

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

A Classe de Grafos PI

Sheila Morais de Almeida

Célia Picinin de Mello Anamaria Gomide

Technical Report - IC-04-014 - Relatório Técnico

December - 2004 - Dezembro

The contents of this report are the sole responsibility of the authors.
O conteúdo do presente relatório é de única responsabilidade dos autores.

A Classe de Grafos PI

Sheila Moraes de Almeida* Célia Picinin de Mello† Anamaria Gomide ‡

Resumo

Neste trabalho mostramos que a representação de um grafo PI, grafo interseção de triângulos entre duas retas paralelas, que não é grafo de intervalo contém um triângulo obtusângulo. Além disso, classificamos os grafos da família de Gallai que são PI.

Abstract

In this work we show that a triangle representation of a PI graph that is not interval graph must contains a obtuse triangle. We also classify the graphs of the Gallai family that are PI graphs.

1 Introdução

Seja \mathcal{F} uma família de conjuntos. Pode-se associar a \mathcal{F} um grafo, G , da seguinte forma: cada conjunto de \mathcal{F} corresponde a um vértice de G e existe uma aresta ligando dois vértices em G se, e somente se, os conjuntos correspondentes a estes vértices se intersectam. O grafo G é chamado *grafo interseção* da família \mathcal{F} . Como todo grafo simples é grafo interseção de alguma família de conjuntos [7], várias classes conhecidas de grafos foram definidas considerando famílias com estruturas especiais. Se \mathcal{F} for, por exemplo, uma família de intervalos linearmente ordenados da reta real, o grafo interseção de \mathcal{F} é um *grafo de intervalo*. Considere duas retas paralelas r_1 e r_2 . Se \mathcal{F} for uma família de segmentos de reta com extremos em r_1 e r_2 , o grafo interseção dos elementos de \mathcal{F} é o *grafo permutação*. Em [5], Corneil e Kamula, generalizam a classe dos grafos permutação, permitindo que a família \mathcal{F} contenha triângulos com um lado em r_1 e um vértice em r_2 . O grafo interseção de \mathcal{F} é chamado *grafo PI* (Point-Interval). Note que PI é, também, uma generalização dos grafos de intervalo.

Sabe-se que os grafos de intervalo são reconhecidos por algoritmos lineares [2]. Além disso, uma superclasse dos PI, os *grafos trapezóide*, que são grafos interseção de trapézios entre duas retas paralelas, também possuem algoritmos polinomiais para o seu reconhecimento [4]. Entretanto, reconhecer um grafo PI é um problema aberto [3].

Outra superclasse dos grafos PI é a classe dos grafos de *co-comparabilidade*, grafos cujo complemento é de comparabilidade. Os *grafos de comparabilidade* são aqueles que admitem

*sheila.almeida@ic.unicamp.br; bolsista de Mestrado CAPES

†celia@ic.unicamp.br; apoio CNPQ/307856/2003-8

‡anamaria@ic.unicamp.br

uma orientação transitiva em suas arestas. Esta classe foi caracterizada por Gallai [6] através de uma família de grafos proibidos, a família de Gallai.

Na seção 2, encontram-se conceitos necessários para as demais seções. Na seção 3, identifica-se uma subclasse dos PI obtida restringindo os triângulos da família \mathcal{F} a triângulos não obtusângulos. Na seção 4, classificam-se os grafos da família de Gallai em relação à pertinência às classes de co-comparabilidade e PI.

Em [1], encontram-se os conceitos básicos da teoria dos grafos não definidos neste trabalho.

2 Preliminares

Inicialmente descreveremos as relações e os conceitos necessários para o desenvolvimento das seções posteriores.

Sejam r_1 e r_2 duas retas paralelas. Chamaremos de *representação PI*, toda a representação onde os vértices de um grafo G são triângulos com um lado em r_1 e um vértice em r_2 ou segmentos de reta com extremos em r_1 e r_2 .

