

INSTITUTO DE COMPUTAÇÃO  
UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

**Potências de ciclo e a  
Conjetura da Coloração Total**

*C. N. Campos      C. P. de Mello*

Technical Report - IC-04-001 - Relatório Técnico

February - 2004 - Fevereiro

The contents of this report are the sole responsibility of the authors.  
O conteúdo do presente relatório é de única responsabilidade dos autores.

# Potências de ciclo e a Conjetura da Coloração Total

Christiane Neme Campos\*

Célia Picinin de Mello†

## Resumo

O número cromático total,  $\chi_T(G)$ , é o menor número de cores necessárias para colorir as arestas e os vértices de um grafo de maneira que não haja elementos adjacentes ou incidentes com a mesma cor. A conjectura da coloração total (TCC) estabelece que todo grafo simples  $G$  possui  $\chi_T(G) \leq \Delta + 2$ . Neste trabalho verificamos a TCC para as potências de ciclo  $C_n^k$ ,  $n$  par e  $2 < k < \lfloor n/2 \rfloor$ , mostrando que existe, e pode ser construída em tempo polinomial, uma  $(\Delta + 2)$ -coloração total para estes grafos.

## 1 Introdução

Seja  $G := (V(G), E(G))$  um grafo simples com conjunto de vértices  $V(G)$  e conjunto de arestas  $E(G)$ . O grau de um vértice  $v$ ,  $d(v)$ , é o número de arestas incidentes neste vértice e  $\Delta(G)$  (ou simplesmente  $\Delta$  quando estiver claro no contexto) denota o grau máximo de  $G$ , isto é,  $\Delta := \max_{v \in V(G)} \{d(v)\}$ . Um *elemento* de  $G$  é um vértice ou uma aresta de  $G$ .

Seja  $S \subseteq V(G) \cup E(G)$ . Uma *coloração total parcial* de  $G$  é um mapeamento  $\phi : S \rightarrow \mathcal{C}$ , tal que para todo  $x, y \in S$ , onde  $x$  e  $y$  são dois elementos adjacentes ou incidentes, tem-se que  $\phi(x) \neq \phi(y)$ . Quando um mapeamento não satisfaz esta condição, dizemos que há *conflito*. Se  $S = V(G) \cup E(G)$  dizemos que  $\phi$  é uma *coloração total*. Note que, se  $S = V(G)$ , temos uma *coloração de vértices* de  $G$  e, se  $S = E(G)$ , temos uma *coloração de arestas* de  $G$ . Se  $S$  for um subconjunto próprio de  $V(G)$  ( $E(G)$ ), dizemos que é uma coloração de vértices (arestas) *parcial*.

Dado o mapeamento  $\phi$  acima, o conjunto  $\mathcal{C}$  é denominado *conjunto de cores*. Ademais, se  $|\mathcal{C}| = k$ ,  $\phi$  é denominada *k-coloração total (parcial)*. Seja  $c \in \mathcal{C}$ . O conjunto  $\{x \in V(G) \cup E(G) : \phi(x) = c\}$  é denominado uma *classe de coloração* de  $G$ . Assim,  $\phi$  possui  $k$  classes de coloração. Dizemos também que  $\phi$  *usa k cores*. A cor  $c$  *ocorre* em um elemento  $x$  de  $G$  quando, ou  $\phi(x) = c$ , ou existe um elemento incidente em, ou adjacente a  $x$  que possui a cor  $c$ .

O *número cromático total* de  $G$ ,  $\chi_T(G)$ , é o menor inteiro  $k$  para o qual  $G$  admite uma  $k$ -coloração total. É fácil mostrar que  $\chi_T(G) \geq \Delta(G) + 1$ . Sánchez-Arroyo [7, 8] provou que decidir se  $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$  para um dado grafo  $G$  é um problema **NP**-completo.

---

\* campos@ic.unicamp.br

† celia@ic.unicamp.br

McDiarmid e Sánchez-Arroyo [6] provaram que mesmo o problema de determinar o número cromático total de um grafo bipartido  $k$ -regular é **NP**-difícil para cada  $k$  fixo  $\geq 3$ .

Behzad [1] e Vizing [9, 10] estabeleceram, em trabalhos independentes, a *conjectura da coloração total (TCC)*, que diz que para qualquer grafo simples  $G$ ,  $\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$ . Se  $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$ ,  $G$  é dito *tipo 1* e se  $\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$ , é dito *tipo 2*.

Um grafo é uma *potência de ciclo*,  $C_n^k$ , se  $V := \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$  e

$$E := E^1 \cup E^2 \cup \dots \cup E^k$$

onde

$$E^i := \{(v_j, v_{(j+i) \bmod n}) : 0 \leq j \leq n-1\}.$$

Uma aresta  $e$  é dita uma *aresta de alcance  $i$*  se  $e \in E^i$ . Desta forma o alcance máximo de uma aresta no  $C_n^k$  é  $k$ . Uma aresta  $e \in E(C_n^k)$  é dita uma *aresta par (ímpar)* se  $e \in E^i$  tal que  $i$  é par (ímpar). A Figura 1 exibe o  $C_{12}^3$ .

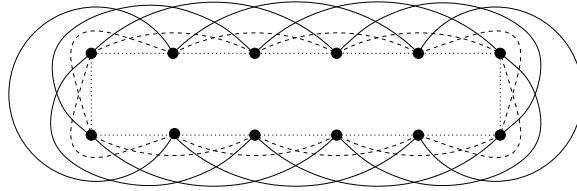


Figura 1: As arestas de  $E^1$  são as arestas pontilhadas, de  $E^2$  as arestas tracejadas e as arestas de  $E^3$  são as cheias. Neste exemplo, as arestas pares são as arestas de  $E^2$ . As arestas ímpares são as arestas de  $E^1 \cup E^3$ .

O grafo  $C_n^k$  pode também ser definido recursivamente. Defina  $C_n^0$  como um grafo 0-regular com  $n$  vértices. Então:

$$\begin{aligned} V(C_n^k) &:= V(C_n^{k-1}) \\ E(C_n^k) &:= E(C_n^{k-1}) \cup E^k \end{aligned}$$

Neste texto, mostramos que a TCC é verdadeira para os grafos  $C_n^k$  com  $2 < k < \lfloor n/2 \rfloor$ ,  $n$  par. O grafo  $C_n^k$  com  $k \geq \lfloor k/2 \rfloor$  é, a menos de arestas múltiplas, isomorfo ao  $K_n$  e  $\chi_T(K_n)$  é conhecido [2]. O número cromático total do  $C_n^2$  foi determinado em [3] e número cromático total do  $C_n$  é conhecido [11].

Na Seção 2, estabelecemos algumas definições, notações e resultados preliminares. Na Seção 3, construímos uma coloração total para um subgrafo do  $C_n^k$ , denominado  $G_p$ . A Seção 4 estende a coloração total do  $G_p$  a uma coloração total do  $C_n^k$  através da coloração das arestas de  $E(G) \setminus E(G_p)$ .

## 2 Definições e resultados preliminares

Seja  $(v_0, \dots, v_{n-1})$  uma *ordem cíclica* para os vértices de  $G$ . Um *caminho* de  $u$  a  $v$  é uma seqüência alternada de vértices e arestas, ambos distintos dois a dois, que começa em um

vértice  $u$  e termina em um vértice  $v$ . O *comprimento* de um caminho é dado pelo seu número de arestas. Tradicionalmente, a *distância* entre dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  é o comprimento de um menor caminho, em  $G$ , entre estes vértices. Sejam  $u, v \in V(C_n^k)$ . Definimos a *distância entre  $u$  e  $v$  no  $C_n^k$* ,  $d(u, v)$ , como a distância (tradicional) entre  $u$  e  $v$  no  $C_n$ .

Denotamos por  $G_p$  ( $G_1$ ) o subgrafo maximal do  $C_n^k$  gerado pelas arestas pares (ímpares). No Lema 2.1 demonstramos que  $G_1$  é bipartido quando  $n$  é par.

LEMA 2.1

Seja  $G := C_n^k$ , com  $n$  par. Então  $G_1$  é um grafo bipartido.

Demonstração: Seja  $A := \{v_i \in V(G_1) : i \text{ é par}\}$ . Seja  $B := \{v_i \in V(G_1) : i \text{ é ímpar}\}$ . Os conjuntos  $A$  e  $B$  particionam o conjunto de vértices de  $G_1$ . Seja  $e$  uma aresta (ímpar) de  $G_1$ . Então  $e \in E^l$  com  $l$  ímpar e  $e = (v_i, v_j)$  onde  $j = (i + l)(\text{mod } n)$ . Como  $n$  é par e  $l$  ímpar tem-se que  $i$  e  $j$  têm paridades distintas. Esta conclusão implica que se  $v_i \in A$ , então  $v_j \in B$  e vice versa. Portanto  $G_1$  é bipartido.  $\square$

Dado  $v_i \in V(C_n^k)$ , o conjunto  $P(v_i) := \{(v_{i-1}, v_{i+1}), \dots, (v_{i-\lfloor k/2 \rfloor}, v_{i+\lfloor k/2 \rfloor})\}$  é denominado *conjunto de arestas equivalentes ao vértice  $v_i$* . Note que  $P(v_i)$  é composto apenas de arestas pares e o alcance destas arestas varia de 2 até  $2\lfloor k/2 \rfloor$ . A Figura 2 mostra um exemplo de  $P(v_i)$ .

