

MC-202

Grafos

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

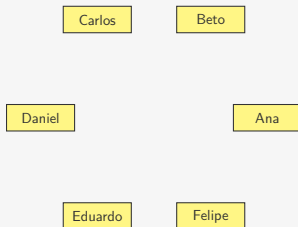
Atualizado em: 2025-10-20 20:16

Redes Sociais

Como representar amizades em uma rede social?

Redes Sociais

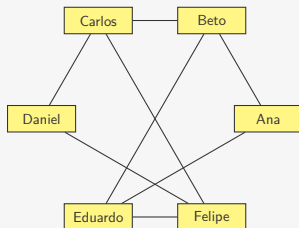
Como representar amizades em uma rede social?



Temos um conjunto de pessoas (Ana, Beto, Carlos, etc...)

Redes Sociais

Como representar amizades em uma rede social?



Temos um conjunto de pessoas (Ana, Beto, Carlos, etc...)

- Ligamos duas pessoas se elas se conhecem

Grafos

Um **Grafo** é um conjunto de objetos ligados entre si

Grafos

Um **Grafo** é um conjunto de objetos ligados entre si

- Chamamos esses objetos de **vértices**

Grafos

Um **Grafo** é um conjunto de objetos ligados entre si

- Chamamos esses objetos de **vértices**
 - Ex: pessoas em uma rede social

Grafos

Um **Grafo** é um conjunto de objetos ligados entre si

- Chamamos esses objetos de **vértices**
 - Ex: pessoas em uma rede social
- Chamamos as conexões entre os objetos de **arestas**

Grafos

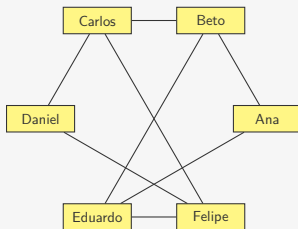
Um **Grafo** é um conjunto de objetos ligados entre si

- Chamamos esses objetos de **vértices**
 - Ex: pessoas em uma rede social
- Chamamos as conexões entre os objetos de **arestas**
 - Ex: relação de amizade na rede social

Grafos

Um **Grafo** é um conjunto de objetos ligados entre si

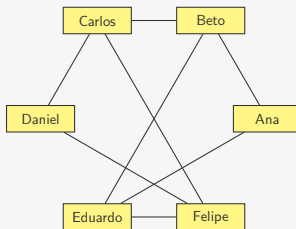
- Chamamos esses objetos de **vértices**
 - Ex: pessoas em uma rede social
- Chamamos as conexões entre os objetos de **arestas**
 - Ex: relação de amizade na rede social



Grafos

Um **Grafo** é um conjunto de objetos ligados entre si

- Chamamos esses objetos de **vértices**
 - Ex: pessoas em uma rede social
- Chamamos as conexões entre os objetos de **arestas**
 - Ex: relação de amizade na rede social

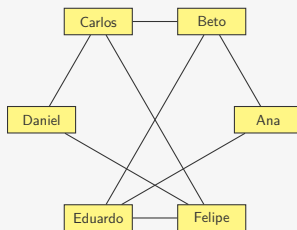


Representamos um grafo visualmente

Grafos

Um **Grafo** é um conjunto de objetos ligados entre si

- Chamamos esses objetos de **vértices**
 - Ex: pessoas em uma rede social
- Chamamos as conexões entre os objetos de **arestas**
 - Ex: relação de amizade na rede social



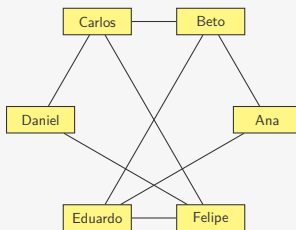
Representamos um grafo visualmente

- com os vértices representados por pontos e

Grafos

Um **Grafo** é um conjunto de objetos ligados entre si

- Chamamos esses objetos de **vértices**
 - Ex: pessoas em uma rede social
- Chamamos as conexões entre os objetos de **arestas**
 - Ex: relação de amizade na rede social



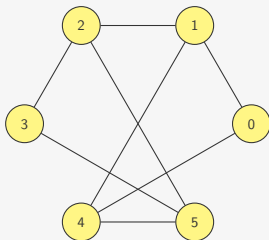
Representamos um grafo visualmente

- com os vértices representados por pontos e
- as arestas representadas por curvas ligando dois vértices

Grafos

Um **Grafo** é um conjunto de objetos ligados entre si

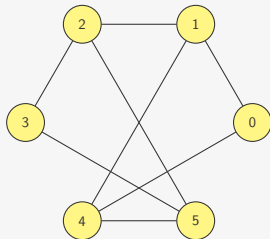
- Chamamos esses objetos de **vértices**
 - Ex: pessoas em uma rede social
- Chamamos as conexões entre os objetos de **arestas**
 - Ex: relação de amizade na rede social



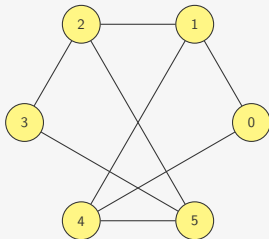
Representamos um grafo visualmente

- com os vértices representados por pontos e
- as arestas representadas por curvas ligando dois vértices

Grafos

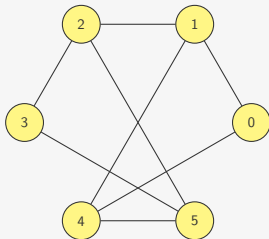


Grafos



Matematicamente, um grafo G é um par ordenado (V, E)

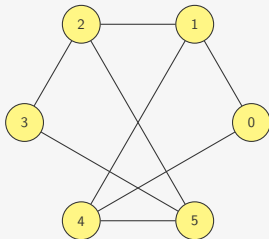
Grafos



Matematicamente, um grafo G é um par ordenado (V, E)

- V é o conjunto de vértices do grafo

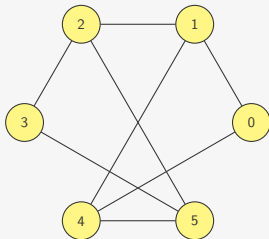
Grafos



Matematicamente, um grafo G é um par ordenado (V, E)

- V é o conjunto de vértices do grafo
 - Ex: $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

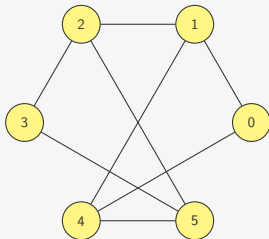
Grafos



Matematicamente, um grafo G é um par ordenado (V, E)

- V é o conjunto de vértices do grafo
 - Ex: $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- E é o conjunto de arestas do grafo

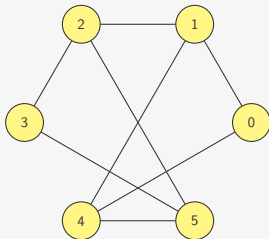
Grafos



Matematicamente, um grafo G é um par ordenado (V, E)

- V é o conjunto de vértices do grafo
 - Ex: $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- E é o conjunto de arestas do grafo
 - Representamos uma aresta ligando $u, v \in V$ como $\{u, v\}$

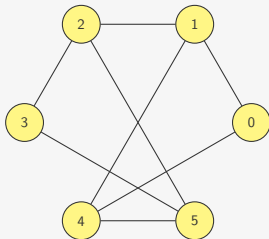
Grafos



Matematicamente, um grafo G é um par ordenado (V, E)

- V é o conjunto de vértices do grafo
 - Ex: $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- E é o conjunto de arestas do grafo
 - Representamos uma aresta ligando $u, v \in V$ como $\{u, v\}$
 - Para toda aresta $\{u, v\}$ em E , temos que $u \neq v$

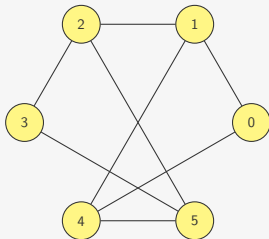
Grafos



Matematicamente, um grafo G é um par ordenado (V, E)