Uma característica da classe PI é a sua hereditariedade. Se G é PI, então G tem uma representação PI, R . A representação R' de um subgrafo induzido G' construída a partir de R , retirando-se os elementos (segmentos de reta ou triângulos) de R que correspondem a vértices que não pertencem a G' é, claramente, uma representação PI de G' e, sendo assim, G' é PI. Portanto, vale o seguinte lema:

Lema 2.1 *Sejam G um grafo PI e G' um subgrafo induzido por qualquer subconjunto de vértices de G . O grafo G' é PI.*

Apresentaremos a seguir relações dos grafos PI com algumas classes de grafos conhecidas e amplamente estudadas. Para tanto, duas classes precisam ser definidas: os grafos sem tripla asteroidal e os grafos fracamente cordais.

Três vértices distintos e dois a dois não adjacentes em um grafo formam uma *tripla asteroidal* quando para quaisquer dois deles existe um caminho que os liga e não passa pela vizinhança do terceiro. Um grafo que não admite tripla asteroidal é chamado *grafo sem tripla asteroidal* (STA).

Um grafo é *fracamente cordal* quando não contém C_n , $n > 4$, como subgrafo induzido.

Em [4] e [5] encontramos as relações de continência entre algumas subclasses e superclasses dos grafos PI. O conjunto dos grafos de cada classe é representado pelo seu nome.

$$\text{Intervalo} \subset \text{PI} \subset \text{Trapezóide} \subset \text{Co-comparabilidade} \quad (1)$$

$$\text{Trapezóide} \subset \text{Fracamente cordal} \quad (2)$$

$$\text{Trapezóide} \subset \text{STA} \quad (3)$$

O teorema 2.2 exhibe uma caracterização dos grafos de intervalo através de uma família de subgrafos proibidos [7].

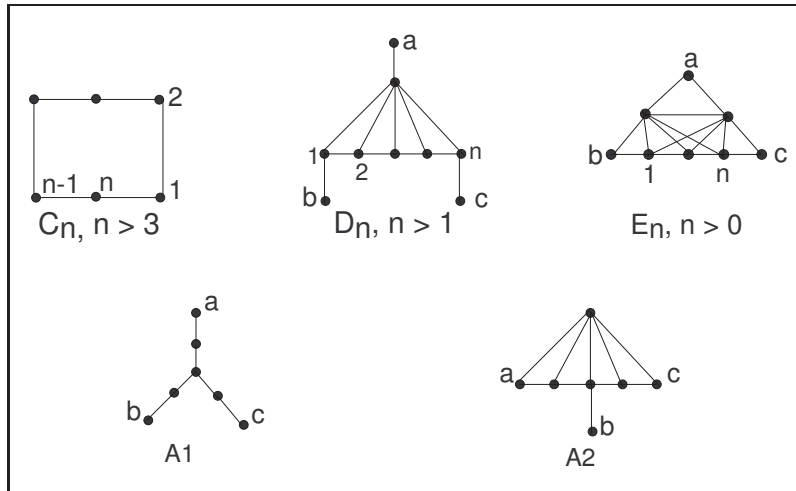


Figura 1: Grafos proibidos para a classe Intervalo

Teorema 2.2 *Um grafo é de intervalo se, e somente se, não contém nenhum dos grafos da figura 1 como subgrafo induzido.*

Em [6] Gallai apresentou a seguinte caracterização, por subgrafos proibidos, para os grafos de comparabilidade:

Teorema 2.3 *Um grafo é de comparabilidade se, e somente se, não contém um subgrafo induzido isomorfo a qualquer dos grafos da figura 2 ou a um dos complementos dos grafos da figura 3.*

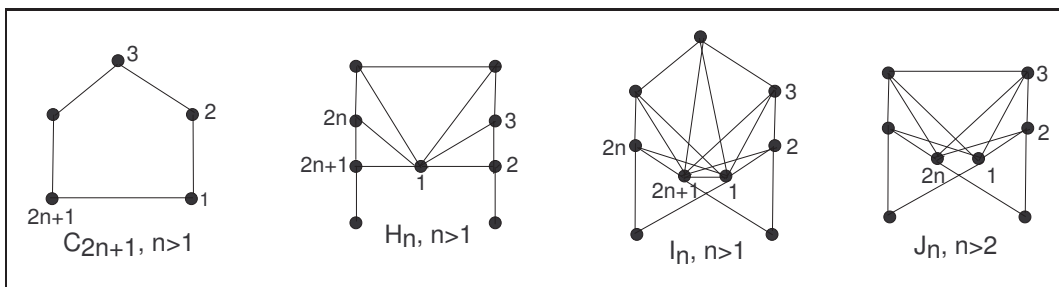


Figura 2: Grafos proibidos para comparabilidade.

