

O conteúdo do presente relatório é de única responsabilidade do(s) autor(es).  
The contents of this report are the sole responsibility of the author(s).

**Modelagem Geométrica de 3-Complexos  
Celulares**

*L. A. P. Lozada      C. F. X. de Mendonça*

**Relatório Técnico IC-98-21**

Maio de 1998

# Modelagem Geométrica de 3-Complexos Celulares

L. A. P. Lozada\*      C. F. X. de Mendonça†

11 de maio de 1998

## Sumário

Um complexo celular tridimensional é uma subdivisão de um espaço topológico tridimensional em um número finito de células (vértices, arestas, faces e poliedros). A estrutura topológica de um 3-complexo celular (isto é, as relações abstratas de incidência e adjacência entre seus elementos) é representado mediante esquemas de colagens de poliedros. Neste trabalho propomos uma representação geométrica para a construção de 3-complexos celulares com topologia de 3-variedades fechadas e orientáveis, baseado em colagens de “tetraedros topológicos” com orientações consistentes.

## 1 Introdução

Na topologia tridimensional existem muitos problemas em aberto. A “visualização de 3-variedades” é um destes problemas de tratamento difícil, uma vez que o nosso sistema visual é especializado ao espaço euclidiano tridimensional. Existem poucos trabalhos desenvolvidos abordando a visualização de 3-variedades, entre os quais citamos: Koçak e Laidlaw [1] para a visualização externa da esfera  $S^3$  e Gunn [3] para a visualização interna do toro e da garrafa de *Klein* tridimensional entre outras 3-variedades.

A nossa pesquisa trata da “visualização automática de 3-complexos celulares com topologia de 3-variedade”. Existem três problemas subjacentes a serem resolvidos: a construção de uma representação geométrica adequada, que nos permita expressar a topologia de 3-complexos celulares; a otimização da representação geométrica e finalmente, o desenvolvimento de um módulo de visualização, que nos permita obter uma intuição geométrica legível da topologia destes complexos. Tratamos neste trabalho o primeiro destes problemas.

Este trabalho é organizado da seguinte maneira: na seção 2 tratamos conceitos preliminares. Na seção 3, tratamos do processo de subdivisão baricêntrica. Para manipular computacionalmente tanto o 3-complexo celular quanto a sua “triangulação”, decidimos adotar a estrutura *facet-edge* (seção 4). A seção 5 trata uma proposta de modelagem geométrica da topologia de 3-complexos celulares. Na seção 6 exibimos uma aplicação da modelagem proposta, a seção 7 trata das conclusões e dos trabalhos futuros.

---

\*Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas, 13081-970 Campinas, SP. Suporte financeiro da FAPESP — Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado de São Paulo, processo N. 96/09873-0.

†Instituto de Computação, Universidade Estadual de Campinas, 13081-970 Campinas, SP.

## 2 Conceitos Básicos

Uma  $n$ -variedade topológica  $M$  de  $\mathbb{R}^m$ , onde  $m \geq n$ , é um espaço topológico no qual todo ponto possui uma vizinhança homeomorfa à  $n$ -bola aberta  $B^n$ . Uma  $n$ -variedade é *fechada* se esta é compacta e sem fronteira. Um resultado importante na topologia combinatória, devido a Moise [4], estabelece que toda  $n$ -variedade com  $n \leq 3$ , é triangulável em simplexes retilíneos. Uma  $k$ -célula aberta é um subespaço de  $\mathbb{R}^n$  homeomorfo à bola  $B^k$ ; chamamos uma 0-célula de *vértice*, uma 1-célula de *aresta*, uma 2-célula de *face*, e uma 3-célula de *poliedro*. Um *complexo celular*  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^3$  é uma coleção finita de células, tais que: (i) células pertencentes a  $\mathcal{C}$  possuem interiores disjuntos; (ii) para cada célula  $c \in \mathcal{C}$ , a fronteira de  $c$ , corresponde à união de outros elementos de  $\mathcal{C}$ ; (iii) se  $c$  e  $d \in \mathcal{C}$ , e  $c \cap d \neq \emptyset$ , logo  $c \cap d$  é a união de outros elementos de  $\mathcal{C}$ .