- V é o conjunto de vértices do grafo
 - Ex: $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- E é o conjunto de arestas do grafo
 - Representamos uma aresta ligando $u, v \in V$ como $\{u, v\}$
 - Para toda aresta $\{u, v\}$ em E , temos que $u \neq v$
 - Existe no máximo uma aresta $\{u, v\}$ em E

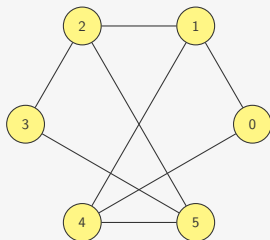
Grafos



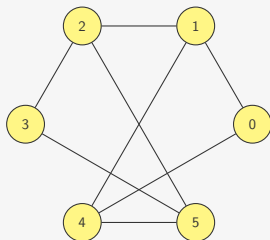
Matematicamente, um grafo G é um par ordenado (V, E)

- V é o conjunto de vértices do grafo
 - Ex: $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- E é o conjunto de arestas do grafo
 - Representamos uma aresta ligando $u, v \in V$ como $\{u, v\}$
 - Para toda aresta $\{u, v\}$ em E , temos que $u \neq v$
 - Existe no máximo uma aresta $\{u, v\}$ em E
 - Ex:
$$E = \left\{ \{0, 1\}, \{0, 4\}, \{5, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 5\}, \{4, 5\}, \{3, 2\}, \{1, 4\} \right\}$$

Adjacência

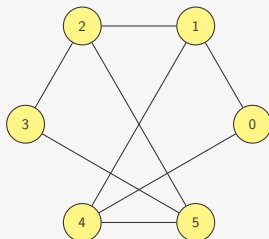


Adjacência



O vértice 0 é vizinho do vértice 4

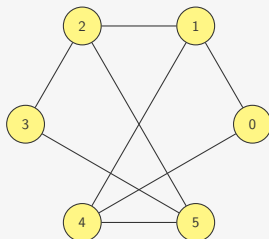
Adjacência



O vértice 0 é vizinho do vértice 4

- Dizemos que 0 e 4 são adjacentes

Adjacência



O vértice 0 é vizinho do vértice 4

- Dizemos que 0 e 4 são adjacentes
- Os vértices 0, 1 e 5 formam a vizinhança do vértice 4

Matriz de Adjacências

Vamos representar um grafo por uma **matriz de adjacências**

Matriz de Adjacências

Vamos representar um grafo por uma **matriz de adjacências**

- Se o grafo tem n vértices

Matriz de Adjacências

Vamos representar um grafo por uma **matriz de adjacências**

- Se o grafo tem n vértices
- Os vértices serão numerado de 0 a $n - 1$

Matriz de Adjacências

Vamos representar um grafo por uma **matriz de adjacências**

- Se o grafo tem n vértices
- Os vértices serão numerado de 0 a $n - 1$
- A matriz de adjacências é $n \times n$

Matriz de Adjacências

Vamos representar um grafo por uma **matriz de adjacências**

- Se o grafo tem n vértices
- Os vértices serão numerado de 0 a $n - 1$
- A matriz de adjacências é $n \times n$
- $\text{adjacencia}[u][v] = 1$ — u e v são vizinhos

Matriz de Adjacências

Vamos representar um grafo por uma **matriz de adjacências**

- Se o grafo tem n vértices
- Os vértices serão numerado de 0 a $n - 1$
- A matriz de adjacências é $n \times n$
- $\text{adjacencia}[u][v] = 1$ — u e v são vizinhos
- $\text{adjacencia}[u][v] = 0$ — u e v não são vizinhos

Matriz de Adjacências

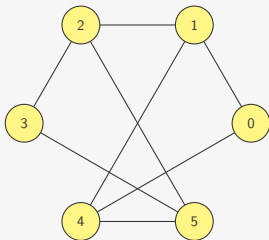
Vamos representar um grafo por uma **matriz de adjacências**

- Se o grafo tem n vértices
- Os vértices serão numerado de 0 a $n - 1$
- A matriz de adjacências é $n \times n$
- $\text{adjacencia}[u][v] = 1$ — u e v são vizinhos
- $\text{adjacencia}[u][v] = 0$ — u e v não são vizinhos

Matriz de Adjacências

Vamos representar um grafo por uma **matriz de adjacências**

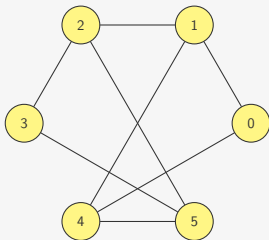
- Se o grafo tem n vértices
- Os vértices serão numerado de 0 a $n - 1$
- A matriz de adjacências é $n \times n$
- $\text{adjacencia}[u][v] = 1$ — u e v são vizinhos
- $\text{adjacencia}[u][v] = 0$ — u e v não são vizinhos



Matriz de Adjacências

Vamos representar um grafo por uma **matriz de adjacências**

- Se o grafo tem n vértices
- Os vértices serão numerado de 0 a $n - 1$
- A matriz de adjacências é $n \times n$
- $\text{adjacencia}[u][v] = 1$ — u e v são vizinhos
- $\text{adjacencia}[u][v] = 0$ — u e v não são vizinhos



	0	1	2	3	4	5
0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0
2	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1
4	1	1	0	0	0	1
5	0	0	1	1	1	0

TAD Grafo

```
1 typedef grafo *p_grafo;
2
3 struct grafo {
4     int **adj;
5     int n;
6 };
7
8 p_grafo criar_grafo(int n);
9
10 void destroi_grafo(p_grafo g);
11
12 void insere_aresta(p_grafo g, int u, int v);
13
14 void remove_aresta(p_grafo g, int u, int v);
15
16 int tem_aresta(p_grafo g, int u, int v);
17
18 void imprime_arestas(p_grafo g);
19
20 ...
```

Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {
```

Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {  
2     int i, j;  
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));
```

Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {  
2     int i, j;  
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));  
4     g->n = n;
```

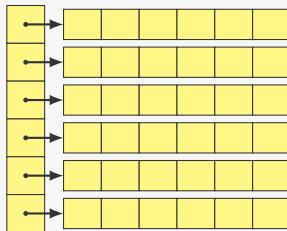

Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {  
2     int i, j;  
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));  
4     g->n = n;  
5     g->adj = malloc(n * sizeof(int *));
```



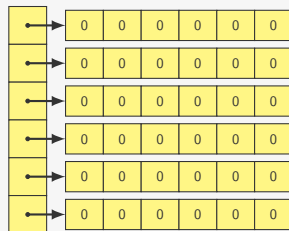
Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {  
2     int i, j;  
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));  
4     g->n = n;  
5     g->adj = malloc(n * sizeof(int *));  
6     for (i = 0; i < n; i++)  
7         g->adj[i] = malloc(n * sizeof(int));
```



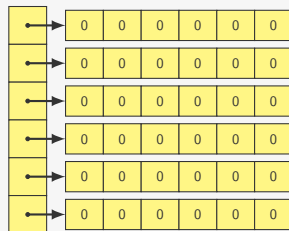
Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {  
2     int i, j;  
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));  
4     g->n = n;  
5     g->adj = malloc(n * sizeof(int *));  
6     for (i = 0; i < n; i++)  
7         g->adj[i] = malloc(n * sizeof(int));  
8     for (i = 0; i < n; i++)  
9         for (j = 0; j < n; j++)  
10            g->adj[i][j] = 0;
```