Ao conjunto dos grafos apresentados na figura 2 e dos complementos dos grafos da figura 3 chamamos *família de Gallai*.

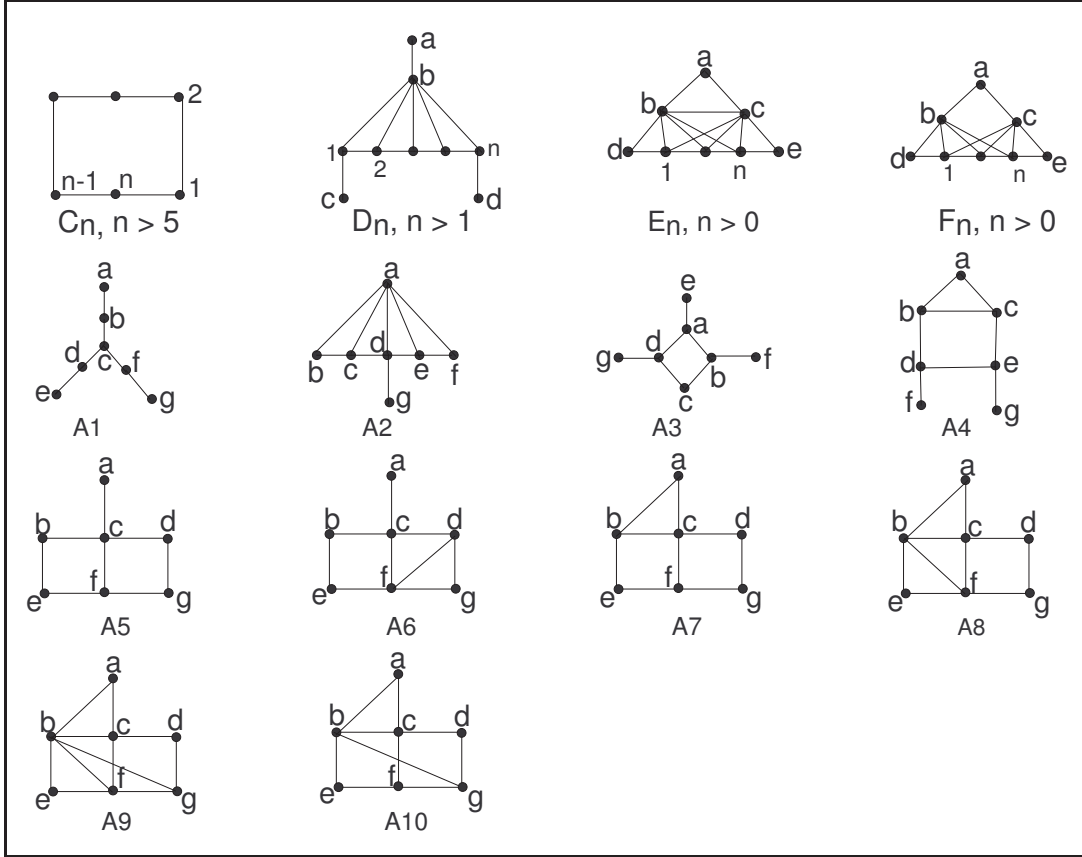


Figura 3: Complementos dos grafos proibidos para comparabilidade

3 PI-Especial

Uma restrição que pode ser imposta aos grafos PI é de que nenhum dos triângulos da representação PI seja obtusângulo.

Sejam duas retas paralelas r_1 e r_2 . O grafo interseção de uma família de triângulos não obtusângulos (TNOs) que possuem um vértice em r_2 e um lado em r_1 será chamado *grafo PI-especial*.