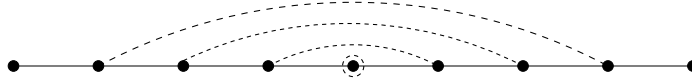


Figura 2: O vértice marcado é  $v_i$  e  $P(v_i)$  é composto pelas arestas em destaque.

Um conjunto de elementos  $S$  de  $G$  é dito *independente* se não existe um par de elementos, em  $S$ , que sejam incidentes ou adjacentes em  $G$ . Note que cada classe de coloração é um conjunto independente. O Lema 2.2 demonstra que  $P(v_i) \cup \{v_i\}$  é um conjunto independente e que  $P(v_0), \dots, P(v_{n-1})$  particiona  $E(G_p)$ . O Lema 2.3 estabelece condições para que, dados dois vértices distintos, seus conjuntos de arestas equivalentes sejam independentes.

LEMA 2.2

Seja  $v_i \in V(C_n^k)$  e seja  $P(v_i)$  o seu conjunto de arestas equivalentes. Então,

1.  $P(v_i) \cup \{v_i\}$  é um conjunto independente de elementos,
2.  $P(v_i) \cap P(v_j) = \emptyset$  para  $i \neq j$ , e
3.  $\bigcup_{i=0}^{n-1} P(v_i) = \bigcup_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} E^{2i}$ .

Demonstração: Por definição, nenhuma aresta de  $P(v_i)$  incide em  $v_i$  e não existem duas arestas que possuam o mesmo extremo em  $P(v_i)$ . Portanto,  $P(v_i) \cup \{v_i\}$  é um conjunto independente.

Suponhamos que exista uma aresta  $e \in P(v_i) \cap P(v_j)$  para  $i \neq j$ . A aresta  $e$  é equivalente a  $v_i$ , logo  $e = (v_{i-l}, v_{i+l})$  para algum  $1 \leq l \leq \lfloor k/2 \rfloor$ . A aresta  $e$  também é equivalente a  $v_j$ , portanto  $e = (v_{j-m}, v_{j+m})$  para algum  $1 \leq m \leq \lfloor k/2 \rfloor$ .

Como  $i \neq j$ ,  $d(v_i, v_{i-l}) = d(v_i, v_{i+l})$  e  $d(v_j, v_{j-m}) = d(v_j, v_{j+m})$  temos que  $j = (i + n/2) \pmod{n}$ , isto é,  $i$  e  $j$  são diametralmente opostos no  $C_n^1$  induzido. Assim, se contarmos os vértices que existem entre  $i-l$  e  $i+l$  e os vértices entre  $j-m$  e  $j+m$  e adicionarmos os extremos de  $e$ , este valor tem que ser  $n$ . Ou seja,  $(2l-1) + (2m-1) + 2 = n$ , isto é,  $m+l = n/2$ . No entanto,

$$m+l \leq \lfloor k/2 \rfloor + \lfloor k/2 \rfloor \leq k$$

que é uma contradição, pois para o grafo  $C_n^k$  considerado,  $k < \lfloor n/2 \rfloor$ . Conclui-se, portanto que  $P(v_i) \cap P(v_j) = \emptyset$ .

Para concluir a demonstração, vamos mostrar que  $\bigcup_{i=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} E^{2i} = \bigcup_{i=0}^{n-1} P(v_i)$ . Por definição,

$$e \in P(v_i) \Leftrightarrow e = (v_{i-l}, v_{i+l}) = (v_j, v_{j+2l}) \Leftrightarrow e \in E^{2l},$$

onde  $j := i-l$  e  $1 \leq l \leq \lfloor k/2 \rfloor$ . □

### LEMA 2.3

Considere o  $C_n^k$ . Sejam  $v_i$  e  $v_j$  dois vértices tais que  $0 \leq i < j < n$ . Então,

$$j-i > 2\lfloor k/2 \rfloor \quad e \quad n-j+i > 2\lfloor k/2 \rfloor,$$

se e somente se o conjunto  $\{v_i, v_j\} \cup P(v_i) \cup P(v_j)$  é um conjunto independente.

Demonstração: Sejam

$$\begin{aligned} V(P(v_i)) &:= \{v_{i-\lfloor k/2 \rfloor}, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_{i+\lfloor k/2 \rfloor}\} \quad e \\ V(P(v_j)) &:= \{v_{j-\lfloor k/2 \rfloor}, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_{j+\lfloor k/2 \rfloor}\} \end{aligned}$$

os conjuntos maximais de vértices que são extremos de alguma aresta de  $P(v_i)$  e  $P(v_j)$ , respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} j-i > 2\lfloor k/2 \rfloor &\Leftrightarrow j - \lfloor k/2 \rfloor > i + \lfloor k/2 \rfloor, \quad e \\ n-j+i > 2\lfloor k/2 \rfloor &\Leftrightarrow n+i - \lfloor k/2 \rfloor > j + \lfloor k/2 \rfloor \\ &\Updownarrow \\ \{v_i, v_j\} \cup P(v_i) \cup P(v_j) &\text{ é um conjunto independente.} \end{aligned}$$

O valor  $n$  foi acrescido porque estamos trabalhando com operações modulares e  $i < j < n$ . □

O conjunto  $I(v_i, j) := \{(v_i, v_{i+1}), (v_{i-1}, v_{i+2}), \dots, (v_{i-\lfloor j/2 \rfloor}, v_{i+\lfloor j/2 \rfloor})\}$  com  $j$  ímpar, é denominado *conjunto de arestas (ímpares) equivalentes* e a aresta  $(v_i, v_{i+1})$  denominada *âncora* de  $I(v_i, j)$ . Note que  $I(v_i, j)$  é composto apenas por arestas ímpares, que possuem alcance  $1, 3, \dots, j$ , com  $1 \leq j \leq 2\lfloor k/2 \rfloor - 1$  e a âncora é sempre a aresta de alcance 1. Note também que todos os vértices de  $v_{i-\lfloor j/2 \rfloor}$  a  $v_{i+\lfloor j/2 \rfloor}$  são extremos de alguma aresta no

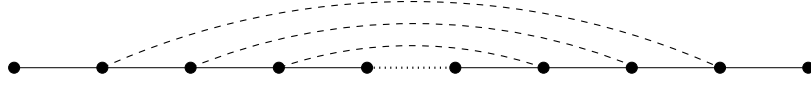


Figura 3: O conjunto em destaque é um exemplo de conjunto de arestas (ímpares) equivalentes. A aresta de  $E^1$  (pontilhada) é a âncora.

conjunto. Definimos  $V(I(v_i, j))$  como o conjunto de vértices de  $G$ , tal que  $v \in V(I(v_i, j))$  se e somente se  $v$  é extremo de alguma aresta de  $I(v_i, j)$ . A Figura 3 mostra um exemplo de um conjunto de arestas equivalentes. O Lema 2.4, a seguir, estabelece algumas propriedades de  $I(v_i, j)$ .

LEMA 2.4

Seja  $I(v_i, j)$  um conjunto de arestas equivalentes do  $C_n^k$ , com  $0 \leq i < n$ . Então,

1.  $I(v_i, j)$  é um conjunto independente,
2. Seja  $I(v_l, m)$ , com  $0 \leq i < l < n$ . Então

$$\begin{aligned} l - i &> \lceil j/2 \rceil + \lfloor m/2 \rfloor, \text{ e} \\ n - l + i &> \lfloor m/2 \rfloor + \lceil j/2 \rceil, \end{aligned}$$

se e somente se  $I(v_i, j) \cup I(v_l, m)$  é um conjunto independente.

3.  $\bigcup_{i=0}^{n-1} I(v_i, 2\lceil k/2 \rceil - 1) = \bigcup_{i=1}^{\lceil k/2 \rceil} E^{2i-1}$ .

Demonstração: Por definição, não existem duas arestas de  $I(v_i, j)$  que possuam o mesmo extremo. Portanto, este conjunto é independente.

