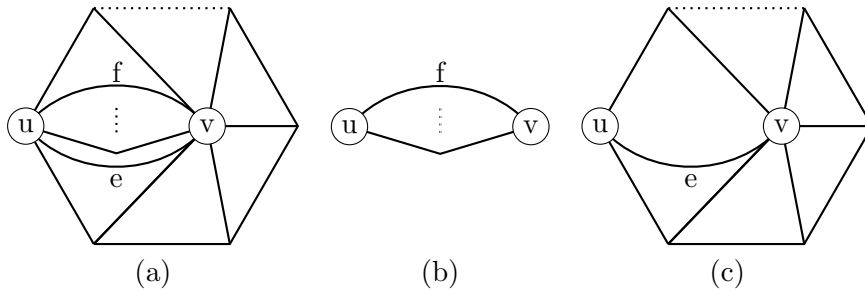


Figura 4: Caso em que vértice u se repete em $L_T(v)$: triangulações esféricas T' (b) e T'' (c) são obtidas a partir de T (a).

Os dois desenhos são triangulações esféricas, e todos seus vértices, exceto u e v , tem o mesmo grau que tinham em T . Além disso, $d_{T'}(u) + d_{T''}(u) = d_T(u)$, portanto u tem a mesma paridade em T' e T'' ; e o mesmo vale para v .

Temos dois sub-casos: os vértices ímpares originais x e y são separados pelo circuito K , ou não. No primeiro sub-caso, digamos que x está em T' e y em T'' ; como a soma dos graus de todos os vértices deve ser par, exatamente um dos dois vértices u ou v deve ser ímpar em T' . Nesse caso, T' tem dois vértices ímpares (x e u , ou x e v) vizinhos entre si.

No segundo sub-caso, digamos que x e y estão em T' . Os vértices u e v devem ser ambos pares em T' , ou ambos ímpares. Se u e v forem ambos pares, então T' tem dois vértices ímpares (x e y) com o vizinho par comum v e distância ímpar no enlace de v . Se u e v

forem ambos ímpares em T' , então eles também são ímpares em T'' ; portanto T'' tem dois vértices ímpares vizinhos.

Observe que uma triangulação esférica com exatamente dois vértices ímpares vizinhos seria um contra-exemplo para o lema. Portanto, nos dois sub-casos acima, obtemos um contra-exemplo, T' ou T'' . Mas as duas arestas e e f não podem ser consecutivas em $L_T(v)$, pois vértices consecutivos do enlace são distintos. Assim, T' e T'' tem no máximo $n - 1$ vértices, o que contradiz a suposição de T ser mínimo. \square

Proposição 2. *O dual de uma triangulação esférica é um grafo biconexo.*

Demonstração. Como T é um desenho de grafo planar, seu dual T^* é conexo.

Seja t^* um vértice qualquer de T^* , isto é, o dual de uma face qualquer t de T . Para quaisquer dois vértices x^*, y^* de $T^* - t^*$ considere um caminho em T^* que os conecta. Se esse caminho não passa por t^* , ele também é caminho em $T^* - t^*$. Se ele passa por t^* , deve ser da forma $P \cdot (u^*, e^*, t^*, f^*, v^*) \cdot Q$, onde u^* e v^* são dois dos três vizinhos de t^* ; e^* e f^* são as arestas de T^* que ligam u^* a t^* e t^* a v^* , respectivamente.

Seja s^* a face de T^* incidente a t^* , e^* e f^* ; isto é, o dual do vértice s de t incidente às arestas e e f . Os vértices na fronteira da face s^* em T^* correspondem aos triângulos incidentes a s em T . Como esses triângulos são todos distintos, a fronteira de s^* pode ser escrita na forma $R \cdot (v^*, f^*, t^*, e^*, u^*)$ onde R é um caminho em T^* de u^* para v^* que não passa por t^* . Logo $P \cdot R \cdot Q$ é um caminho em $T^* - t^*$ de x^* para y^* .