Teorema 3.1 *Um grafo G é PI-especial se, e somente se, G é grafo de intervalo.*

Prova Sejam G um grafo PI-especial e R uma representação de G através da interseção de TNOs entre duas retas paralelas r_1 e r_2 . Seja $T = PED$ um triângulo de R com vértice P em r_2 e vértices E e D em r_1 . Seja p a função projeção ortogonal sobre a reta r_1 . Note que a união das imagens $p(\overline{PE})$ e $p(\overline{PD})$ é o intervalo $[E, D]$ da reta r_1 . Dessa forma, p associa a cada TNO de R um intervalo \overline{ED} de tal forma que existe interseção entre dois intervalos se, e somente se, existe interseção entre seus respectivos TNOs. Isso ocorre porque a projeção dos lados de um TNO sobre r_1 está contida no intervalo $[E, D]$. Portanto, se T_x

e T_y são triângulos que se intersectam em R , os lados de T_x e T_y que estão sobre a reta r_1 se intersectam em pelo menos um ponto. Assim, os lados dos triângulos que estão sobre r_1 formam uma representação de G por intervalos. Logo, G é grafo de intervalo.

Sejam G um grafo de intervalo e R uma representação de G através da interseção de intervalos de uma reta r_1 . Construa uma reta r_2 paralela a r_1 . Para cada intervalo I de r_1 , sejam E e D seus extremos esquerdo e direito, respectivamente. Marque em r_2 um ponto P de tal forma que $p(\overline{PE}) \subset \overline{ED}$. Ligue os dois extremos E e D ao ponto P . Essa construção, se repetida para todos os intervalos de R , gera uma família de TNOs. Como a projeção de cada ponto P sobre r_1 é um ponto no intervalo $[E, D]$, as adjacências de G foram preservadas. Logo, G é um grafo PI-especial. \square

Uma conseqüência do teorema 3.1 é que a representação PI de um grafo que não é de intervalo contém um triângulo obtusângulo. Note que o segmento de reta que representa o vértice b do ciclo C_4 na figura 4 só pode ser substituído por um triângulo obtusângulo.

Teorema 3.2 *Se G é PI e não é grafo de intervalo, então G contém C_4 como subgrafo induzido.*

Prova Seja G um grafo PI que não é de intervalo. Pelo teorema 2.2, G contém algum grafo da figura 1 como subgrafo induzido. Mostraremos que dentre os grafos da figura 1, apenas C_4 é PI.

De fato, pelas relações de continência (1) e (2) temos que a família C_n , $n > 4$ não é PI, pois não é fracamente cordal. Pelas relações (1) e (3), todos os outros grafos da figura 1 não são PI, pois não são grafos STA (em cada grafo, a tripla asteroidal consiste dos vértices a , b e c). Finalmente, a figura 4 apresenta uma representação PI para o grafo C_4 .

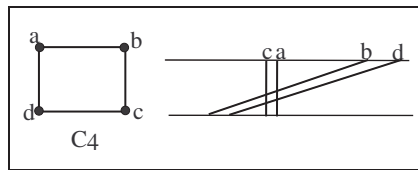


Figura 4: Uma representação PI do grafo C_4 .

\square

4 Família de Gallai \cap PI

Nesta seção, identificamos os grafos da família de Gallai que são de co-comparabilidade e, dentre estes, os que são PI. O teorema 4.1 descreve os grafos pertencentes à família de Gallai que são de co-comparabilidade.

Teorema 4.1 *Dentre os grafos da família de Gallai, os grafos H_n e I_n , $n > 1$, e J_n , $n > 2$, apresentados na figura 2 e aqueles cujo complemento está na figura 5 são de co-comparabilidade.*