Por definição,

$$\begin{aligned} V(I(v_i, j)) &:= \{v_{i-\lfloor j/2 \rfloor}, \dots, v_{i+\lceil j/2 \rceil}\}, \text{ e} \\ V(I(v_l, m)) &:= \{v_{l-\lfloor m/2 \rfloor}, \dots, v_{l+\lceil m/2 \rceil}\}. \end{aligned}$$

O conjunto  $I(v_i, j) \cup I(v_l, m)$  é independente se e somente se  $V(I(v_i, j)) \cap V(I(v_l, m)) = \emptyset$ . Então,

$$\begin{aligned} l - i > \lceil j/2 \rceil + \lfloor m/2 \rfloor &\Leftrightarrow i + \lceil j/2 \rceil < l - \lfloor m/2 \rfloor, \text{ e} \\ n - l + i > \lfloor m/2 \rfloor + \lceil j/2 \rceil &\Leftrightarrow l + \lceil m/2 \rceil < n + i - \lfloor j/2 \rfloor, \\ &\Updownarrow \\ I(v_i, j) \cup I(v_l, m) &\text{ é um conjunto independente.} \end{aligned}$$

O valor  $n$  foi acrescido porque estamos trabalhando com operações modulares e  $i < l < n$ .

Vamos agora mostrar que:

$$\bigcup_{i=1}^{\lceil k/2 \rceil} E^{2i-1} = \bigcup_{i=0}^{n-1} I(v_i, 2\lceil k/2 \rceil - 1).$$

$$e \in E^{2m-1} \Leftrightarrow e = (v_j, v_{j+(2m-1)}) \Leftrightarrow e = (v_{i-(m-1)}, v_{i+m}) \Leftrightarrow e \in I(v_i, 2\lceil k/2 \rceil - 1),$$

onde  $i = j + m - 1$ ,  $i, j \in [0, n - 1]$  e  $m \in [1, \lceil k/2 \rceil]$ . □

### 3 Coloração total do $G_P$

O grafo  $G_P$  é o subgrafo gerado pelas arestas pares do  $C_n^k$ . Nesta seção construímos uma coloração total para o  $G_P$  utilizando  $k + 1 + r$  cores, onde  $r \equiv n \pmod{k + 1}$ . Denominamos  $r$  de *resíduo*.

Vamos particionar  $V(C_n^k)$  em  $\alpha$  conjuntos,  $B^1, \dots, B^\alpha$ , de  $k + 1$  vértices, denominados *blocos alfa*, onde  $B^i := \{v_{(i-1)(k+1)}, \dots, v_{(i-1)(k+1)+k}\}$ , e um bloco de  $r$  vértices,  $R$ , denominado *bloco residual* e composto pelos vértices  $\{v_{n-r}, \dots, v_{n-1}\}$ . Note que, como  $k < \lfloor n/2 \rfloor$ , temos que  $\alpha > 1$ .

Denotamos, por  $u_i^j$ , o  $i$ -ésimo vértice de  $B^j$ , onde  $i \in [1, k + 1]$  e  $j \in [1, \alpha]$ . Note que este vértice corresponde ao vértice  $v_{(j-1)(k+1)+i-1}$ . Denotamos o  $i$ -ésimo vértice de  $R$  por  $w_i$ . Este vértice corresponde ao vértice  $v_{\alpha(k+1)+i-1}$ .

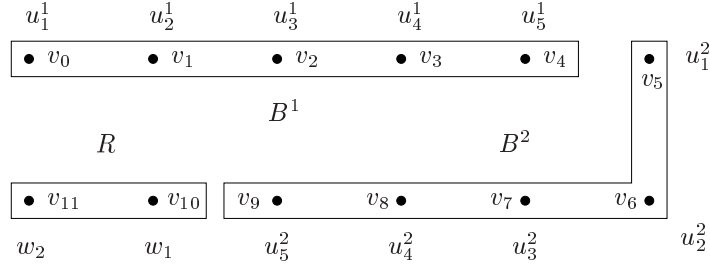


Figura 4: O conjunto  $V(C_{12}^4)$  dividido em blocos.

Vamos agora definir  $\pi_{G_P}$ , uma coloração total do subgrafo  $G_P$ . As cores atribuídas aos vértices dos blocos alfa (residual) serão denominadas *cores alfa (residuais)*.

$$\begin{aligned} \pi_{G_P}(u_i^j) &:= i, & 1 \leq i \leq k + 1; 1 \leq j \leq \alpha \text{ (cores alfa)} & \quad (1) \\ \pi_{G_P}(w_i) &:= k + 1 + i, & 1 \leq i \leq r \text{ (cores residuais)} & \quad (2) \\ \pi_{G_P}(e) &:= \pi_{G_P}(v_i), & \forall e \in P(v_i) \text{ e } 0 \leq i \leq n - 1 & \quad (3) \end{aligned}$$

A Figura 5 exhibe o grafo  $G_P$ , obtido a partir do  $C_{12}^4$ , munido de  $\pi_{G_P}$ .

LEMA 3.1

A coloração  $\pi_{G_P}$  é uma coloração total para  $G_P$ .

Demonstração: Como  $V(C_n^k)$  é particionado em blocos alfa e residual, então em (1) e (2) cada vértice do  $C_n^k$  recebe uma cor. Por construção de  $\pi_{G_P}$ , os vértices de um mesmo bloco recebem cores distintas entre si. Ademais, o conjunto de vértices que recebe a cor  $i$ ,  $i \leq k + 1$ , é composto pelos  $i$ -ésimos vértices dos blocos alfa. Uma vez  $d(u_i^j, u_i^{j+1}) = k + 1$ ,  $j < \alpha$  e o alcance máximo de uma aresta no  $C_n^k$  é  $k$ , podemos concluir que este conjunto é independente. O conjunto de vértices que recebe a cor  $k + 1 + i$ ,  $i \leq r$ , é  $\{w_i\}$ , trivialmente independente. Concluimos que (1) e (2) fornecem uma coloração de vértices para o  $G_P$ .

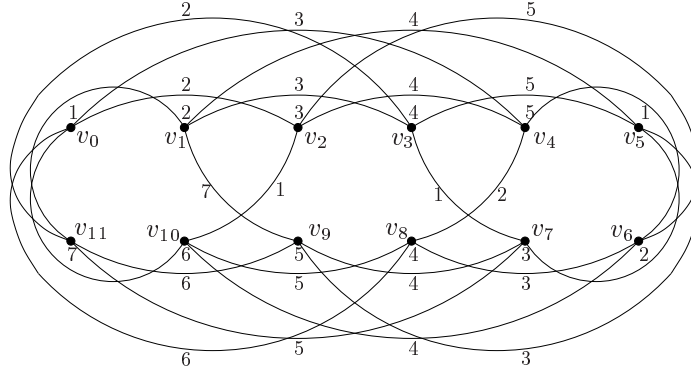


Figura 5: O grafo  $G_P$ , obtido a partir do  $C_{12}^4$ , munido de  $\pi_{G_P}$ .

Seja  $v_i$  um vértice de  $G_P$ . O conjunto  $P(v_i)$  recebe, em (3), a mesma cor de  $v_i$  e, pelo Lema 2.2, o conjunto  $\{v_i\} \cup P(v_i)$  é um conjunto independente. Ademais, cada aresta de  $G_P$  recebe uma cor.

Por construção, o conjunto de arestas que recebe a cor alfa  $i$  é

$$\bigcup_{j=1}^{\alpha} P(u_i^j).$$

Este conjunto, pelo Lema 2.3, é um conjunto independente de arestas. O conjunto de arestas que recebe a cor residual  $i$  é o conjunto  $P(w_i)$ , também um conjunto independente. Logo não há arestas adjacentes com a mesma cor e o resultado segue. □

A coloração  $\pi_{G_P}$  é uma coloração total de  $G_P$ , que é um subgrafo do  $C_n^k$ . Portanto,  $\pi_{G_P}$  é uma coloração (total) parcial para o  $C_n^k$ , onde os vértices e arestas pares estão coloridos e resta colorir as arestas ímpares.

## 4 Coloração de arestas do $G_I$

Na seção anterior obtivemos uma coloração total para o  $G_P$ . Nesta seção mostramos que é possível colorir as arestas de  $G_I$  usando no máximo  $k + 1 - r$  cores novas. Dividimos esta seção em duas partes. Inicialmente, trabalhamos com o caso em que  $r = 0$ , isto é  $n \equiv 0 \pmod{k + 1}$ . Posteriormente, trabalhamos com os casos em que  $0 < r \leq k$ .

### 4.1 $n \equiv 0 \pmod{k + 1}$

Nesta subseção construímos uma  $(\Delta + 2)$ -coloração total para o  $C_n^k$  quando  $n$  é múltiplo de  $k + 1$ , isto é, quando  $r = 0$ . Isto é feito mostrando que existe uma coloração de arestas do  $G_I$  que usa  $k + 1$  cores.



Para demonstrar o principal lema desta seção, Lema 4.3, precisamos de dois resultados clássicos de coloração de arestas. O *índice cromático de um grafo*  $G$ ,  $\chi'(G)$ , é o menor inteiro  $k$  para o qual  $G$  admite uma  $k$ -coloração de arestas.