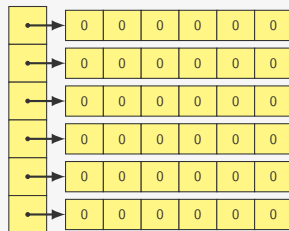
Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {
2     int i, j;
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));
4     g->n = n;
5     g->adj = malloc(n * sizeof(int *));
6     for (i = 0; i < n; i++)
7         g->adj[i] = malloc(n * sizeof(int));
8     for (i = 0; i < n; i++)
9         for (j = 0; j < n; j++)
10             g->adj[i][j] = 0;
11     return g;
12 }
```



Inicialização e Destruição

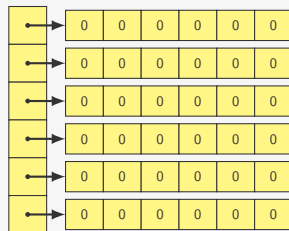
```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {
2     int i, j;
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));
4     g->n = n;
5     g->adj = malloc(n * sizeof(int *));
6     for (i = 0; i < n; i++)
7         g->adj[i] = malloc(n * sizeof(int));
8     for (i = 0; i < n; i++)
9         for (j = 0; j < n; j++)
10             g->adj[i][j] = 0;
11     return g;
12 }
```



```
1 void destroi_grafo(p_grafo g) {
```

Inicialização e Destruição

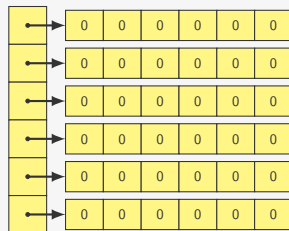
```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {
2     int i, j;
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));
4     g->n = n;
5     g->adj = malloc(n * sizeof(int *));
6     for (i = 0; i < n; i++)
7         g->adj[i] = malloc(n * sizeof(int));
8     for (i = 0; i < n; i++)
9         for (j = 0; j < n; j++)
10             g->adj[i][j] = 0;
11     return g;
12 }
```



```
1 void destroi_grafo(p_grafo g) {
2     int i;
3     for (i = 0; i < g->n; i++)
4         free(g->adj[i]);
```

Inicialização e Destruição

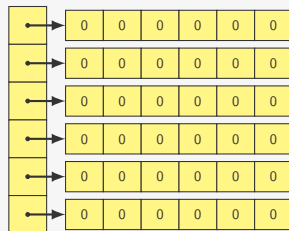
```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {
2     int i, j;
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));
4     g->n = n;
5     g->adj = malloc(n * sizeof(int *));
6     for (i = 0; i < n; i++)
7         g->adj[i] = malloc(n * sizeof(int));
8     for (i = 0; i < n; i++)
9         for (j = 0; j < n; j++)
10             g->adj[i][j] = 0;
11     return g;
12 }
```



```
1 void destroi_grafo(p_grafo g) {
2     int i;
3     for (i = 0; i < g->n; i++)
4         free(g->adj[i]);
5     free(g->adj);
6 }
```

Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {
2     int i, j;
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));
4     g->n = n;
5     g->adj = malloc(n * sizeof(int *));
6     for (i = 0; i < n; i++)
7         g->adj[i] = malloc(n * sizeof(int));
8     for (i = 0; i < n; i++)
9         for (j = 0; j < n; j++)
10             g->adj[i][j] = 0;
11     return g;
12 }
```



```
1 void destroi_grafo(p_grafo g) {
2     int i;
3     for (i = 0; i < g->n; i++)
4         free(g->adj[i]);
5     free(g->adj);
6     free(g);
7 }
```


Manipulando arestas

```
1 void insere_aresta(p_grafo g, int u, int v) {  
2     g->adj[u][v] = 1;  
3     g->adj[v][u] = 1;  
4 }
```

Manipulando arestas

```
1 void insere_aresta(p_grafo g, int u, int v) {  
2     g->adj[u][v] = 1;  
3     g->adj[v][u] = 1;  
4 }
```

```
1 void remove_aresta(p_grafo g, int u, int v) {  
2     g->adj[u][v] = 0;  
3     g->adj[v][u] = 0;  
4 }
```

Manipulando arestas

```
1 void insere_aresta(p_grafo g, int u, int v) {  
2     g->adj[u][v] = 1;  
3     g->adj[v][u] = 1;  
4 }
```

```
1 void remove_aresta(p_grafo g, int u, int v) {  
2     g->adj[u][v] = 0;  
3     g->adj[v][u] = 0;  
4 }
```

```
1 int tem_aresta(p_grafo g, int u, int v) {  
2     return g->adj[u][v];  
3 }
```

Lendo e Imprimindo um Grafo

```
1 p_grafo le_grafo() {
```

Lendo e Imprimindo um Grafo

```
1 p_grafo le_grafo() {  
2     int num_vertices, num_arestas, u, v;  
3     p_grafo g;
```

Lendo e Imprimindo um Grafo

```
1 p_grafo le_grafo() {  
2     int num_vertices, num_arestas, u, v;  
3     p_grafo g;  
4     scanf("%d %d", &num_vertices, &num_arestas);
```

Lendo e Imprimindo um Grafo

```
1 p_grafo le_grafo() {  
2     int num_vertices, num_arestas, u, v;  
3     p_grafo g;  
4     scanf("%d %d", &num_vertices, &num_arestas);  
5     g = criar_grafo(num_vertices);
```

Lendo e Imprimindo um Grafo

```
1 p_grafo le_grafo() {  
2     int num_vertices, num_arestas, u, v;  
3     p_grafo g;  
4     scanf("%d %d", &num_vertices, &num_arestas);  
5     g = criar_grafo(num_vertices);  
6     for (int i = 0; i < num_arestas; i++) {
```


Lendo e Imprimindo um Grafo

```
1 p_grafo le_grafo() {
2     int num_vertices, num_arestas, u, v;
3     p_grafo g;
4     scanf("%d %d", &num_vertices, &num_arestas);
5     g = criar_grafo(num_vertices);
6     for (int i = 0; i < num_arestas; i++) {
7         scanf("%d %d", &u, &v);
```

Lendo e Imprimindo um Grafo

```
1 p_grafo le_grafo() {
2     int num_vertices, num_arestas, u, v;
3     p_grafo g;
4     scanf("%d %d", &num_vertices, &num_arestas);
5     g = criar_grafo(num_vertices);
6     for (int i = 0; i < num_arestas; i++) {
7         scanf("%d %d", &u, &v);
8         insere_aresta(g, u, v);
9     }
10    return g;
11 }
```

Lendo e Imprimindo um Grafo

```
1 p_grafo le_grafo() {
2     int num_vertices, num_arestas, u, v;
3     p_grafo g;
4     scanf("%d %d", &num_vertices, &num_arestas);
5     g = criar_grafo(num_vertices);
6     for (int i = 0; i < num_arestas; i++) {
7         scanf("%d %d", &u, &v);
8         insere_aresta(g, u, v);
9     }
10    return g;
11 }
```

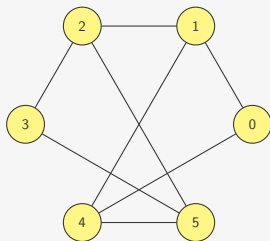
```
1 void imprime_arestas(p_grafo g) {
2     int u, v;
3     for (u = 0; u < g->n; u++)
4         for (v = u + 1; v < g->n; v++)
5             if (g->adj[u][v])
6                 printf("{%d,%d}\n", u, v);
7 }
```

Quem é o mais popular?

O **grau** de um vértice é o seu número de vizinhos

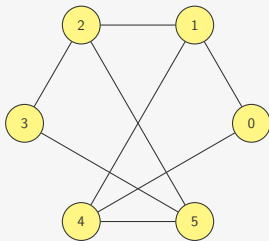
Quem é o mais popular?

O **grau** de um vértice é o seu número de vizinhos



Quem é o mais popular?