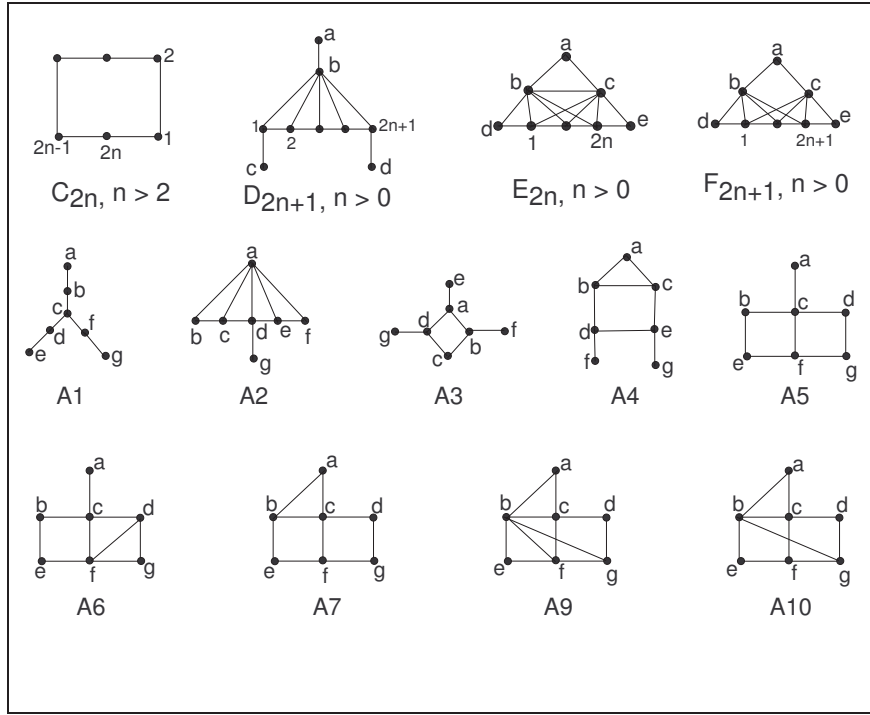


Figura 5: Grafos cujo complemento é de co-comparabilidade e pertence a família de Gallai.

Prova Primeiro, consideramos os grafos da figura 2.

- C_{2n+1} , $n \geq 2$: Os ciclos C_{2n+1} , $n \geq 2$, não são grafos de co-comparabilidade. pois não são perfeitos e, como sabemos, todo grafo de co-comparabilidade é perfeito [7].
- H_n e I_n , $n \geq 2$: Essas duas famílias pertencem á classe dos grafos de intervalo. Nas figuras 6 e 7 estão representações através da interseção de intervalos para os grafos dessas famílias, logo são grafos de intervalo. Portanto, pela relação de continência (1), H_n e I_n , $n \geq 2$, são grafos de co-comparabilidade.

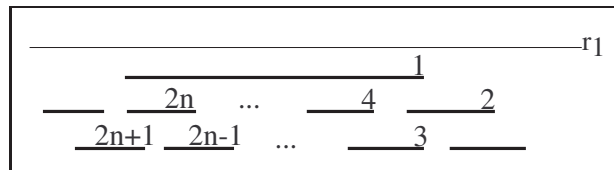


Figura 6: Representação da família H_n através da interseção de intervalos.

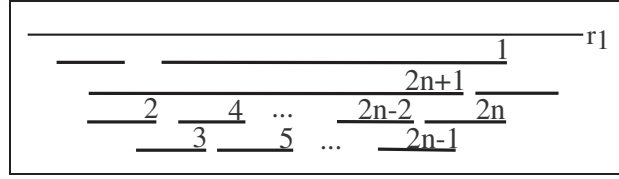


Figura 7: Representação da família I_n através da interseção de intervalos.

- $J_n, n \geq 3$: Os grafos da família $J_n, n \geq 3$, são grafos PI (figura 8). Novamente, pela relação de continência (1), os grafos $J_n, n \geq 3$, são grafos de co-comparabilidade.

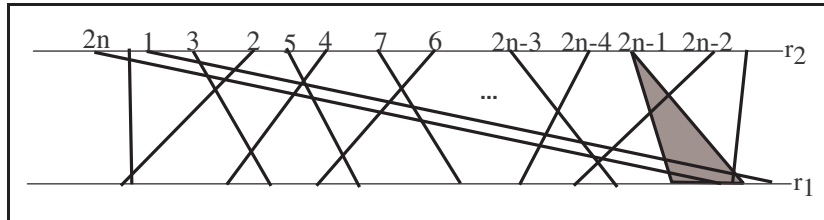


Figura 8: Representação PI da família J_n .