LEMA 4.1 (VIZING)

Seja  $G$  um grafo simples. Então,  $\chi'(G) \leq \Delta + 1$ . □

LEMA 4.2 (KÖNIG)

Seja  $G$  um grafo simples bipartido. Então,  $\chi'(G) = \Delta$ . □

LEMA 4.3

Seja  $G := C_n^k$  com  $n \equiv 0 \pmod{k+1}$ . Então,  $\chi'(G_1) \leq k+1$ .

Demonstração: Um simples argumento de contagem leva-nos a concluir que se  $k$  for par  $\Delta(G_1) = k$ , caso contrário  $\Delta(G_1) = k+1$ . Assim, se  $k$  for par o resultado segue do Lema 4.1. Se  $k$  for ímpar, como  $n \equiv 0 \pmod{k+1}$ , então  $n$  é par. Pelo Lema 2.1,  $G_1$  é bipartido. Portanto, pelo Lema 4.2, concluímos que  $\chi'(G_1) = k+1$ . □

O resultado a seguir é um corolário imediato do lema anterior.

TEOREMA 4.4

Seja  $G := C_n^k$  com  $n$  par e  $n \equiv 0 \pmod{k+1}$ . Então,  $\chi_T(G) \leq \Delta + 2$ .

Demonstração: Na seção 3, é definida  $\pi_{G_p}$ , uma coloração total para o  $G_p$  que usa  $k+1+r$  cores. No caso de  $n$  múltiplo de  $k+1$ ,  $r=0$ , portanto,  $G_p$  foi colorido com  $k+1$  cores. Pelo Lema 4.3, podemos colorir as arestas do grafo  $G_1$  com  $k+1$  cores. Por definição,  $V(C_n^k) = V(G_p)$  e  $E(C_n^k) = E(G_p) \cup E(G_1)$ . Portanto, obtivemos uma coloração total para  $G$  com  $2k+2 = \Delta + 2$  cores. □

## 4.2 $n \equiv r \pmod{k+1}$ , $0 < r \leq k$

Nesta subseção, utilizamos as cores do  $G_p$  para colorir algumas arestas de  $G_1$ . Denotamos esta coloração de  $\pi$ . Considerando o  $C_n^k$  munido de  $\pi_{G_p} \cup \pi$ , mostramos que o subgrafo gerado pelas arestas que ainda não foram coloridas é  $(k+1-r)$ -aresta colorável.

Definimos  $\pi := \pi_1 \cup \pi_2 \cup \pi_3$ . Seja  $\pi_1$  uma atribuição de cores à arestas do  $C_n^k$  definida como segue:

$$\pi_1(e) = k+1+i \quad \text{se } e \in \bigcup_{j=1}^{\alpha-1} \{I(w_{k-r+i}^j, 2\lceil k/2 \rceil - 1)\}, \quad 1 \leq i \leq r$$

LEMA 4.5

A atribuição de cores definida por  $\pi_{G_p} \cup \pi_1$  é uma coloração total parcial do  $C_n^k$ .

Demonstração: O Lema 3.1 mostra que  $\pi_{G_p}$  é uma coloração total de  $G_p$  e portanto uma coloração total parcial do  $C_n^k$ . Em  $\pi$ , apenas cores residuais são utilizadas. Logo, para mostrar que  $\pi_{G_p} \cup \pi_1$  é uma coloração total parcial do  $C_n^k$  devemos mostrar que  $\pi_1$  é uma coloração de arestas parcial do  $C_n^k$  e que não há conflitos entre  $\pi_1$  e  $\pi_{G_p}$ .

Seja  $k + 1 + i$  uma cor residual. Concluímos que  $\pi_1$  é uma coloração de arestas parcial do  $C_n^k$  pois, pelos itens 1 e 2 do Lema 2.4,

$$\bigcup_{j=1}^{\alpha-1} \{I(w_{k-r+i}^j, 2\lceil k/2 \rceil - 1)\}$$

é um conjunto independente.

Resta mostrar que não há conflitos entre  $\pi_{G_p}$  e  $\pi_1$ . Para isso, vamos mostrar que não existem arestas adjacentes entre  $\{w_i\} \cup P(w_i)$  e  $I(u_{k-r+i}^1, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$  e entre  $\{w_i\} \cup P(w_i)$  e  $I(u_{k-r+i}^{\alpha-1}, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$ , que são, respectivamente, o primeiro e último conjuntos coloridos, na ordem cíclica, em  $\pi_1$ .

Em  $\pi_{G_p}$ , a cor residual  $k + 1 + i$  é atribuída aos elementos do conjunto  $\{w_i\} \cup P(w_i)$ . Assim, incide uma aresta com esta cor nos  $\lceil k/2 \rceil$  vértices consecutivos, na ordem cíclica, ao vértice  $w_i$  e nos  $\lceil k/2 \rceil$  vértices consecutivos, na ordem cíclica *inversa*, ao vértice  $w_i$ . Por definição de  $\pi_1$  e do conjunto  $I(u_{k-r+i}^j, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$ , incide uma aresta colorida com a cor  $i$  nos  $\lceil k/2 \rceil - 1$  vértices consecutivos, na ordem cíclica, ao vértice  $u_{k-r+i+1}^j$  e nos  $\lceil k/2 \rceil - 1$  vértices consecutivos, na ordem cíclica *inversa*, ao vértice  $u_{k-r+i}^j$ .

Entre  $w_i$  e  $u_{k-r+i}^1$ , na ordem cíclica, existem  $(r - i) + (k - r + i - 1) = k - 1$  vértices. Na ordem cíclica, os primeiros  $\lceil k/2 \rceil$  vértices possuem uma aresta incidente que recebeu a cor  $i$  em  $\pi_{G_p}$  e os últimos  $\lceil k/2 \rceil - 1$  vértices possuem uma aresta incidente que recebeu a cor  $i$  em  $\pi_1$ . Uma vez que

$$\lceil k/2 \rceil + \lceil k/2 \rceil - 1 = k - 1,$$

concluímos que entre  $\{w_i\} \cup P(w_i)$  e  $I(u_{k-r+i}^1, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$  não há arestas adjacentes coloridas com a cor  $k + 1 + i$ .

Entre  $u_{k-r+i+1}^{\alpha-1}$  e  $w_i$ , na ordem cíclica, existem  $(r - i) + (k + 1) + (i - 1) = k + r$  vértices. A primeira parcela é o número de vértices de  $B^{\alpha-1}$  após  $u_{k-r+i+1}$ , a segunda parcela é o número de vértices em  $B^\alpha$  e a última, o número de vértices que existem no bloco residual antes de  $w_i$ . Como  $k + r > k - 1$ , pelo mesmo argumento anterior, podemos concluir que não há arestas adjacentes entre  $\{w_i\} \cup P(w_i)$  e  $I(u_{k-r+i}^{\alpha-1}, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$  coloridas com a cor  $k + 1 + i$ .  $\square$

Considere o  $C_n^k$  munido de  $\pi_{G_p}$ . Os vértices  $u_i^1$  e  $u_i^\alpha$  estão ambos coloridos com a cor alfa  $i$ . O número de vértices entre  $u_i^\alpha$  e  $u_i^1$ , na ordem cíclica, nos quais **não** incide uma aresta com a cor  $i$  é denominado  $m$ . O lema a seguir determina o valor de  $m$ .

LEMA 4.6

Considere o  $C_n^k$  munido de  $\pi_{G_p}$ . O número de vértices entre  $u_i^\alpha$  e  $u_i^1$ , na ordem cíclica, nos quais não incide uma aresta com a cor alfa  $i$  é:

$$m = \begin{cases} r & \text{se } k \text{ par,} \\ r + 1 & \text{se } k \text{ ímpar.} \end{cases}$$

Demonstração: Por construção, após  $u_i^\alpha$ , na ordem cíclica, existem  $k+1-i$  vértices em  $B^\alpha$ . Simetricamente existem  $i-1$  vértices em  $B^1$ , antes de  $u_i^1$ . Ademais, entre  $B^\alpha$  e  $B^1$  existe o bloco  $R$ , que possui  $r$  vértices. Portanto, entre  $u_i^\alpha$  e  $u_i^1$  existem  $(k+1-i)+r+(i-1) = k+r$  vértices.