Concluimos que $T^* - t^*$ é conexo para qualquer vértice t^* , e portanto T^* não tem vértice de corte. Além disso, como o dual de uma aresta de corte é um laço, concluimos que T^* também não tem arestas de corte. \square

Proposição 3. *Sejam u, v, x, y vértices de uma triangulação esférica T com $\{x, y\}$ disjuntos de $\{u, v\}$. Existem pelo menos dois caminhos duais totalmente disjuntos em T com extremos iniciais x e y e com extremos finais u e v (mas não necessariamente nessa ordem).*

Demonstração. Sejam t_x e t_y dois triângulos distintos incidentes a x e y , respectivamente (observe que esses triângulos existem mesmo que x e y sejam o mesmo vértice). Sejam t_u e t_v dois triângulos distintos incidentes a u e v , respectivamente. Considere o grafo dual T^* de T . Pela Proposição 2 não existe vértice de corte em T^* . Portanto, pelo teorema de Menger [5, 4], existem dois caminhos D' e D'' disjuntos nos vértices e arestas de T^* com inícios em t_x e t_y e términos em t_u e t_v .

Ou seja, temos dois caminhos duais de T que são disjuntos nos triângulos e arestas, cujos triângulos iniciais incidem em x e y , e cujos triângulos finais incidem em u e v . Pela Proposição 1, existem sub-caminhos E' e E'' de D' e D'' , também disjuntos nos triângulos e arestas, com extremos iniciais x e y e extremos finais u e v . \square

Corolário 1. *Sejam x, v dois vértices distintos de uma triangulação esférica T . Existem pelo menos dois caminhos duais totalmente disjuntos em T com extremo inicial x e extremo final y .*

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 3 com $y = x$ e $u = v$. \square

Corolário 2. *Sejam x, y, v vértices distintos de uma triangulação esférica T . Existem pelo menos dois caminhos duais totalmente disjuntos em T com extremos iniciais x e y e extremo final comum v .*

Demonstração. Basta aplicar a Proposição 3 com $u = v$. \square

Proposição 4. *Qualquer caminho dual $D = (t_1, e_1, \dots, e_{n-1}, t_n)$ de $n \geq 2$ triângulos contém uma corrente de triângulos C cujo extremo inicial coincide com o extremo inicial de D , e cujo o extremo final é um dos três cantos de t_n .*

Demonstração. Usamos indução no número de triângulos do caminho dual. Sejam x e y os extremos inicial e final de D . Como $n \geq 2$, podemos formar uma corrente $K = (x, t_1, e_1, t_2, v)$ onde v é o canto de t_2 oposto a e_1 . Se $n = 2$ ou $n = 3$, esta corrente K satisfaz o enunciado, pois v será canto de t_n . Para $n \geq 4$, considere o sub-caminho $D' = (t_3, e_3, \dots, e_{n-1}, t_n)$. Note que t_3 é incidente a v . Pela proposição 1, existe um sub-caminho E' de D' com extremo inicial v e o mesmo extremo final de D' . Se E' tem apenas um triângulo t_n , então v é incidente a t_n , e a corrente K satisfaz o enunciado. Se E' tem dois ou mais triângulos, por indução ele contém uma cadeia C' com extremo inicial v e extremo final incidente a t_n , que não inclui nem t_1 nem t_2 . Nesse caso a concatenação de K e C' é uma corrente que satisfaz o enunciado. \square

Lema 2. *Qualquer triangulação esférica T em com exatamente dois vértices ímpares possui pelo menos uma corrente redutora de triângulos.*

Demonstração. Sejam x e y os dois vértices ímpares de T . Pelo Lema 1, x e y não podem ser adjacentes.

Como T é biconexo e x e y não são adjacentes, existe um caminho dual de $n \geq 2$ triângulos $(t_1, e_1, \dots, e_{n-1}, t_n)$ com um extremo em x e outro em y . Pela Proposição 4, existe uma corrente de triângulos C com um extremo em x e outro em um canto v de t_n . Se $v = y$, resolvemos o problema. Senão, v é adjacente a y e o corte de C produz uma triangulação T' com exatamente dois vértices ímpares vizinhos v e y , contrariando o Lema 1. \square

4 Caso com diversos vértices ímpares

Teorema 1. *Qualquer triangulação esférica T com um número arbitrário de vértices ímpares possui alguma corrente redutora de triângulos.*

Demonstração. Se o número de vértices ímpares for 2, usamos o Lema 2 como prova.

Se o número de vértices ímpares for maior que dois então sejam v, x e y três vértices ímpares distintos de T . Pelo Corolário 2 existem caminhos duais D' com extremos x e v , e D'' com extremos y e v , disjuntos nos triângulos e arestas. Seja $E' = (t'_1, e'_1, \dots, e'_{n-1}, t'_n)$

o menor caminho dual contido em D' com os mesmos extremos x e v . Analogamente, seja E'' o caminho dual contido em D'' com os mesmos extremos y e v . Verifica-se que nenhum triângulo de E' e E'' , exceto t'_n e t''_m , é incidente a v .