## 3 Subdivisão Baricêntrica

Dado um 3-complexo celular  $\mathcal{C}$ , dizemos que um vértice  $v$  é de tipo  $P$ , denotado por  $v_p$ , se este situa-se no meio de um poliedro  $p$  de  $\mathcal{C}$ ; de maneira análoga definimos os tipos:  $F$ , denotado por  $v_f$ , se este vértice situa-se no meio de uma face  $f$  de  $\mathcal{C}$ ;  $E$ , denotado por  $v_e$ , se este vértice situa-se no meio de uma aresta  $e$  de  $\mathcal{C}$ , e  $V$ , denotado por  $v_v$ , se o vértice é coincidente com um vértice do complexo  $\mathcal{C}$ .

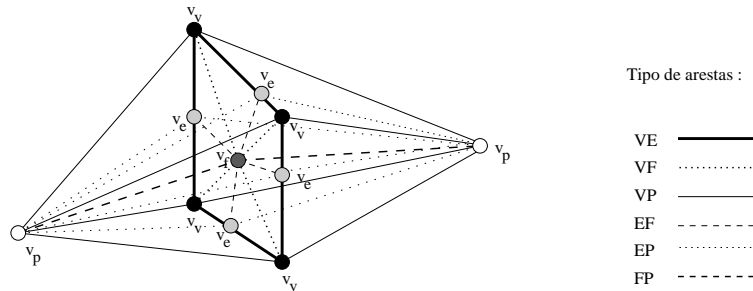


Figura 1: Subdivisão Baricêntrica.

Informalmente, a subdivisão baricêntrica  $\mathcal{S}$  do complexo  $\mathcal{C}$ , é obtida da seguinte maneira: inserimos vértices de tipo  $P$ ,  $F$  e  $E$  em  $\mathcal{C}$ ; ligamos os vértices de tipo  $P$  e  $F$  aos vértices (originais e novos) nas fronteiras do poliedro e da face respectivamente. A figura 1, ilustra parcialmente a subdivisão baricêntrica de um 3-complexo celular (consideramos que exatamente dois poliedros incidem numa face).

O conceito de subdivisão baricêntrica nos fornece a base teórica necessária para a elaboração de um modelo geométrico para a representação da topologia de um 3-complexo celular.

## 4 Estrutura de dados Facet-Edge

A estrutura *facet-edge* de Dobkin e Laszlo [2] permite manipular 3-complexos celulares. A unidade básica é o par “face-aresta”  $(f, e)$ , onde  $f$  e  $e$  são incidentes. Considera-se também o *anel de faces* incidentes em  $e$ ,  $\mathcal{F}_e$ , e o *anel de arestas* incidentes em  $f$ ,  $\mathcal{E}_f$ . O sentido particular de rotação de  $\mathcal{E}_f$  é chamado de *orientação*, enquanto de  $\mathcal{F}_e$  é chamado de *spin*.

Existem cinco funções de percurso: *Next*, *Fnext*, *Spin*, *Clock* e *Sdual*. A função *Fnext*, fornece o par face-aresta com a mesma componente aresta, mas com a próxima face ao redor da aresta segundo o *spin*. A função *Clock*, muda o sentido de rotação dos anéis de face e de aresta (veja figura 2). A função *Sdual*, fornece o correspondente par face-aresta dual.

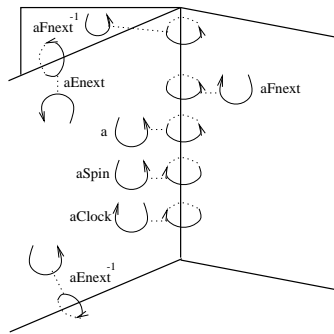


Figura 2: Funções de percurso.