O vértice  $u_i^\alpha$  recebe a cor alfa  $i$  em  $\pi_{G_p}$ . Também em  $\pi_{G_p}$  esta cor é atribuída às arestas do conjunto  $P(u_i^\alpha)$ . Assim, nos  $\lfloor k/2 \rfloor$  vértices consecutivos, na ordem cíclica, a  $u_i^\alpha$  incide uma aresta colorida com a cor  $i$ . Analogamente, concluímos que nos  $\lfloor k/2 \rfloor$  vértices consecutivos, na ordem cíclica *inversa*, a  $u_i^1$ , incide uma aresta colorida com a cor  $i$ . Consequentemente, o número de vértices entre  $u_i^\alpha$  e  $u_i^1$ , na ordem cíclica, nos quais não incide uma aresta colorida com a cor  $i$  é  $k+r-2\lfloor k/2 \rfloor$ .  $\square$

Considere agora a cor residual  $k+1+i$ . Em  $\pi_1$ , são coloridos  $(\alpha-1)$  conjuntos de arestas equivalentes com esta cor. A âncora do último conjunto (na ordem cíclica) colorido com esta cor é a aresta  $(u_{k-r+i}^{\alpha-1}, u_{k-r+i+1}^{\alpha-1})$ . Em  $\pi_{G_p}$ , o conjunto  $\{w_i\} \cup P(w_i)$  também recebe a cor  $k+1+i$ . O lema a seguir mostra que o número de vértices entre  $u_{k-r+i}^{\alpha-1}$  e  $w_i$ , na ordem cíclica, em que não ocorre a cor  $k+1+i$  é  $r+1$ .

LEMA 4.7

Considere o  $C_n^k$  munido de  $\pi_{G_p} \cup \pi_1$ . O número de vértices entre  $u_{k-r+i}^{\alpha-1}$  e  $w_i$ , na ordem cíclica, nos quais não incide uma aresta com a cor  $k+1+i$  é  $m' := r+1$ .

Demonstração: Por construção, na ordem cíclica, existem  $k+1-(k-r+i) = r-i+1$  vértices em  $B^{\alpha-1}$  após  $u_{k-r+i}^{\alpha-1}$  e existem  $i-1$  vértices antes de  $w_i$  em  $R$ . Ademais, entre  $B^{\alpha-1}$  e  $R$  existe o bloco  $B^\alpha$ , que possui  $k+1$  vértices. Portanto, entre  $u_{k-r+i}^{\alpha-1}$  e  $w_i$  existem  $(r-i+1) + (k+1) + (i-1) = k+r+1$  vértices.

A aresta  $(u_{k-r+i}^{\alpha-1}, u_{k-r+i+1}^{\alpha-1})$  é âncora do último conjunto de arestas equivalentes que recebe a cor  $k+1+r$  em  $\pi_1$ . O alcance máximo das arestas deste conjunto é  $2\lfloor k/2 \rfloor - 1$ . Portanto, nos  $\lfloor k/2 \rfloor$  vértices consecutivos, na ordem cíclica, ao vértice  $u_{k-r+i}^{\alpha-1}$ , incide uma aresta colorida com a cor  $k+1+i$ . O vértice  $w_i$  recebe cor  $k+1+i$  em  $\pi_{G_p}$ . Também em  $\pi_{G_p}$  esta cor é atribuída às arestas do conjunto  $P(w_i)$ . Assim, nos  $\lfloor k/2 \rfloor$  vértices consecutivos, na ordem cíclica *inversa*, a  $w_i$  incide uma aresta colorida com  $k+1+i$ . Consequentemente, o número de vértices entre  $u_{k-r+i}^{\alpha-1}$  e  $w_i$ , na ordem cíclica, nos quais não incide uma aresta colorida com a cor  $k+1+i$  é  $k+r+1 - \lfloor k/2 \rfloor - \lfloor k/2 \rfloor = r+1$ .  $\square$

Sejam  $\pi_2$  e  $\pi_3$  atribuições de cores às arestas do  $C_n^k$  definidas como segue:

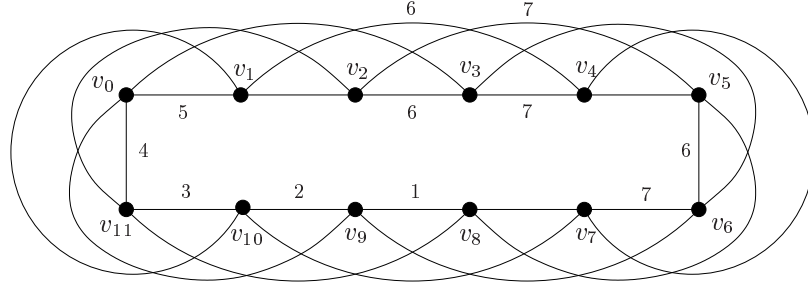
$$\pi_2(e) := k+1+i \quad \text{se } e \in I(v_{s_i+\lfloor m'/2 \rfloor}, 2\lfloor m'/2 \rfloor - 1); \quad \text{para } 1 \leq i \leq r$$

$$\text{onde } s_i := (\alpha-2)(k+1) + k-r+i-1 + \lfloor k/2 \rfloor$$

$$\pi_3(e) := i \quad \text{se } e \in I(v_{s_i+\lfloor m/2 \rfloor}, 2\lfloor m/2 \rfloor - 1); \quad \text{para } 1 \leq i \leq k+1$$

$$\text{onde } s_i := (\alpha-1)(k+1) + i-1 + \lfloor k/2 \rfloor$$

A Figura 6 exhibe o subgrafo  $G_1$  do  $C_{12}^4$  munido de  $\pi$ .

Figura 6: Subgrafo  $G_1$  do grafo  $C_{12}^4$  munido de  $\pi$ .

LEMA 4.8

A atribuição de cores definida por  $\pi_{G_p} \cup \pi$ , onde  $\pi := \pi_1 \cup \pi_2 \cup \pi_3$ , é uma coloração total parcial do  $C_n^k$ .

Demonstração: Claramente  $\pi_2 \cup \pi_3$  é uma coloração total parcial das arestas do  $C_n^k$ . Ademais, já sabemos que  $\pi_{G_p} \cup \pi_1$  é uma coloração total parcial para o  $C_n^k$ . Portanto, precisamos mostrar que  $\pi_2 \cup \pi_3$  não gera conflitos com  $\pi_{G_p} \cup \pi_1$ .

O vértice  $v_{(\alpha-1)(k+1)+i-1}$  corresponde ao vértice  $u_i^\alpha$ . O vértice  $u_i^\alpha$  é o último vértice, na ordem cíclica, que recebe a cor alfa  $i$  em  $\pi_{G_p}$ . Além disso, em  $\pi_{G_p}$  as arestas de  $P(u_i^\alpha)$  também recebem a cor  $i$ . Logo, a cor  $i$  ocorre em  $\lfloor k/2 \rfloor$  vértices consecutivos a  $u_i^\alpha$ , na ordem cíclica. Portanto,  $v_{s_i}$  é o último vértice, na ordem cíclica, em que ocorre a cor  $i$ , após  $u_i^\alpha$ .

Analogamente, considerando a cor residual  $k+1+i$  e o conjunto  $I(u_{k-r+i}^{\alpha-1}, 2\lfloor k/2 \rfloor - 1)$ , colorido em  $\pi_1$ , concluímos que  $v_{s_i}$ , agora para a cor residual  $k+1+i$ , é o último vértice, na ordem cíclica, em que ocorre esta cor, após  $u_{k-r+i}^{\alpha-1}$ .

O parâmetro  $m$  ( $m'$ ) determina o número de vértices em que não ocorre a cor alfa  $i$  (residual  $k+1+i$ ) entre  $u_i^\alpha$  e  $u_i^1$  (entre  $u_{k-r+i}^{\alpha-1}$  e  $w_i$ ). O alcance máximo de uma aresta ímpar entre estes vértices é  $2\lfloor m/2 \rfloor - 1$  ( $2\lfloor m'/2 \rfloor - 1$ ). Ademais, a aresta  $(v_{s_i+\lfloor m/2 \rfloor}, v_{s_i+\lfloor m/2 \rfloor+1})$  ( $(v_{s_i+\lfloor m'/2 \rfloor}, v_{s_i+\lfloor m'/2 \rfloor+1})$ ) é a âncora que representa o conjunto de arestas equivalentes que pode ser colorido com a cor alfa  $i$  (residual  $k+1+i$ ) nestes  $m$  ( $m'$ )vértices. Concluímos que  $\pi_2 \cup \pi_3$  não gera conflitos com  $\pi_{G_p} \cup \pi_1$  e portanto  $\pi_{G_p} \cup \pi$  é uma coloração total parcial do  $C_n^k$ .  $\square$

Considere  $C_n^k$  munido de  $\pi_{G_p} \cup \pi$ . Denominamos *grafo residual*,  $G_r$ , o subgrafo gerado pelas arestas do  $C_n^k$  que ainda não receberam nenhuma cor. Vamos mostrar que  $G_r$  pode ser aresta-colorido com  $k+1-r$  cores, quando  $n$  é par.