Portanto, da figura 2, apenas a classe $C_{2n+1}, n \geq 2$, é proibida para co-comparabilidade. Para decidir se os grafos cujo complemento aparece na figura 3, são de co-comparabilidade, basta verificar se os grafos dessa figura são de comparabilidade. Vejamos cada caso:

- $C_n, n \geq 6$: Pelo teorema 2.3, os ciclos $C_{2n+1}, n \geq 2$, são proibidos para comparabilidade. Seja $C_{2n}, n \geq 3$, um ciclo com vértices $\{1, \dots, 2n\}$ tal que i é adjacente a $i + 1, 1 \leq i < 2n$. A orientação de C_{2n} , tal que $2i, 1 \leq i \leq n$, é fonte e $2i + 1, 1 \leq i \leq n - 1$ é sumidouro, é uma orientação transitiva.

Portanto, $\overline{C_{2n+1}}, n \geq 2$ são proibidos para co-comparabilidade e $\overline{C_{2n}}, n \geq 3$, é uma família de grafos de co-comparabilidade.

- $D_n, n > 1$: Como $H_n, n > 1$ não é de comparabilidade e os grafos $D_{2n}, n > 1$, contêm $H_n, n > 1$ como subgrafo induzido (basta retirar o vértice a do grafo D_n da figura 3), pelo teorema 2.3, $D_{2n}, n > 1$, não são grafos de comparabilidade. Quanto ao grafo D_2 é fácil verificar que não é possível exibir uma orientação transitiva para suas arestas.

Agora, e no restante desse documento, uma aresta orientada de um vértice qualquer x para um vértice y será indicada pelo par ordenado $[x, y]$. Um grafo $D_{2n+1}, n \geq 1$ com os vértices rotulados como na figura 3, admite a seguinte orientação transitiva: $[a, b], [i, b]$ ($1 \leq i \leq 2n + 1$), $[1, c], [2n + 1, d]$ e o caminho $1, 2, \dots, 2n, 2n + 1$, orientado de forma que todos os vértices ímpares sejam fontes e os vértices pares sejam sumidouros.

Assim, a família $\overline{D_{2n}}, n \geq 1$, é proibida para co-comparabilidade e os grafos $\overline{D_{2n+1}}, n \geq 1$, são grafos de co-comparabilidade.

- $E_n, n \geq 1$: Os grafos $E_{2n+1}, n \geq 1$, contêm $I_{n+1}, n \geq 1$, como subgrafo induzido (basta retirar o vértice a do grafo E_n da figura 3) e, portanto, pelo teorema 2.3, não são grafos de comparabilidade. Quanto ao grafo E_1 , é fácil verificar que não existe uma orientação transitiva para suas arestas. Para os grafos $E_{2n}, n \geq 1$, se rotularmos os vértices como na figura 3, uma orientação transitiva pode ser feita orientando o caminho $1, 2, \dots, 2n$ de forma que todos os vértices pares sejam fontes, os ímpares sumidouros e as demais arestas orientadas da seguinte forma: $[d, 1], [2n, e], [i, b], [a, b], [d, b], [c, b], [c, e], [c, a], [c, i], 1 \leq i \leq 2n$.

Portanto, $\overline{E_{2n}}, n \geq 1$ é uma família de grafos de co-comparabilidade e $\overline{E_{2n+1}}, n \geq 0$, são grafos proibidos para co-comparabilidade.

- $F_n, n \geq 1$: Os grafos $F_{2n}, n \geq 2$, possuem $J_{n+1}, n \geq 2$ como subgrafo induzido, por isso e pelo teorema 2.3, não são grafos de comparabilidade. Quanto ao grafo F_2 é fácil verificar que não existe uma orientação transitiva para suas arestas. Uma possível orientação transitiva para a família $F_{2n+1}, n \geq 0$, (com os vértices de F_{2n+1} rotulados como na figura 3) é: $[a, b], [d, b], [a, c], [e, c], [i, b], [i, c], 1 \leq i \leq 2n + 1, [1, d], [2n + 1, e]$ e as arestas do caminho $1, 2, \dots, 2n, (2n + 1)$, orientadas de forma que os vértices ímpares sejam fontes e os pares sejam sumidouros.

Portanto, $\overline{F_{2n+1}}, n \geq 0$, é uma família de grafos de co-comparabilidade e $\overline{F_{2n}}, n \geq 1$, são grafos proibidos para co-comparabilidade.