## 5 Modelagem da Topologia do 3-Complexo Celular

A proposta de modelagem compreende três etapas : a Conformação dos “tetraedros topológicos”, a Colagem destes tetraedros e a Subdivisão do complexo resultante da colagem.

Nosso modelo geométrico procura ser expresso numa forma bastante “simples”, de modo que detalhes geométricos que não tenham significado topológico devam ser evitados.

### 5.1 Conformação do Tetraedro Topológico

A subdivisão baricêntrica  $\mathcal{S}$  do complexo  $\mathcal{C}$ , “triangulará” o complexo celular. Seja  $e$  uma aresta arbitrária de  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{F}_e$  o anel de faces de  $\mathcal{C}$  que incidem em  $e$ , para cada par “face-aresta”  $(f, e)$ , tal que  $f \in \mathcal{F}_e$ , definimos o *tetraedro topológico* como a união de quatro tetraedros da subdivisão baricêntrica  $\mathcal{S}$  que têm uma das duas faces  $V, E, F$  (parte da face  $f$ ) como uma de suas faces e uma das duas faces  $E, F, P$  (parte da face  $e'$ , o dual da aresta  $e$ ) como outra face. A figura 3(a) ilustra a conformação do tetraedro topológico para o par face-aresta  $(f, e)$ . Observe que os vértices extremos do tetraedro topológico são vértices de tipo  $V$  e de tipo  $P$ , e que o tetraedro contém a aresta primal  $e$  e a aresta dual  $f'$  como arestas não adjacentes (veja figura 3(b)).

O número total de tetraedros topológicos existentes na triangulação  $\Delta\mathcal{C}$ , é calculado mediante a expressão:  $t = \sum_{i=1}^m |\mathcal{F}_{e_i}|$ , onde  $m$  é o número de arestas de  $\mathcal{C}$  e  $|\mathcal{F}_{e_i}|$  é

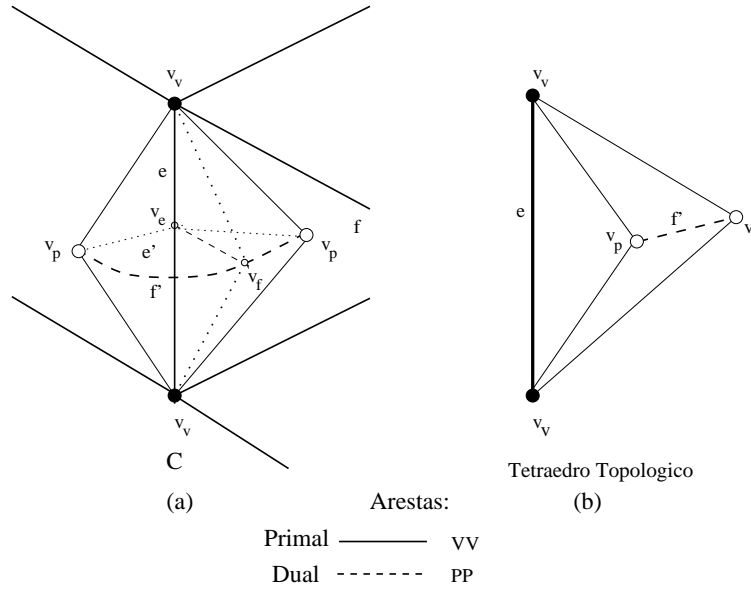


Figura 3: Conformação do tetraedro topológico.

o número de faces incidentes na aresta  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . A triangulação<sup>1</sup>  $\Delta\mathcal{C}$  pode ser considerada uma “malha de tetraedros topológicos”, onde cada poliedro de  $\mathcal{C}$  é subdividido em tetraedros topológicos<sup>2</sup>.

## 5.2 Colagem dos Tetraedros Topológicos

No processo de colagem, identificamos os tetraedros como prescrito pelas relações de adjacência entre os pares face-aresta do complexo celular, contidos no “esquema de colagem”. Isto é, colamos os tetraedros topológicos correspondentes ao par face-aresta  $a$  e o tetraedro correspondente ao par face-aresta  $b$  tal que  $b = aFnext$  (veja figura 4(a)).