O **grau** de um vértice é o seu número de vizinhos



```
1 int grau(p_grafo g, int u) {  
2     int v, grau = 0;  
3     for (v = 0; v < g->n; v++)  
4         if (g->adj[u][v])  
5             grau++;  
6     return grau;  
7 }
```

Quem é o mais popular?

```
1 int mais_popular(p_grafo g) {
```

Quem é o mais popular?

```
1 int mais_popular(p_grafo g) {  
2     int max, grau_max, grau_atual;
```


Quem é o mais popular?

```
1 int mais_popular(p_grafo g) {  
2     int max, grau_max, grau_atual;  
3     max = 0;  
4     grau_max = grau(g, 0);
```

Quem é o mais popular?

```
1 int mais_popular(p_grafo g) {  
2     int max, grau_max, grau_atual;  
3     max = 0;  
4     grau_max = grau(g, 0);  
5     for (int u = 1; u < g->n; u++) {
```

Quem é o mais popular?

```
1 int mais_popular(p_grafo g) {  
2     int max, grau_max, grau_atual;  
3     max = 0;  
4     grau_max = grau(g, 0);  
5     for (int u = 1; u < g->n; u++) {  
6         grau_atual = grau(g, u);
```

Quem é o mais popular?

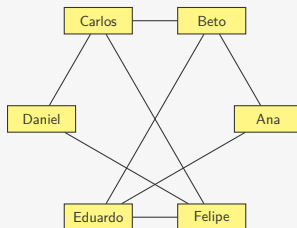
```
1 int mais_popular(p_grafo g) {  
2     int max, grau_max, grau_atual;  
3     max = 0;  
4     grau_max = grau(g, 0);  
5     for (int u = 1; u < g->n; u++) {  
6         grau_atual = grau(g, u);  
7         if (grau_atual > grau_max) {  
8             grau_max = grau_atual;  
9             max = u;  
10    }  
11 }
```

Quem é o mais popular?

```
1 int mais_popular(p_grafo g) {
2     int max, grau_max, grau_atual;
3     max = 0;
4     grau_max = grau(g, 0);
5     for (int u = 1; u < g->n; u++) {
6         grau_atual = grau(g, u);
7         if (grau_atual > grau_max) {
8             grau_max = grau_atual;
9             max = u;
10        }
11    }
12    return max;
13 }
```

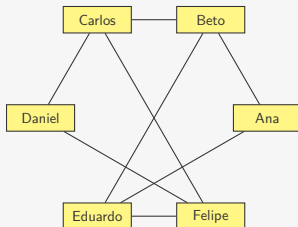
Indicando amigos

Queremos indicar novos amigos para Ana



Indicando amigos

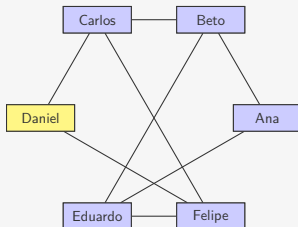
Queremos indicar novos amigos para Ana



Quem são os amigos dos amigos da Ana?

Indicando amigos

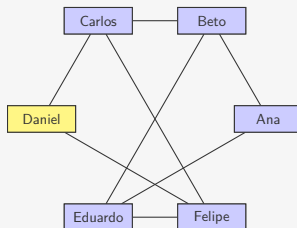
Queremos indicar novos amigos para Ana



Quem são os amigos dos amigos da Ana?

Indicando amigos

Queremos indicar novos amigos para Ana

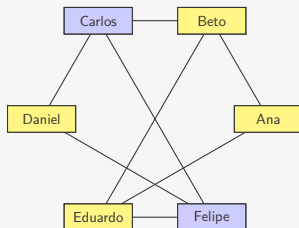


Quem são os amigos dos amigos da Ana?

- Dentre esses quais não são ela mesma ou amigos dela?

Indicando amigos

Queremos indicar novos amigos para Ana



Quem são os amigos dos amigos da Ana?

- Dentre esses quais não são ela mesma ou amigos dela?

Indicando amigos



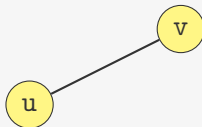
```
1 void imprime_recomendacoes(p_grafo g, int u) {
```

Indicando amigos



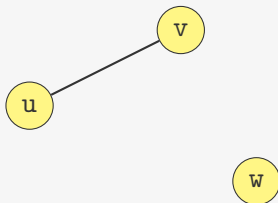
```
1 void imprime_recomendacoes(p_grafo g, int u) {  
2     int v, w;  
3     for (v = 0; v < g->n; v++) {
```

Indicando amigos



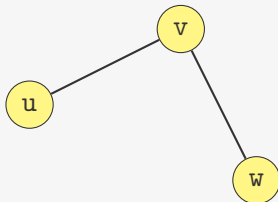
```
1 void imprime_recomendacoes(p_grafo g, int u) {  
2     int v, w;  
3     for (v = 0; v < g->n; v++) {  
4         if (g->adj[u][v]) {
```

Indicando amigos



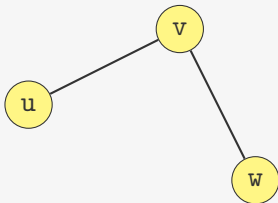
```
1 void imprime_recomendacoes(p_grafo g, int u) {  
2     int v, w;  
3     for (v = 0; v < g->n; v++) {  
4         if (g->adj[u][v]) {  
5             for (w = 0; w < g->n; w++) {
```

Indicando amigos



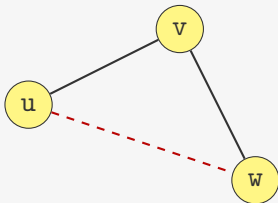
```
1 void imprime_recomendacoes(p_grafo g, int u) {  
2     int v, w;  
3     for (v = 0; v < g->n; v++) {  
4         if (g->adj[u][v]) {  
5             for (w = 0; w < g->n; w++) {  
6                 if (g->adj[v][w]
```

Indicando amigos



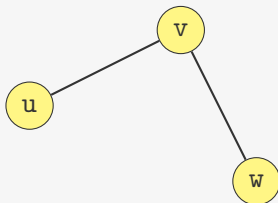
```
1 void imprime_recomendacoes(p_grafo g, int u) {  
2     int v, w;  
3     for (v = 0; v < g->n; v++) {  
4         if (g->adj[u][v]) {  
5             for (w = 0; w < g->n; w++) {  
6                 if (g->adj[v][w] && w != u
```


Indicando amigos



```
1 void imprime_recomendacoes(p_grafo g, int u) {  
2     int v, w;  
3     for (v = 0; v < g->n; v++) {  
4         if (g->adj[u][v]) {  
5             for (w = 0; w < g->n; w++) {  
6                 if (g->adj[v][w] && w != u && !g->adj[u][w])
```

Indicando amigos



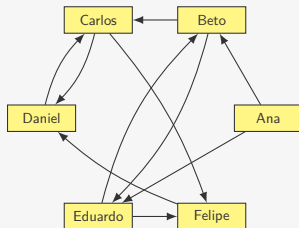
```
1 void imprime_recomendacoes(p_grafo g, int u) {  
2     int v, w;  
3     for (v = 0; v < g->n; v++) {  
4         if (g->adj[u][v]) {  
5             for (w = 0; w < g->n; w++) {  
6                 if (g->adj[v][w] && w != u && !g->adj[u][w])  
7                     printf("%d\n", w);  
8             }  
9         }  
10    }  
11 }
```

Seguindo e sendo seguido

Como representar seguidores em redes sociais?

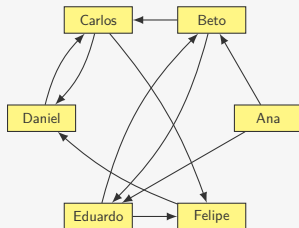
Seguindo e sendo seguido

Como representar seguidores em redes sociais?



Seguindo e sendo seguido

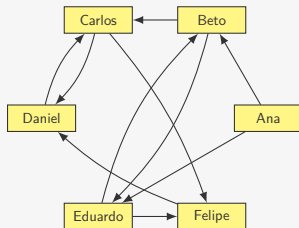
Como representar seguidores em redes sociais?