Pela Proposição 4, existem duas correntes de triângulos, C' e C'' : a primeira contida em E' , com extremo inicial x e extremo final em um canto u' de t'_n , e a segunda contida em E'' , com extremo inicial y e extremo final em um canto u'' de t''_m .

Se $u' = v$ ou $u'' = v$, então C' ou C'' , respectivamente, satisfaz o enunciado. Caso contrário, u' e u'' são adjacentes a v . Como v é ímpar, podemos construir uma corrente $K = (u', s_1, e_1, t_1, \dots, s_k, e_k, t_k, u'')$ contida em $S_T(v)$, em um dos dois sentidos (veja Figura 5). Portanto, a concatenação de C' , K e o inverso de C'' é uma corrente redutora entre x e y .

□

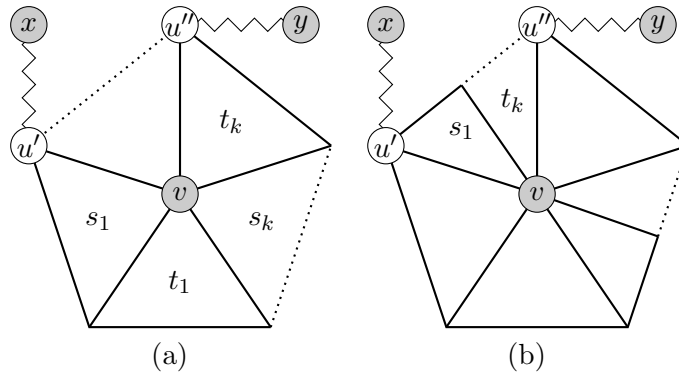


Figura 5: correntes redutoras de triângulos entre vértices u' e u'' : pela direita de u' (a) e pela sua esquerda (b).

5 Conclusões

Os resultados acima sugerem um algoritmo para eliminar vértices ímpares de uma triangulação esférica T , sem recorrer à subdivisão baricêntrica. Enquanto houver vértices ímpares, a demonstração do Teorema 1 fornece uma corrente redutora, cujo corte elimina dois vértices ímpares.

É concebível que, no pior caso, a corrente inclua todos os triângulos da triangulação atual. Se isso acontecer em todas as iterações, o algoritmo produz uma triangulação com $2^k n$ faces, onde $2k$ é o número de vértices ímpares, e n o número de triângulos originais. Não sabemos se este limite pode ser atingido, nem mesmo para $k = 1$.

Por outro lado, se cada corrente incluir apenas triângulos originais de T , o resultado terá no máximo $n + p$ faces, onde p é o número total de triângulos nessas correntes; e $n + p \leq 2n$. Conjeturamos que, em aplicações práticas, o tamanho do resultado estará geralmente mais próximo deste limitante inferior do que do limitante superior acima.

Há muitas escolhas envolvidas na aplicação do Teorema 1 e dos lemas que ele usa. Essas escolhas poderiam ser aproveitadas por heurísticas com o objetivo de reduzir o número de triângulos cortados a cada iteração. Por exemplo, na prova do Teorema 1, podemos escolher três vértices ímpares x , y e v que estejam próximos no desenho dual T^* .

Se a triangulação original T é desenhada no plano com arestas retilíneas, o algoritmo descrito acima produz outra triangulação com arestas retilíneas.

Referências

- [1] Gary Chartrand. *Introductory Graph Theory*. Dover Publications, Inc., 1985.
- [2] Krzysztof Diks, Lukasz Kowalik, and Maciej Kurowski. A new 3-color criterion for planar graphs. In *28th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, pages 138–149. Springer-Verlag, 2002.
- [3] Sóstenes Lins and Arnaldo Mandel. Graph-encoded 3-manifolds. *Discrete Mathematics*, 57(3):261–284, 1985.
- [4] William McCuaig. A simple proof of menger’s theorem. *Journal of Graph Theory*, 8(3):427–429, 1984.
- [5] K. Menger. Zur allgemeinen kurventheorie. *Fund. Math*, 10(95-115):5, 1927.
- [6] Arnaldo Jovanini Montagner and Jorge Stolfi (orientador). A estrutura de dados gema para representação de mapas n-dimensionais. *Dissertação de mestrado - IC/Unicamp*, 2007.