### 5.2.1 Orientação no Tetraedro Topológico

Consideramos que a direção de uma aresta  $e$  no esquema de colagem induz uma orientação nas faces do tetraedro que incidem nesta aresta. Consideramos também que o *spin* é anti-horário (veja a figura 4(a)). Deste modo, um determinado par face-aresta no esquema de colagem induz sentidos de rotação nos anéis de faces e arestas do tetraedro topológico associado (veja figura 4(b)). Observe que em todo vértice do tetraedro topológico, incide sempre uma aresta “ambiguamente orientada” (desenhada por uma linha grossa).

<sup>1</sup>Esta triangulação corresponde ao análogo tridimensional do “ladrilhamento do complexo bidimensional” em Rosi [5].

<sup>2</sup>Podendo ser colados em si mesmos, admitindo que os tetraedros sejam “elásticos”.

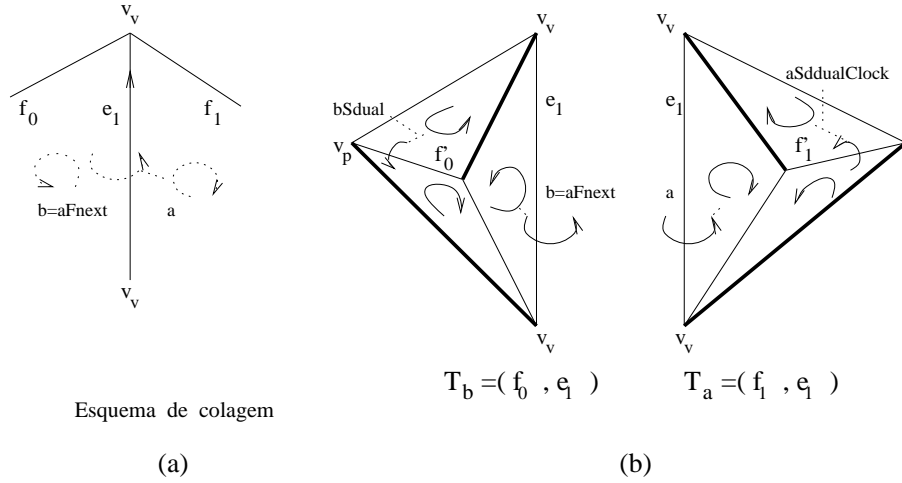


Figura 4: Par de tetraedros a serem colados.

### 5.2.2 Processo de Colagem

Em princípio, a colagem deverá ser aplicada aos tetraedros topológicos associados a todos os pares face-aresta  $a$  e  $aFnext$  de  $\mathcal{C}$ , tanto no espaço primal como no dual. O processo de colagem é realizado mediante o algoritmo *GlueTetra*<sup>3</sup> a seguir:

**Algoritmo 1** *GlueTetra*( $a, aFnext$ ):

1.  $firsta \leftarrow a$ ;
2. Repita
  - 2.1 Se  $\mathcal{F}_a \not\cong \mathcal{F}_b$ 
    - 2.1.1 *SpliceFacets*<sup>4</sup> ( $a, bFnext^{-1}$ );
  - 2.2 *SpliceFacets* ( $a, aFnext^{-1}$ );
  - 2.3  $a \leftarrow aEnext$ ;
  - 2.4  $b \leftarrow bEnext$ ;
3. Até que  $a = firsta$ ;

A figura 5 ilustra o algoritmo *GlueTetra*. Observe que a colagem dos tetraedros topológicos é realizado de maneira tal, que arestas ambigualmente orientadas e arestas com orientações definidas são identificadas aos pares. Assim, devemos considerar que as faces de tipo *VPP* no tetraedro associado ao par  $a$  tenham orientações contrárias às faces *VPP* no tetraedro associado ao par  $b = aFnext$ . Após a colagem dos tetraedros topológicos as arestas ambigualmente orientadas possuem orientações coerentes.