- $A_i, 1 \leq i \leq 10, i \neq 8$: A figura 9 mostra uma orientação transitiva para cada um desses grafos. Portanto são grafos de comparabilidade e seus complementos são grafos de co-comparabilidade.

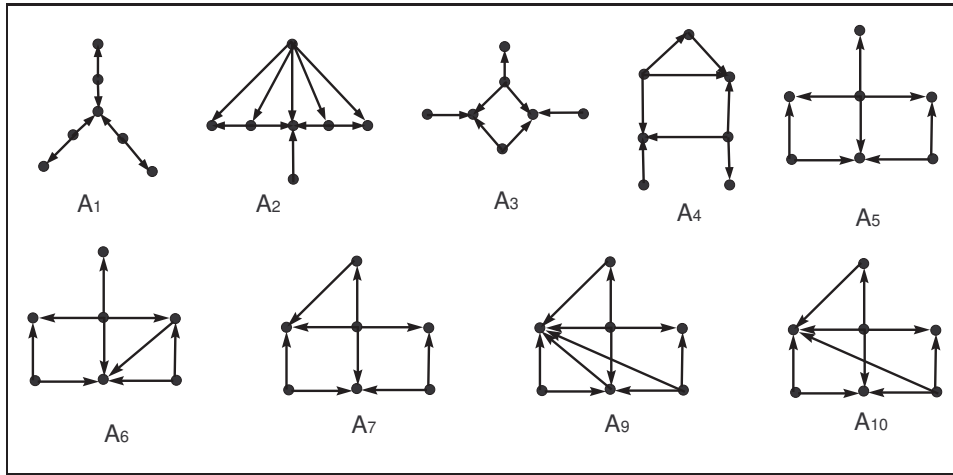


Figura 9: Orientações transitivas para os grafos A_1, \dots, A_7, A_9 e A_{10} .

- A_8 : O grafo A_8 é isomorfo ao grafo $\overline{F_2}$. Logo, pelo teorema 2.3, A_8 não é grafo de comparabilidade e $\overline{A_8}$ não é grafo de co-comparabilidade. \square

Dentre os grafos da família de Gallai que são de co-comparabilidade, podemos encontrar alguns grafos (ou algumas famílias de grafos) que são PI. O teorema 4.2 demonstra que $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$, são os únicos grafos de co-comparabilidade pertencentes à família de Gallai que são PI.

Teorema 4.2 *Todo grafo G que é de co-comparabilidade e pertence à família de Gallai é PI, exceto $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$.*

Prova Da demonstração do teorema 4.1, temos que J_n , $n > 2$, é PI (figura 8), H_n e I_n , $n > 1$ são grafos de intervalo (figuras 6 e 7), portanto, são PI.

Vamos analisar os grafos cujo complemento aparece na figura 5.

É conhecido que $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$, não é trapezóide [5]. Pela relação de continência (1), $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$, não é PI.

As figuras 10, 11 e 12 apresentam, representações PI das famílias $\overline{D_{2n+1}}$, $\overline{E_{2n}}$ e $\overline{F_{2n+1}}$, (respectivamente). Portanto os complementos de D_{2n+1} , E_{2n} e F_{2n+1} , com $n \geq 1$ em todos os casos, são grafos PI.

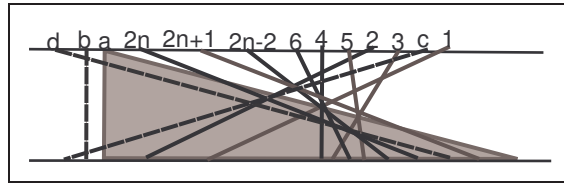


Figura 10: Uma representação PI da família $\overline{D_{2n+1}}$.

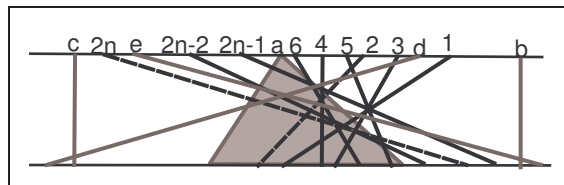


Figura 11: Uma representação PI da família $\overline{E_{2n}}$.