- A Ana segue o Beto e o Eduardo

Seguindo e sendo seguido

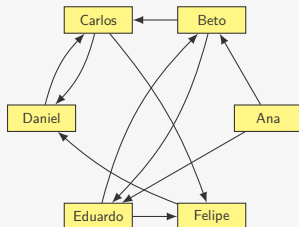
Como representar seguidores em redes sociais?



- A Ana segue o Beto e o Eduardo
- Ninguém segue a Ana

Seguindo e sendo seguido

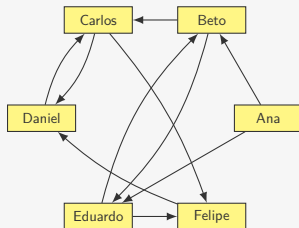
Como representar seguidores em redes sociais?



- A **Ana** segue o **Beto** e o **Eduardo**
- Ninguém segue a **Ana**
- O **Daniel** é seguido pelo **Carlos** e pelo **Felipe**

Seguindo e sendo seguido

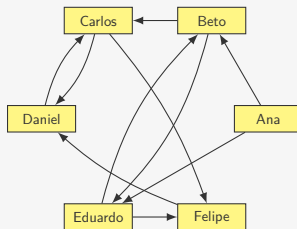
Como representar seguidores em redes sociais?



- A **Ana** segue o **Beto** e o **Eduardo**
- Ninguém segue a **Ana**
- O **Daniel** é seguido pelo **Carlos** e pelo **Felipe**
- O **Eduardo** segue o **Beto** que o segue de volta

Grafos dirigidos

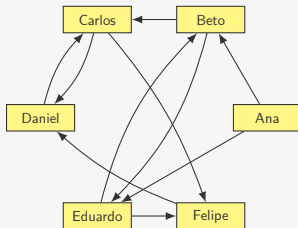
Um Grafo dirigido (ou Digrafo)



Grafos dirigidos

Um **Grafo dirigido** (ou Digrafo)

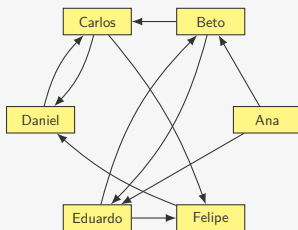
- Tem um conjunto de **vértices**



Grafos dirigidos

Um **Grafo dirigido** (ou Digrafo)

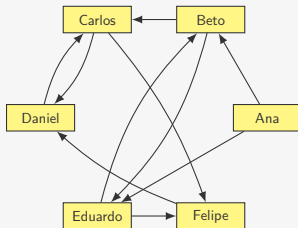
- Tem um conjunto de **vértices**
- Conectados através de um conjunto de **arcos**



Grafos dirigidos

Um **Grafo dirigido** (ou Digrafo)

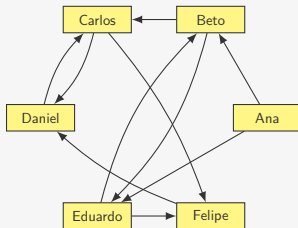
- Tem um conjunto de **vértices**
- Conectados através de um conjunto de **arcos**
 - arestas dirigidas, indicando início e fim



Grafos dirigidos

Um **Grafo dirigido** (ou Digrafo)

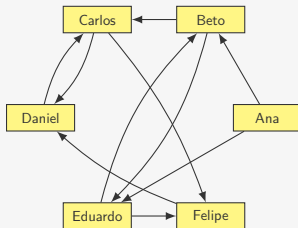
- Tem um conjunto de **vértices**
- Conectados através de um conjunto de **arcos**
 - arestas dirigidas, indicando início e fim



Grafos dirigidos

Um **Grafo dirigido** (ou Digrafo)

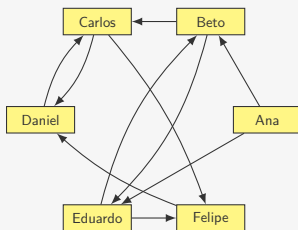
- Tem um conjunto de **vértices**
- Conectados através de um conjunto de **arcos**
 - arestas dirigidas, indicando início e fim



Grafos dirigidos

Um **Grafo dirigido** (ou Digrafo)

- Tem um conjunto de **vértices**
- Conectados através de um conjunto de **arcos**
 - arestas dirigidas, indicando início e fim

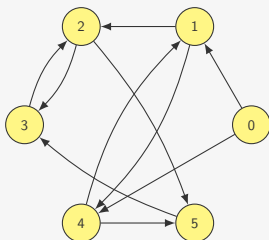


Representamos um digrafo visualmente

Grafos dirigidos

Um **Grafo dirigido** (ou Digrafo)

- Tem um conjunto de **vértices**
- Conectados através de um conjunto de **arcos**
 - arestas dirigidas, indicando início e fim



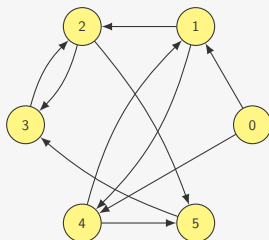
Representamos um digrafo visualmente

- com os vértices representados por pontos e

Grafos dirigidos

Um **Grafo dirigido** (ou Digrafo)

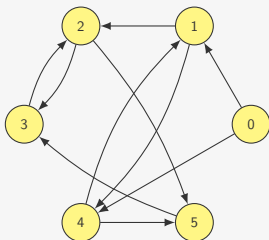
- Tem um conjunto de **vértices**
- Conectados através de um conjunto de **arcos**
 - arestas dirigidas, indicando início e fim



Representamos um digrafo visualmente

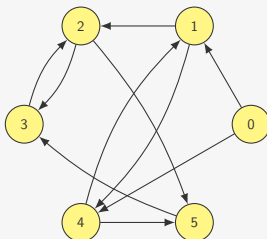
- com os vértices representados por pontos e
- os arcos representados por curvas com uma seta na ponta ligando dois vértices

Grafos dirigidos



Matematicamente, um digrafo G é um par (V, A)

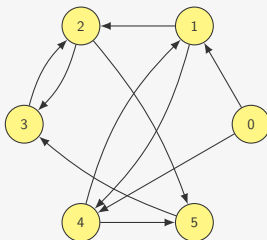
Grafos dirigidos



Matematicamente, um digrafo G é um par (V, A)

- V é o conjunto de vértices do grafo

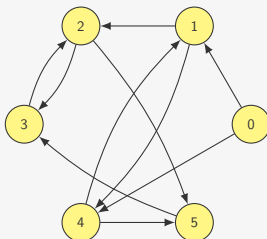
Grafos dirigidos



Matematicamente, um digrafo G é um par (V, A)

- V é o conjunto de vértices do grafo
- A é o conjunto de arcos do grafo

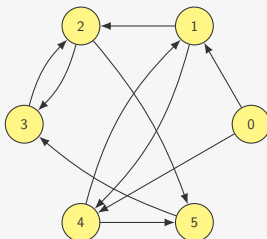
Grafos dirigidos



Matematicamente, um digrafo G é um par (V, A)

- V é o conjunto de vértices do grafo
- A é o conjunto de arcos do grafo
 - Representamos um arco ligando $u, v \in V$ como (u, v)

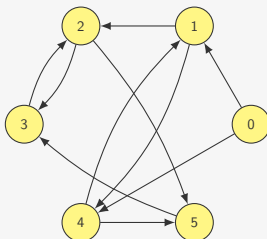
Grafos dirigidos



Matematicamente, um digrafo G é um par (V, A)

- V é o conjunto de vértices do grafo
- A é o conjunto de arcos do grafo
 - Representamos um arco ligando $u, v \in V$ como (u, v)
 - u é a cauda ou origem de (u, v)