<sup>3</sup>Caso particular do operador *meld* da estrutura *facet-edge*.

<sup>4</sup>Operador da estrutura *facet-edge* que toma como argumento dois pares face-aresta  $a, b$  e modifica os anéis  $\mathcal{F}_a$  e  $\mathcal{F}_b$

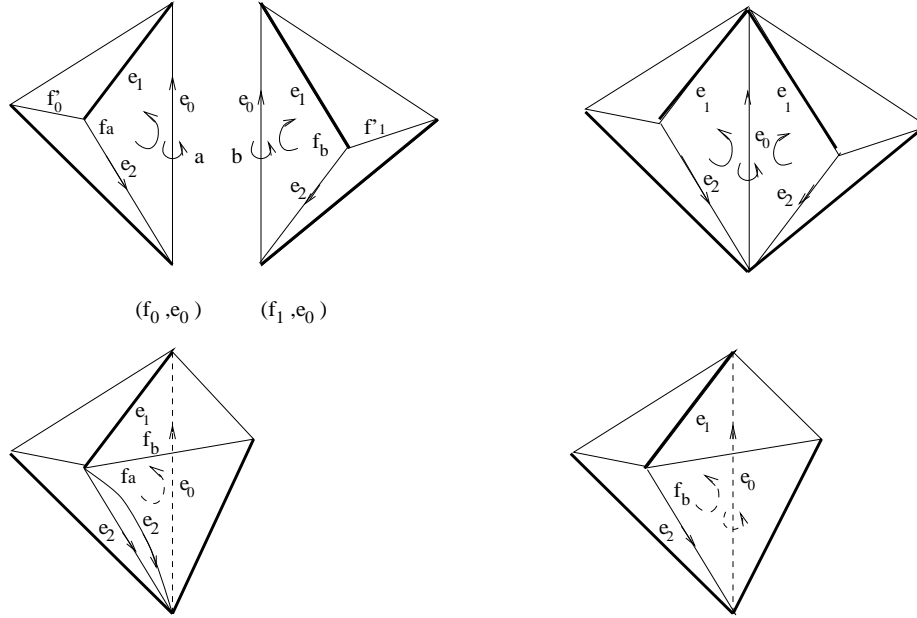


Figura 5: Ilustração do algoritmo *GlueTetra*.

É possível que durante o processo de colagem alguns tetraedros topológicos tenham que ser colados em si mesmo, isto ocorre quando o esquema de colagem tem um par face-aresta adjacente a si mesmo (como na figura 6(b)), i.e., quando  $aFnext = a$ . Para superar este inconveniente, contamos com o algoritmo: *Subdivisão Radial*, que permite a colagem do tetraedro sem degenerar-lo (como na figura 6(d)). A idéia intuitiva deste algoritmo consiste em subdividir o tetraedro em novos tetraedros mediante a inserção de faces incidentes na aresta  $e$ , sobre o qual incidem o par de faces do tetraedro a serem coladas e incidentes na aresta oposta a  $e$  (veja figura 6(c)).

O processo de colagem nos obrigará a deformar os tetraedros topológicos, com isto a visualização da triangulação torna-se complexa. Uma abordagem para esse problema consiste em subdividir de maneira “refinada” o complexo resultante da colagem dos tetraedros topológicos.

### 5.3 Subdivisão da Colagem

Uma vez que a nossa abordagem contempla primeiro a colagem dos tetraedros e posteriormente a subdivisão das colagens, garante-se a não conformação de pares de tetraedros degenerados<sup>5</sup>. Porém, certas configurações degeneradas de dimensão mais baixa podem eventualmente aparecer, como: pares de arestas e/ou triângulos degenerados. Uma vez que topologicamente estes pares consistem de elementos diferentes, geometricamente eles sempre serão coincidentes quaisquer que sejam as coordenadas atribuídas aos vértices que definem as arestas e/ou faces. Assim, torna-se necessário a elaboração de rotinas que per-

<sup>5</sup>Tetraedros distintos incidentes nos mesmos quatro vértices.