LEMA 4.9

Sejam  $G := C_n^k$ ,  $2 < k < \lfloor n/2 \rfloor$ ,  $n$  par, e  $G_r$  o subgrafo induzido pelas arestas de  $G$  que não receberam nenhuma cor em  $\pi_{G_p} \cup \pi$ . Então,  $\Delta_{G_r} \leq k+1-r$ .

Demonstração: Vamos considerar inicialmente o caso em que  $k$  é par e  $r = 1$ . Como  $k$  é par,  $\Delta_{G_1} = k$ . Como  $G_r$  é subgrafo de  $G_1$ ,  $\Delta_{G_r} \leq k = k+1-r$  e o resultado segue para este caso. Assim, podemos supor a partir de agora que, se  $r = 1$ , então  $k$  é ímpar.

Em  $\pi_{G_p}$  todos os vértices e arestas pares do  $C_n^k$  recebem uma cor. Então,  $2\lfloor k/2 \rfloor$  arestas de cada vértice receberam uma cor. Seja  $H$  o subgrafo gerado pelas arestas coloridas em  $\pi$ . Então,  $G_r = G_1 \setminus H$ . Seja  $\delta_H$  o grau mínimo em  $H$ , isto é,  $\delta_H := \min_{v \in V(H)} \{d(v)\}$ . Então,

$$\Delta_{G_r} = 2k - 2\lfloor k/2 \rfloor - \delta_H = 2\lceil k/2 \rceil - \delta_H.$$

Assim, para determinar  $\Delta_{G_r}$  precisamos calcular  $\delta_H$ . Por sua vez, para determinar  $\delta_H$  precisamos estimar  $d(v)$  em  $H$  para todo  $v \in V(H)$ .

Sejam  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  os subgrafos gerado pelas arestas que recebem uma cor em  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$ , respectivamente. Claramente,  $V(H) = V(H_1) \cup V(H_2) \cup V(H_3)$  e  $E(H) = E(H_1) \cup E(H_2) \cup E(H_3)$ . Ademais,  $E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset$ , para  $i \neq j$  e  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ .

Considere  $H_1$ . Seja  $k + 1 + i$  uma cor residual. Em  $\pi_1$  esta cor é atribuída a  $\alpha - 1$  conjuntos de arestas equivalentes. Ademais, a âncora do  $j$ -ésimo conjunto é a aresta  $(u_{k-r+i}^j, u_{k-r+i+1}^j)$ . Seja  $H_1^j$  o subgrafo gerado pelas arestas de  $\bigcup_{i:=1}^r I(u_{k-r+i}^j, 2\lceil k/2 \rceil - 1)$ . Ou seja,  $H_1^j$  é o subgrafo gerado pelos  $r$  conjuntos de arestas equivalentes cujos extremos das âncoras pertencem a  $B^j$ . Note que

$$V(H_1) = \bigcup_{j:=1}^{\alpha-1} V(H_1^j)$$

e que  $E(H_1^i) \cap E(H_1^j) = \emptyset$  para  $i \neq j$  e  $i, j \in [1, \alpha - 1]$ .

Cada conjunto de arestas equivalentes é composto por um conjunto de arestas independentes e o conjunto dos vértices que são extremos destas arestas possuem índices consecutivos. As âncoras dos conjuntos que formam  $H_1^j$  são arestas consecutivas na ordem cíclica e o alcance destes conjuntos é o mesmo. Sendo assim, por contagem, obtém-se que a distribuição dos graus em  $H_1^j$  é:

$$\boxed{1 \longrightarrow r - 1} \quad \boxed{r} \quad \boxed{r - 1 \longrightarrow 1}$$

O primeiro bloco significa que o grau dos primeiros  $r - 1$  vértices variam de 1 a  $r - 1$ . O segundo bloco significa que há uma seqüência de vértices de grau  $r$ . O terceiro bloco representa  $r - 1$  vértices consecutivos cujos graus variam de  $r - 1$  a 1.

Vamos agora determinar a cardinalidade de  $V(H_1^j) \cap V(H_1^{j+1})$ ,  $1 \leq j \leq \alpha - 2$ . Como  $E(H_1)$  é particionado em  $E(H_1^1) \dots E(H_1^{\alpha-1})$  então, conhecendo a distribuição de graus de cada  $H_1^i$  e a cardinalidade da intersecção entre  $H_1^j$  e  $H_1^{j+1}$  obtemos a distribuição de graus de  $H_1$  somando os graus dos vértices (iguais) na intersecção.

Por definição, para qualquer cor residual  $k + 1 + i$  e bloco  $B^j$ ,  $1 \leq j \leq \alpha - 1$ , a aresta  $(u_{k-r+i}^j, u_{k-r+i+1}^j)$  é âncora do conjunto de arestas equivalentes que recebe esta cor em  $\pi_1$ . Estes vértices correspondem a  $v_{(j-1)(k+1)+k-r+i-1}$  e  $v_{(j-1)(k+1)+k-r+i}$ . Assim, para a última cor residual,  $k + 1 + r$ , a âncora corresponde à aresta  $(v_{(j-1)(k+1)+k-1}, v_{(j-1)(k+1)+k})$ . Considerando o alcance deste conjunto, concluímos que o último vértice em que incide uma aresta com esta cor possui índice

$$(j - 1)(k + 1) + k + \lceil k/2 \rceil - 1. \quad (4)$$

Simetricamente, se considerarmos o bloco  $B^{j+1}$ ,  $0 \leq j \leq \alpha - 2$  e a primeira cor residual,  $k + 2$ , a âncora deste conjunto é a aresta  $(v_{j(k+1)+k-r}, v_{j(k+1)+k-r+1})$ . Portanto, o primeiro vértice no qual incide uma aresta com esta cor possui índice

$$j(k + 1) + k - r - (\lceil k/2 \rceil - 1) = j(k + 1) + \lfloor k/2 \rfloor - r + 1. \quad (5)$$

Assim, a cardinalidade da intersecção entre os grafos  $H_1^j$  e  $H_1^{j+1}$  é

$$(j - 1)(k + 1) + k + \lfloor k/2 \rfloor - 1 - (j(k + 1) + \lfloor k/2 \rfloor - r + 1) + 1 = r + \lfloor k/2 \rfloor - \lfloor k/2 \rfloor - 2.$$

A expressão acima resulta em  $r - 2$  se  $k$  for par e  $r - 1$  se  $k$  for ímpar. A Figura 7 esquematiza a distribuição de graus em  $H_1^j \cup H_1^{j+1}$ .

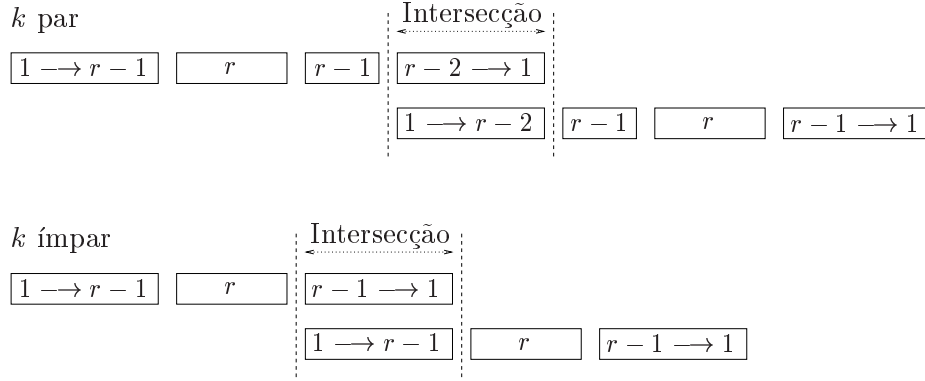


Figura 7: União de  $H_1^j$  e  $H_1^{j+1}$ . Os graus dos vértices iguais na região em que há intersecção são somados. Isto resulta em um bloco com vértices de grau  $r - 1$  no caso de  $k$  par e um bloco com vértices de grau  $r$  quando  $k$  ímpar.

Estendendo este resultado para todos os  $H_1^j$  e  $H_1^{j+1}$  temos, por contagem, que a distribuição de graus em  $H_1$  resulta no esquema exibido na Figura 8.

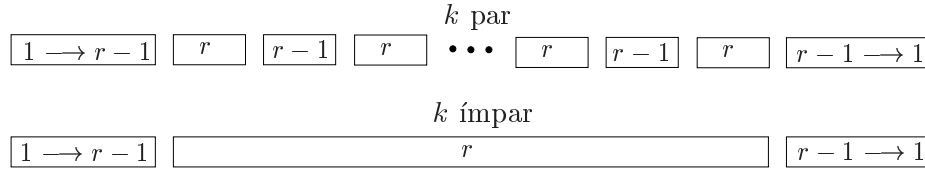


Figura 8: Distribuição de graus de  $H_1$ .