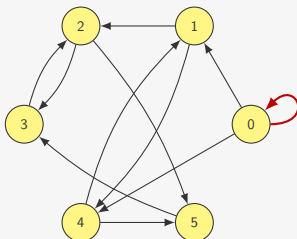
Grafos dirigidos



Matematicamente, um digrafo G é um par (V, A)

- V é o conjunto de vértices do grafo
- A é o conjunto de arcos do grafo
 - Representamos um arco ligando $u, v \in V$ como (u, v)
 - u é a cauda ou origem de (u, v)
 - v é a cabeça ou destino de (u, v)

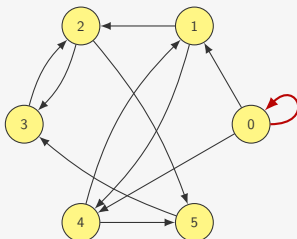
Grafos dirigidos



Matematicamente, um digrafo G é um par (V, A)

- V é o conjunto de vértices do grafo
- A é o conjunto de arcos do grafo
 - Representamos um arco ligando $u, v \in V$ como (u, v)
 - u é a cauda ou origem de (u, v)
 - v é a cabeça ou destino de (u, v)
 - Podemos ter **laços**: arcos da forma (u, u)

Grafos dirigidos

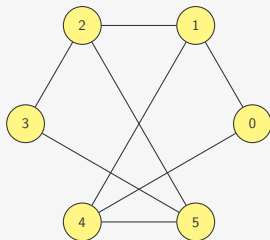


Matematicamente, um digrafo G é um par (V, A)

- V é o conjunto de vértices do grafo
- A é o conjunto de arcos do grafo
 - Representamos um arco ligando $u, v \in V$ como (u, v)
 - u é a cauda ou origem de (u, v)
 - v é a cabeça ou destino de (u, v)
 - Podemos ter **laços**: arcos da forma (u, u)
 - Existe no máximo um arco (u, v) em A

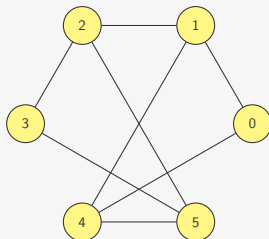
Grafos e digrafos

Podemos ver um **grafo** como um **digrafo**



Grafos e digrafos

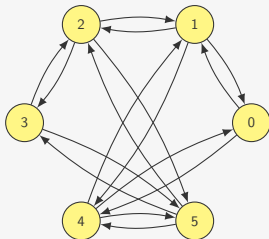
Podemos ver um **grafo** como um **digrafo**



Basta considerar cada aresta como dois arcos

Grafos e digrafos

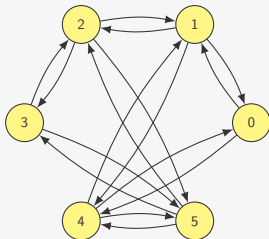
Podemos ver um **grafo** como um **digrafo**



Basta considerar cada aresta como dois arcos

Grafos e digrafos

Podemos ver um **grafo** como um **digrafo**

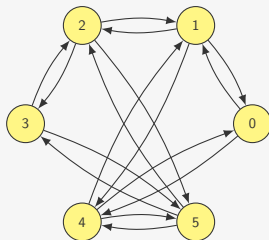


Basta considerar cada aresta como dois arcos

- É o que já estamos fazendo na matriz de adjacências

Grafos e digrafos

Podemos ver um **grafo** como um **digrafo**

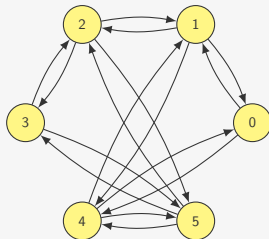


Basta considerar cada aresta como dois arcos

- É o que já estamos fazendo na matriz de adjacências
- Ou seja, podemos usar uma matriz de adjacências para representar um digrafo

Grafos e digrafos

Podemos ver um **grafo** como um **digrafo**

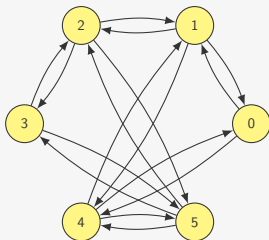


Basta considerar cada aresta como dois arcos

- É o que já estamos fazendo na matriz de adjacências
- Ou seja, podemos usar uma matriz de adjacências para representar um digrafo
 - `adjacencia[u][v] == 1`: temos um arco de `u` para `v`

Grafos e digrafos

Podemos ver um **grafo** como um **digrafo**



Basta considerar cada aresta como dois arcos

- É o que já estamos fazendo na matriz de adjacências
- Ou seja, podemos usar uma matriz de adjacências para representar um digrafo
 - `adjacencia[u][v] == 1`: temos um arco de `u` para `v`
 - pode ser que `adjacencia[u][v] != adjacencia[v][u]`

Número de arestas de um grafo

Quantas arestas pode ter um grafo com n vértices?

0

Número de arestas de um grafo

Quantas arestas pode ter um grafo com n vértices?

0

1

Número de arestas de um grafo

Quantas arestas pode ter um grafo com n vértices?



Número de arestas de um grafo

Quantas arestas pode ter um grafo com n vértices?

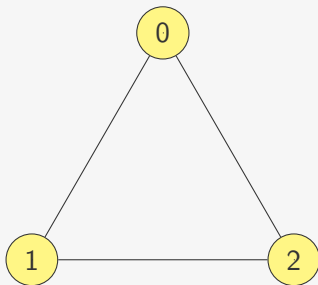
0

1

2

Número de arestas de um grafo

Quantas arestas pode ter um grafo com n vértices?



Número de arestas de um grafo

Quantas arestas pode ter um grafo com n vértices?

0

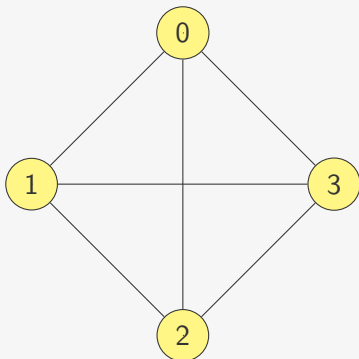
1

3

2

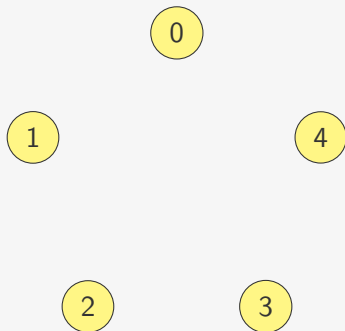
Número de arestas de um grafo

Quantas arestas pode ter um grafo com n vértices?



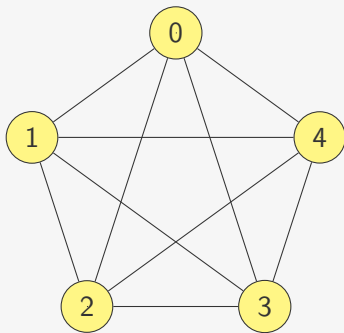
Número de arestas de um grafo

Quantas arestas pode ter um grafo com n vértices?



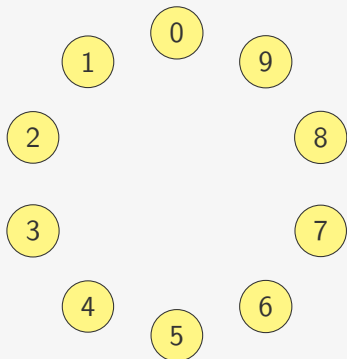
Número de arestas de um grafo

Quantas arestas pode ter um grafo com n vértices?



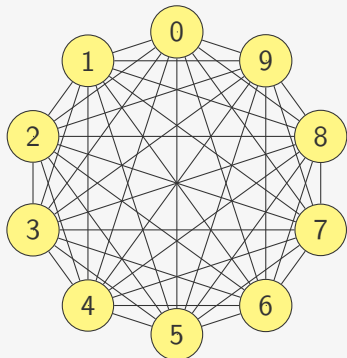
Número de arestas de um grafo

Quantas arestas pode ter um grafo com n vértices?