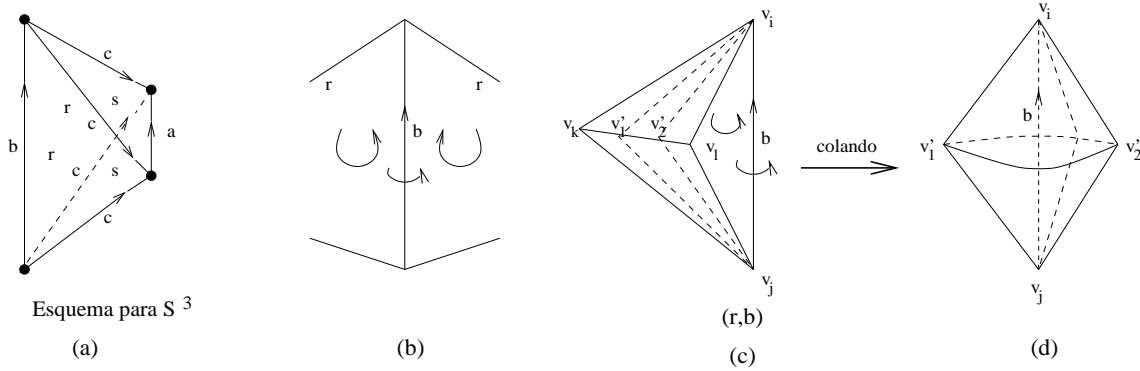


Figura 6: Ilustração da Subdivisão Radial.

mitam eliminar estas configurações. Contamos com algoritmos simples para superar estes inconvenientes.

Precisamos também de rotinas para a subdivisão das colagens dos tetraedros topológicos. A abordagem a seguir consiste em subdividir de maneira refinada cada um dos tetraedros topológicos em  $k^3$  tetraedros retilíneos. Com esta subdivisão o complexo celular  $\mathcal{C}$  com  $t$  pares face-aresta pode ser substituído pela triangulação refinada de ordem  $k$ ,  $\Delta_k \mathcal{C}$  tendo  $tk^3$  tetraedros,  $2tk^3$  triângulos e  $t(k^3 + k^2 + 1)$  arestas. A figura 7 ilustra um tetraedro subdividido numa malha de ordem  $k = 2$  (8 tetraedros).

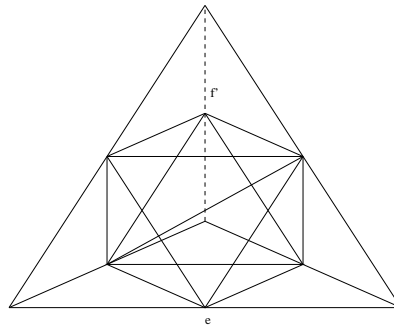


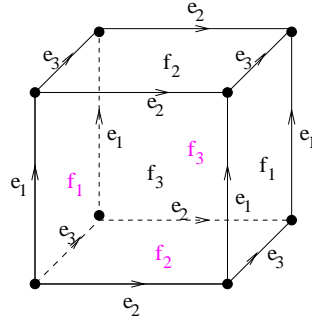
Figura 7: Tetraedro subdividido.