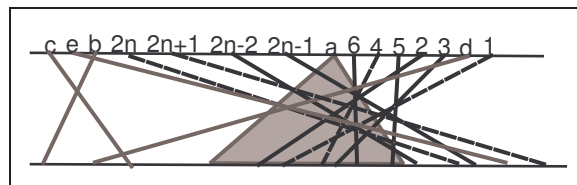


Figura 12: Uma representação PI da família $\overline{F_{2n+1}}$.

A figura 13 apresenta uma representação PI para os grafos $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_7}, \overline{A_9}$ e $\overline{A_{10}}$.

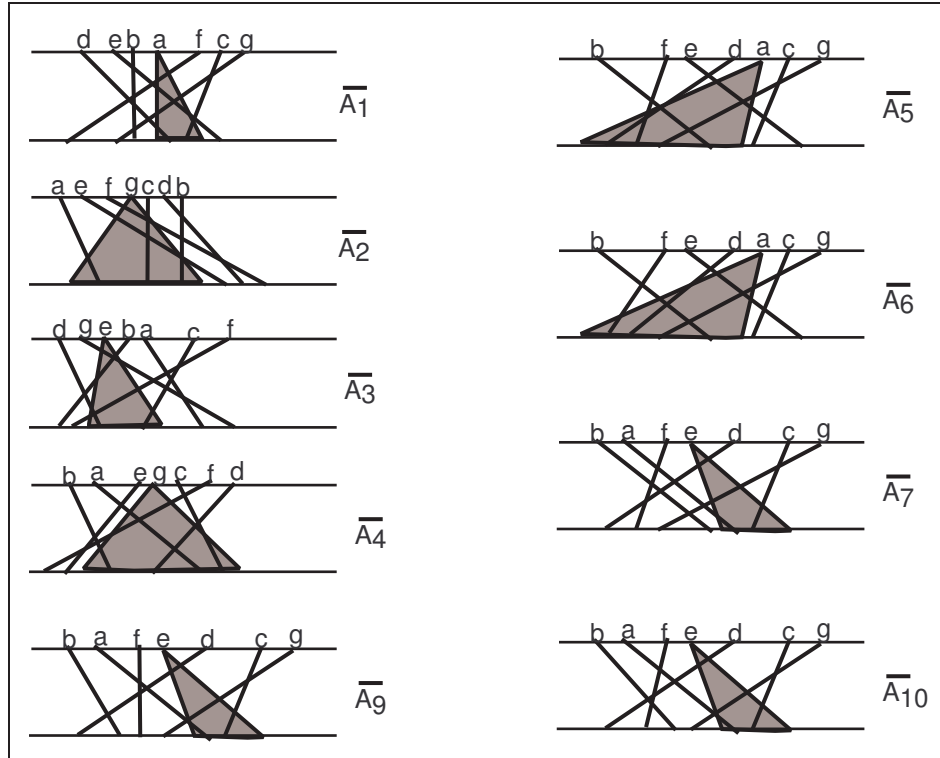


Figura 13: Uma representação PI para o complemento dos grafos $A_1..A_7, A_9$ e A_{10} .

Desta forma, concluímos que todos os grafos de co-comparabilidade que pertencem à família de Gallai são PI, exceto os grafos $\overline{C_{2n}}$, $n \geq 3$. \square

Referências

- [1] J.A. Bondy, U.S.R. Murty, "Graph Theory with Applications", American Elsevier, New York, 1979.
- [2] K.S. Booth, G.S. Lueker, Testing for the consecutive ones property, interval graphs and graph planarity using PQ-tree algorithms, *J. of Comp. and Syst. Sci.*, **13** (1976), 335-379.
- [3] A. Brandstädt, V. Le, J. Spinrad, "Graph Classes - a Survey", SIAM, Monographs on Discrete Math. and Applications, 1999.
- [4] F. Cheah, D. G. Corneil, On the structure of trapezoid graphs, *Discrete Applied Math.*, **66** (1996), 109-133.

- [5] D.J. Corneil, P. A. Kamula, Extensions of permutation and interval graphs, *Congressus Numerantium*, **58** (1987), 267-275.
- [6] T. Gallai, Transitiv Orientierbare Graphen, *Acta Math. Acad. Sci. Hung*, **18** (1967), 25-66.
- [7] M. C. Golumbic, "Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs", Academic Press, New York, 1980.