Vamos denotar  $ME_i$  o menor índice, na ordem cíclica, de um vértice de  $H_i$ . Simetricamente, denotamos  $MA_i$  o maior índice, na ordem cíclica, de um vértice de  $H_i$ . Estes parâmetros são importantes para o cálculo da união entre  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$ .

A expressão (5) representa o índice do primeiro vértice, na ordem cíclica, em que incide a cor  $k + 2$ , primeira cor residual, cuja âncora está no bloco  $B^{j+1}$ . Fazendo  $j = 0$  nesta

expressão, obtemos  $ME_1$ . Analogamente, a expressão (4) representa o índice do último vértice, na ordem cíclica, em que incide a cor  $k + 1 + r$ , última cor residual, cuja âncora está no bloco  $B^j$ . Fazendo  $j = \alpha - 1$  nesta expressão, obtemos  $MA_1$ . Assim,

$$\begin{aligned} ME_1 &= \lfloor k/2 \rfloor - r + 1 \equiv n + \lfloor k/2 \rfloor - r + 1 \text{ e} \\ MA_1 &= (\alpha - 2)(k + 1) + k + \lceil k/2 \rceil - 1. \end{aligned}$$

Vamos agora analisar  $H_2$ . Em  $\pi_2$ , cada cor residual  $k + 1 + i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , colore um conjunto de arestas equivalentes, cujo alcance é  $2\lfloor m'/2 \rfloor - 1$ . Ademais, as âncoras destes conjuntos são arestas consecutivas na ordem cíclica. Assim, por contagem, temos que  $H_2$  é composto por  $2r - 1$  vértices se  $r$  for par, e  $2r$  vértices se  $r$  for ímpar. Novamente por contagem, concluímos que a distribuição de graus é a esquematizada na Figura 9.

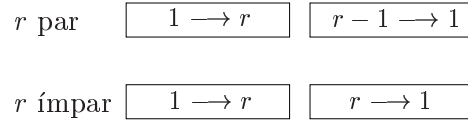


Figura 9: Distribuição de graus de  $H_2$ .

Vamos agora calcular  $ME_2$  e  $MA_2$ . Considere o conjunto de arestas equivalentes que recebe a cor residual  $k + 1 + i$ . A âncora deste conjunto é a aresta:

$$(v_{(\alpha-2)(k+1)+k-r+i-1+\lfloor k/2 \rfloor + \lfloor m'/2 \rfloor}, v_{(\alpha-2)(k+1)+k-r+i-1+\lfloor k/2 \rfloor + \lfloor m'/2 \rfloor + 1}).$$

O valor de  $ME_2$  é obtido subtraindo-se  $\lfloor m'/2 \rfloor - 1$  do primeiro extremo da aresta acima, considerando-se a primeira cor residual,  $i = 1$ . O valor de  $MA_2$  é obtido somando-se  $\lfloor m'/2 \rfloor - 1$  ao segundo extremo da aresta acima, considerando-se a última cor residual,  $i = r$ . Desta forma, concluímos que

$$\begin{aligned} ME_2 &= (\alpha - 2)(k + 1) + k - r + \lceil k/2 \rceil + 1 \text{ e} \\ MA_2 &= (\alpha - 2)(k + 1) + k + \lceil k/2 \rceil + 2\lfloor m'/2 \rfloor - 1. \end{aligned}$$

Consideremos o grafo  $H_3$ . Em  $\pi_3$ , cada cor alfa é atribuída a um conjunto de arestas equivalentes, cujo alcance é  $2\lfloor m/2 \rfloor - 1$ . Pelo Lema 4.6,  $m = r$  se  $k$  par e  $m = r + 1$  se  $k$  ímpar. Lembrando que o caso  $r = 1$  e  $k$  par já foi considerado, concluímos, por contagem, que  $H_3$  é composto por  $k + 2\lfloor m/2 \rfloor$  vértices. Utilizando o mesmo raciocínio dos casos anteriores, obtemos a distribuição de graus de  $H_3$ , esquematizada na Figura 10.

Finalmente, vamos calcular  $ME_3$  e  $MA_3$ . O cálculo é feito exatamente como no caso de  $H_2$ , considerando que neste caso estamos tratando de cores alfa. Desta forma, concluímos que

$$\begin{aligned} ME_3 &= (\alpha - 1)(k + 1) + \lceil k/2 \rceil + 1 \text{ e} \\ MA_3 &= (\alpha - 1)(k + 1) + k + \lceil k/2 \rceil + 2\lfloor m/2 \rfloor. \end{aligned}$$

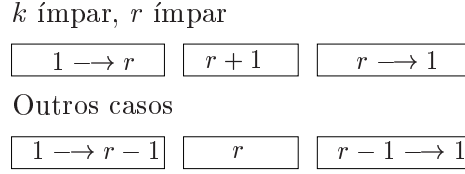


Figura 10: Distribuição de graus de  $H_3$ .

Uma vez definida a distribuição de graus dos grafos  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$ , precisamos definir a distribuição de graus de  $H$ . Para isso, é feita uma análise análoga àquela feita para a construção de  $H_1$ . Neste caso, calculamos a intersecção dos grafos  $H_1$  e  $H_2$ ,  $H_2$  e  $H_3$  e  $H_3$  e  $H_1$ , que, considerando a intersecção entre  $H_i$  e  $H_j$ , é dada por  $MA_i - ME_j + 1$ . Estas intersecções são as únicas possíveis, por construção de  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  e  $\pi_3$ . Para cada uma destas intersecções, calculamos a soma dos graus dos vértices iguais na intersecção para obter a distribuição de graus de  $H$ .

CASO 1 *Intersecção de  $H_1$  e  $H_2$*

$$\begin{aligned}
 |H_1 \cap H_2| &= MA_1 - ME_2 + 1 \\
 &= (\alpha - 2)(k + 1) + k + \lceil k/2 \rceil - 1 - ((\alpha - 2)(k + 1) + k - r + \lceil k/2 \rceil + 1) + 1 \\
 &= r - 1
 \end{aligned}$$

Assim, a Figura 11 esquematiza a distribuição de graus em  $H_1 \cap H_2$ .

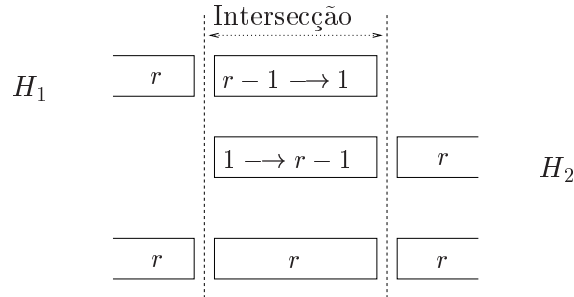


Figura 11: Distribuição de graus de  $H_1 \cap H_2$ .

CASO 2 *Intersecção de  $H_2$  e  $H_3$*

$$\begin{aligned}
 |H_2 \cap H_3| &= MA_2 - ME_3 + 1 \\
 &= (\alpha - 2)(k + 1) + k + \lceil k/2 \rceil + 2\lfloor m'/2 \rfloor - 1 - ((\alpha - 1)(k + 1) + \lceil k/2 \rceil + 1) + 1 \\
 &= \lceil k/2 \rceil - \lfloor k/2 \rfloor + 2\lfloor m'/2 \rfloor - 2
 \end{aligned}$$



A expressão acima varia de acordo com a paridade de  $k$  e com a paridade de  $r$  ( $m' = r + 1$ ). Assim temos os seguintes casos:

$$|H_2 \cap H_3| = \begin{cases} r - 2 & \text{se } k \text{ par, } r \text{ par;} \\ r - 1 & \text{se } k \text{ par, } r \text{ ímpar;} \\ r - 1 & \text{se } k \text{ ímpar, } r \text{ par;} \\ r & \text{se } k \text{ ímpar, } r \text{ ímpar.} \end{cases}$$

As Figuras de 12(a) à 12(d) esquematizam a distribuição de graus em  $H_1 \cap H_2$  em cada um dos casos acima.