## 6 Exemplo

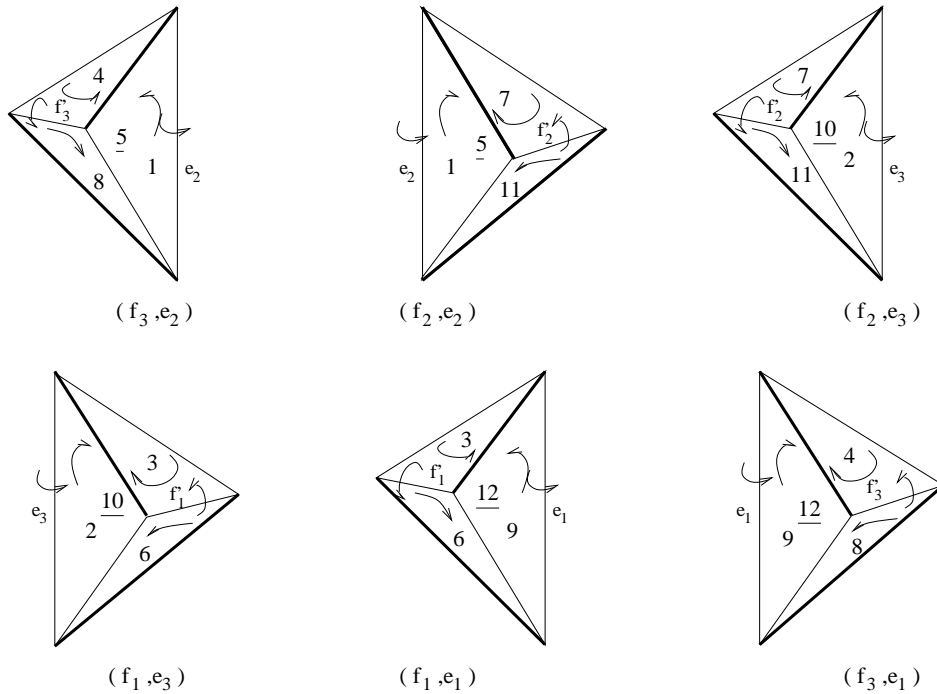
A figura 8 ilustra o esquema de colagem para a obtenção do complexo com topologia do toro tridimensional  $T^3$ , observe que este complexo possui um vértice, três arestas, três faces e um poliedro.

A “característica de Euler tridimensional”,  $\mathcal{X}(\mathcal{C}) = V - E + F - P$ , nos permite decidir se um dado 3-complexo celular  $\mathcal{C}$ , é ou não uma 3-variedade, especificamente,  $\mathcal{X}(\mathcal{C}) = 0$  se e somente se  $\mathcal{C}$  é uma 3-variedade. O 3-complexo tem um total de seis pares face-aresta e assim seis tetraedros topológicos associados. A figura 9, indica os pares de faces a serem



Figura 8: Esquema de colagem do  $T^3$ .

identificados nos tetraedros (faces com números sublinhados encontram-se por detrás do tetraedro).

Figura 9: Tetraedros a colar para a obtenção de  $T^3$ .

## 7 Conclusão e Trabalhos Futuros

Apresentamos uma abordagem para a modelagem geométrica de complexos celulares com topologia de 3-variedades orientáveis e fechadas via colagens de tetraedros topológicos com orientações consistentes.

As próximas etapas em nossa pesquisa compreendem a definição de *funções de energia*<sup>6</sup>. O objetivo desta etapa é garantir uma série de qualidades visuais que nos permita obter uma intuição geométrica legível da topologia destes complexos celulares.

Acreditamos que a modelagem aqui proposta permite por meio da otimização das funções de energia a realização de instâncias geométricas dos 3-complexos possuindo critérios estéticos desejáveis.

## Referências

- [1] H. Koçak and D. Laidlaw. Computer Graphics and the Geometry of  $S^3$ . *The Mathematical Intelligencer.*, 9(1):8–10, 1987.
- [2] D. P. Dobkin and M. J. Laszlo. Primitives for the Manipulation of Three-dimensional Subdivisions. *Algorithmica*, 4:3–32, 1989.
- [3] C. Gunn. Discrete Groups and Visualization of Three-Dimensional Manifolds . *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series.*, pages 255–262, 1993.
- [4] E. E. Moise. Affine Structures in 3-manifolds. *Ann. Math. Studies.*, 56:96–114, 1952.
- [5] R. M. Rosi. Visualização Automática de Complexos Celulares Arbitrários. *IC-UNICAMP*, 1995. Master's Thesis.

---

<sup>6</sup>Funções que medem as características indesejáveis da geometria dos 3-complexos celulares