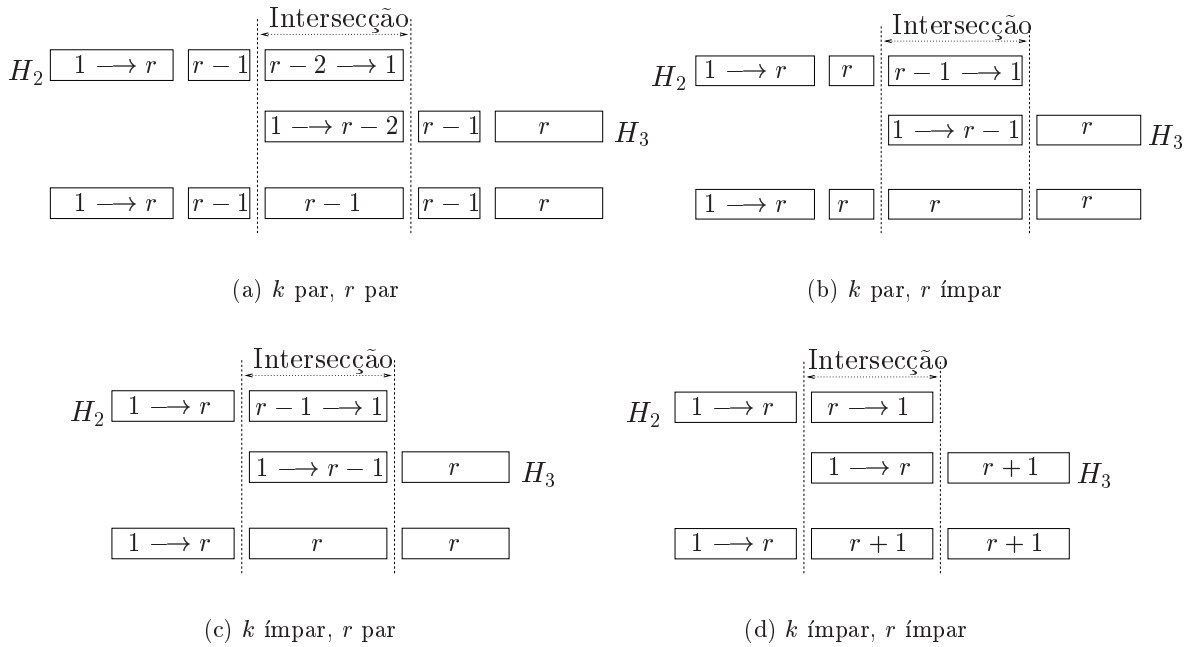


Figura 12: Cada caso da intersecção de  $H_2$  e  $H_3$ .

CASO 3 Intersecção de  $H_3$  e  $H_1$

$$\begin{aligned} |H_3 \cap H_1| &= MA_3 - ME_1 + 1 \\ &= (\alpha - 1)(k + 1) + k + \lfloor k/2 \rfloor + 2\lfloor m/2 \rfloor - (n + \lfloor k/2 \rfloor - r + 1) + 1 \\ &= 2\lfloor m/2 \rfloor - 1 \end{aligned}$$

Novamente, analisando a paridade de  $k$  e de  $r$  temos que

$$|H_3 \cap H_1| = \begin{cases} r - 1 & \text{se } k \text{ par, } r \text{ par;} \\ r - 2 & \text{se } k \text{ par, } r \text{ ímpar;} \\ r - 1 & \text{se } k \text{ ímpar, } r \text{ par;} \\ r & \text{se } k \text{ ímpar, } r \text{ ímpar.} \end{cases}$$

As Figuras de 13(a) a 13(c) esquematizam a distribuição de graus em  $H_3 \cap H_1$ .

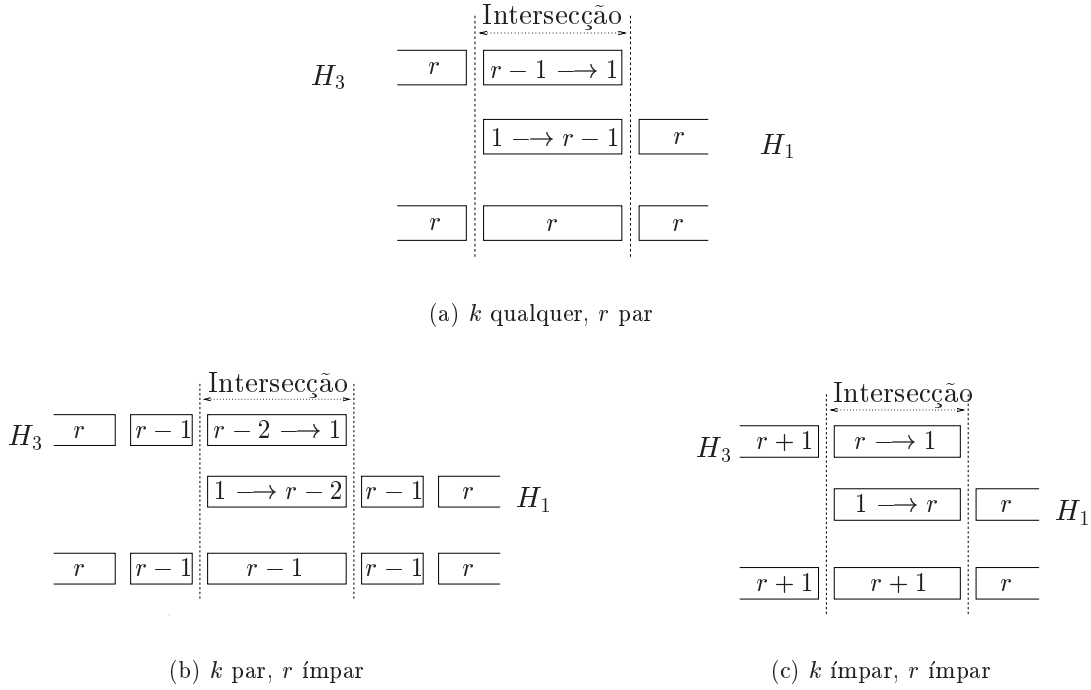


Figura 13: Cada caso da intersecção de  $H_3$  e  $H_1$ .

Como dissemos anteriormente, o grafo  $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$ . As Figuras 8, 9 e 10 esquematizam os graus dos grafos  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$ . As Figuras 11, de 12(a) à 12(d) e de 13(a) à 13(c) esquematizam as intersecções. Da análise destas figuras podemos concluir que  $\delta_H \geq r - 1$  se  $k$  for par, e  $\delta_H \geq r$  se  $k$  for ímpar. □

O resultado que buscamos é um corolário de lema anterior e está explicitado a seguir.

**TEOREMA 4.10**

O grafo  $C_n^k$ ,  $n \equiv r \pmod{k+1}$ , com  $n$  par e  $r \neq 0$ , possui uma  $(\Delta + 2)$ -coloração total.

Demonstração: O grafo  $C_n^k$  é  $(2k)$ -regular. Da definição de  $G_r$  e do Lema 4.8,  $\pi_{G_r} \cup \pi$  é uma coloração total do subgrafo  $C_n^k \setminus G_r$  com  $k + 1 + r$  cores. Pelo Lema 4.9,  $\Delta_{G_r} \leq k + 1 - r$ .

Ademais,  $G_r$  é bipartido, pois é subgrafo de  $G_1$  que é bipartido quando  $n$  é par. Logo, pelo Lema 4.2,  $G_r$  é  $(k + 1 - r)$ -aresta colorável. Assim, podemos contruir uma coloração total para o  $C_n^k$  com  $(k + 1 - r) + (k + 1 + r) = 2k + 2 = \Delta + 2$  cores.  $\square$

## Referências

- [1] M. Behzad. *Graphs and their chromatic numbers*. PhD thesis, Michigan State University, 1965.
- [2] M. Behzad, G. Chartrand, and J. K. Cooper Jr. The colour numbers of complete graphs. *J. London Mathematics Society*, 42:226–228, 1967.
- [3] C. N. Campos and C. P. de Mello. Coloração total do  $C_n^2$ . *Tend. Mat. Apl. Comp.*, 4(3):177–186, 2003. Technical Report 14, Instituto de Computação, Unicamp, 2002.
- [4] A. G. Chetwynd and A. J. W. Hilton. Some refinements of the chromatic number conjecture. *Congressus Numerantium*, 66:195–215, 1988.
- [5] A. V. Kostochka. The total coloring of a multigraph with maximal degree 4. *Discrete Mathematics*, 17:161–163, 1977.
- [6] C. J. H. McDiarmid and A. Sánchez-Arroyo. Total colouring regular bipartite graphs is NP-hard. *Discrete Mathematics*, 124:155–162, 1994.
- [7] A. Sánchez-Arroyo. Determining the total colouring number is NP-hard. *Discrete Mathematics*, 78:315–319, 1989.
- [8] A. Sánchez-Arroyo. Total colourings and complexity. Master’s thesis, University of Oxford, 1989.
- [9] V. G. Vizing. On an estimate of the chromatic class of a  $p$ -graph. *Metody Diskret. Analiz.*, 3:25–30, 1964. In Russian.
- [10] V. G. Vizing. The chromatic class of a multigraph. *Kibernetika (Kiev)*, 3:29–39, 1965. In Russian. English version in *Cybernetics* 1: 32-41.
- [11] H. P. Yap. Total colourings of graphs. In *Lecture Notes in Mathematics*, volume 1623. Springer, Berlin, 1996.
- [12] Zhang ZF, Li LZ, Wang JF, and Li HX. A note on the total chromatic number of Halin graphs with maximum degree 4. *Applied Mathematics Letters*, 11(5):23–27, sep 1998.