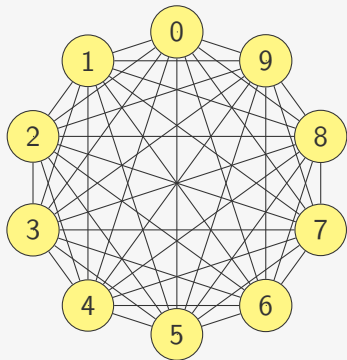
Número de arestas de um grafo

Quantas arestas pode ter um grafo com n vértices?



Número de arestas de um grafo

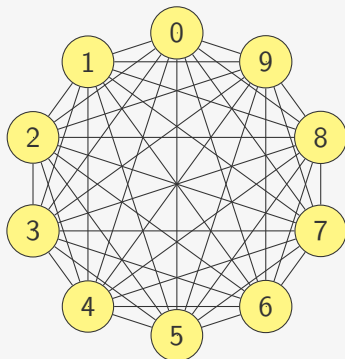
Quantas arestas pode ter um grafo com n vértices?



$$\text{Até } \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2) \text{ arestas}$$

Número de arestas de um grafo

Quantas arestas pode ter um grafo com n vértices?



Até $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$ arestas

E um digrafo pode ter $n(n-1)$ arcos

Grafos esparsos

Um grafo tem no máximo $n(n-1)/2$ arestas, mas pode ter bem menos...

Grafos esparsos

Um grafo tem no máximo $n(n - 1)/2$ arestas, mas pode ter bem menos...

Instagram tem 2,4 bilhões de usuários

Grafos esparsos

Um grafo tem no máximo $n(n - 1)/2$ arestas, mas pode ter bem menos...

Instagram tem 2,4 bilhões de usuários

- Uma matriz de adjacências teria $5,76 \cdot 10^{18}$ posições

Grafos esparsos

Um grafo tem no máximo $n(n-1)/2$ arestas, mas pode ter bem menos...

Instagram tem 2,4 bilhões de usuários

- Uma matriz de adjacências teria $5,76 \cdot 10^{18}$ posições
 - 720 petabytes (usando um bit por posição)

Grafos esparsos

Um grafo tem no máximo $n(n-1)/2$ arestas, mas pode ter bem menos...

Instagram tem 2,4 bilhões de usuários

- Uma matriz de adjacências teria $5,76 \cdot 10^{18}$ posições
 - 720 petabytes (usando um bit por posição)
- Verificar se uma pessoa segue a outra leva tempo $O(1)$

Grafos esparsos

Um grafo tem no máximo $n(n-1)/2$ arestas, mas pode ter bem menos...

Instagram tem 2,4 bilhões de usuários

- Uma matriz de adjacências teria $5,76 \cdot 10^{18}$ posições
 - 720 petabytes (usando um bit por posição)
- Verificar se uma pessoa segue a outra leva tempo $O(1)$
 - supondo que tudo isso coubesse na memória...

Grafos esparsos

Um grafo tem no máximo $n(n-1)/2$ arestas, mas pode ter bem menos...

Instagram tem 2,4 bilhões de usuários

- Uma matriz de adjacências teria $5,76 \cdot 10^{18}$ posições
 - 720 petabytes (usando um bit por posição)
- Verificar se uma pessoa segue a outra leva tempo $O(1)$
 - supondo que tudo isso coubesse na memória...
- Imprimir todas as pessoas que alguém segue leva $O(n)$

Grafos esparsos

Um grafo tem no máximo $n(n - 1)/2$ arestas, mas pode ter bem menos...

Instagram tem 2,4 bilhões de usuários

- Uma matriz de adjacências teria $5,76 \cdot 10^{18}$ posições
 - 720 petabytes (usando um bit por posição)
- Verificar se uma pessoa segue a outra leva tempo $O(1)$
 - supondo que tudo isso coubesse na memória...
- Imprimir todas as pessoas que alguém segue leva $O(n)$
 - Teríamos que percorrer 2,4 bilhões de posições

Grafos esparsos

Um grafo tem no máximo $n(n - 1)/2$ arestas, mas pode ter bem menos...

Instagram tem 2,4 bilhões de usuários

- Uma matriz de adjacências teria $5,76 \cdot 10^{18}$ posições
 - 720 petabytes (usando um bit por posição)
- Verificar se uma pessoa segue a outra leva tempo $O(1)$
 - supondo que tudo isso coubesse na memória...
- Imprimir todas as pessoas que alguém segue leva $O(n)$
 - Teríamos que percorrer 2,4 bilhões de posições
 - Um usuário comum segue bem menos pessoas do que isso...

Grafos esparsos

Um grafo tem no máximo $n(n - 1)/2$ arestas, mas pode ter bem menos...

Instagram tem 2,4 bilhões de usuários

- Uma matriz de adjacências teria $5,76 \cdot 10^{18}$ posições
 - 720 petabytes (usando um bit por posição)
- Verificar se uma pessoa segue a outra leva tempo $O(1)$
 - supondo que tudo isso coubesse na memória...
- Imprimir todas as pessoas que alguém segue leva $O(n)$
 - Teríamos que percorrer 2,4 bilhões de posições
 - Um usuário comum segue bem menos pessoas do que isso...
 - Instagram coloca um limite de 7500 pessoas seguidas

Grafos esparsos

Dizemos que um grafo é esperso se ele tem “poucas” arestas

Grafos esparsos

Dizemos que um grafo é esparso se ele tem “poucas” arestas

- Bem menos do que $n(n-1)/2$

Grafos esparsos

Dizemos que um grafo é esparso se ele tem “poucas” arestas

- Bem menos do que $n(n-1)/2$

Exemplos:

Grafos esparsos

Dizemos que um grafo é esparso se ele tem “poucas” arestas

- Bem menos do que $n(n-1)/2$

Exemplos:

- Instagram:

Grafos esparsos

Dizemos que um grafo é esparsos se ele tem “poucas” arestas

- Bem menos do que $n(n - 1)/2$

Exemplos:

- Instagram:
 - Cada usuário segue no máximo 7500 pessoas

Grafos esparsos

Dizemos que um grafo é esparso se ele tem “poucas” arestas

- Bem menos do que $n(n - 1)/2$

Exemplos:

- Instagram:
 - Cada usuário segue no máximo 7500 pessoas
 - O máximo de arcos é $7,5 \cdot 10^{12}$

Grafos esparsos

Dizemos que um grafo é esparso se ele tem “poucas” arestas

- Bem menos do que $n(n-1)/2$

Exemplos:

- Instagram:
 - Cada usuário segue no máximo 7500 pessoas
 - O máximo de arcos é $7,5 \cdot 10^{12}$
 - Bem menos do que $5,76 \cdot 10^{18}$

Grafos esparsos

Dizemos que um grafo é esparso se ele tem “poucas” arestas

- Bem menos do que $n(n-1)/2$

Exemplos:

- Instagram:
 - Cada usuário segue no máximo 7500 pessoas
 - O máximo de arcos é $7,5 \cdot 10^{12}$
 - Bem menos do que $5,76 \cdot 10^{18}$
- Grafos cujos vértices têm o mesmo grau d (constante)

Grafos esparsos

Dizemos que um grafo é esparso se ele tem “poucas” arestas

- Bem menos do que $n(n-1)/2$

Exemplos:

- Instagram:
 - Cada usuário segue no máximo 7500 pessoas
 - O máximo de arcos é $7,5 \cdot 10^{12}$
 - Bem menos do que $5,76 \cdot 10^{18}$
- Grafos cujos vértices têm o mesmo grau d (constante)
 - O número de arestas é $dn/2 = O(n)$

Grafos esparsos

Dizemos que um grafo é esparso se ele tem “poucas” arestas

- Bem menos do que $n(n-1)/2$

Exemplos:

- Instagram:
 - Cada usuário segue no máximo 7500 pessoas
 - O máximo de arcos é $7,5 \cdot 10^{12}$
 - Bem menos do que $5,76 \cdot 10^{18}$
- Grafos cujos vértices têm o mesmo grau d (constante)
 - O número de arestas é $dn/2 = O(n)$
- Grafos com $O(n \lg n)$ arestas

Grafos esparsos

Dizemos que um grafo é esparso se ele tem “poucas” arestas

- Bem menos do que $n(n-1)/2$

Exemplos:

- Instagram:
 - Cada usuário segue no máximo 7500 pessoas
 - O máximo de arcos é $7,5 \cdot 10^{12}$
 - Bem menos do que $5,76 \cdot 10^{18}$
- Grafos cujos vértices têm o mesmo grau d (constante)
 - O número de arestas é $dn/2 = O(n)$
- Grafos com $O(n \lg n)$ arestas

Não dizemos que um grafo com $n(n-1)/20$ arestas é esparso

Grafos esparsos

Dizemos que um grafo é esparso se ele tem “poucas” arestas

- Bem menos do que $n(n-1)/2$

Exemplos:

- Instagram:
 - Cada usuário segue no máximo 7500 pessoas
 - O máximo de arcos é $7,5 \cdot 10^{12}$
 - Bem menos do que $5,76 \cdot 10^{18}$
- Grafos cujos vértices têm o mesmo grau d (constante)
 - O número de arestas é $dn/2 = O(n)$
- Grafos com $O(n \lg n)$ arestas

Não dizemos que um grafo com $n(n-1)/20$ arestas é esparso

- O número de arestas não é assintoticamente menor...

Grafos esparsos

Dizemos que um grafo é esparso se ele tem “poucas” arestas

- Bem menos do que $n(n-1)/2$

Exemplos:

- Instagram:
 - Cada usuário segue no máximo 7500 pessoas
 - O máximo de arcos é $7,5 \cdot 10^{12}$
 - Bem menos do que $5,76 \cdot 10^{18}$
- Grafos cujos vértices têm o mesmo grau d (constante)
 - O número de arestas é $dn/2 = O(n)$
- Grafos com $O(n \lg n)$ arestas

Não dizemos que um grafo com $n(n-1)/20$ arestas é esparso

- O número de arestas não é assintoticamente menor...
- É da mesma ordem de grandeza que n^2 ...

Listas de Adjacência

Representando um grafo por Listas de Adjacência:

Listas de Adjacência

Representando um grafo por Listas de Adjacência:

- Temos uma lista ligada para cada vértice

Listas de Adjacência

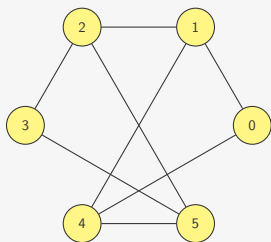
Representando um grafo por Listas de Adjacência:

- Temos uma lista ligada para cada vértice
- A lista armazena quais são os vizinhos do vértice

Listas de Adjacência

Representando um grafo por Listas de Adjacência:

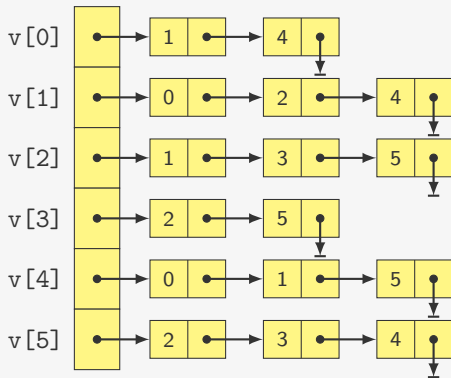
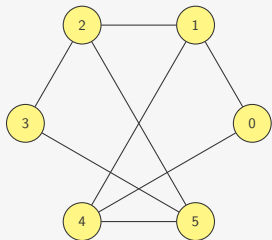
- Temos uma lista ligada para cada vértice
- A lista armazena quais são os vizinhos do vértice



Listas de Adjacência

Representando um grafo por Listas de Adjacência:

- Temos uma lista ligada para cada vértice
- A lista armazena quais são os vizinhos do vértice



TAD Grafo com Listas de Adjacência

```
1 typedef struct no *p_no;
2
3 struct no {
4     int v;
5     p_no prox;
6 };
7
8 typedef struct grafo *p_grafo;
9
10 struct grafo {
11     p_no *adjacencia;
12     int n;
13 };
14
15 p_grafo criar_grafo(int n);
16
17 void destroi_grafo(p_grafo g);
18
19 void insere_aresta(p_grafo g, int u, int v);
20
21 void remove_aresta(p_grafo g, int u, int v);
22
23 int tem_aresta(p_grafo g, int u, int v);
24
25 void imprime_arestas(p_grafo g);
```

Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {
```

Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {  
2     int i;  
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));
```

Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {  
2     int i;  
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));  
4     g->n = n;
```

Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {  
2     int i;  
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));  
4     g->n = n;  
5     g->adjacencia = malloc(n * sizeof(p_no));
```

Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {  
2     int i;  
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));  
4     g->n = n;  
5     g->adjacencia = malloc(n * sizeof(p_no));  
6     for (i = 0; i < n; i++)  
7         g->adjacencia[i] = NULL;  
8     return g;  
}
```

Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {  
2     int i;  
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));  
4     g->n = n;  
5     g->adjacencia = malloc(n * sizeof(p_no));  
6     for (i = 0; i < n; i++)  
7         g->adjacencia[i] = NULL;  
8     return g;  
9 }
```


Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {
2     int i;
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));
4     g->n = n;
5     g->adjacencia = malloc(n * sizeof(p_no));
6     for (i = 0; i < n; i++)
7         g->adjacencia[i] = NULL;
8     return g;
9 }
```

```
1 void libera_lista(p_no lista) {
2     if (lista != NULL) {
3         libera_lista(lista->prox);
4         free(lista);
5     }
6 }
```

Inicialização e Destruição

```
1 p_grafo criar_grafo(int n) {
2     int i;
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));
4     g->n = n;
5     g->adjacencia = malloc(n * sizeof(p_no));
6     for (i = 0; i < n; i++)
7         g->adjacencia[i] = NULL;
8     return g;
9 }
```

```
1 void libera_lista(p_no lista) {
2     if (lista != NULL) {
3         libera_lista(lista->prox);
4         free(lista);
5     }
6 }
```

```
1 void destroi_grafo(p_grafo g) {
2     int i;
3     for (i = 0; i < g->n; i++)
4         libera_lista(g->adjacencia[i]);
5     free(g->adjacencia);
6     free(g);
7 }
```

Inserindo uma aresta

Inserindo uma aresta

```
1 p_no insere_na_lista(p_no lista, int v) {  
2     p_no novo = malloc(sizeof(struct no));  
3     novo->v = v;  
4     novo->prox = lista;  
5     return novo;  
6 }
```

Inserindo uma aresta

```
1 p_no insere_na_lista(p_no lista, int v) {  
2     p_no novo = malloc(sizeof(struct no));  
3     novo->v = v;  
4     novo->prox = lista;  
5     return novo;  
6 }
```

```
1 void insere_aresta(p_grafo g, int u, int v) {  
2     g->adjacencia[v] = insere_na_lista(g->adjacencia[v], u);  
3     g->adjacencia[u] = insere_na_lista(g->adjacencia[u], v);  
4 }
```

Removendo uma aresta

Removendo uma aresta

```
1 p_no remove_da_lista(p_no lista, int v) {
2     p_no proximo;
3     if (lista == NULL)
4         return NULL;
5     else if (lista->v == v) {
6         proximo = lista->prox;
7         free(lista);
8         return proximo;
9     } else {
10        lista->prox = remove_da_lista(lista->prox, v);
11        return lista;
12    }
13 }
```

Removendo uma aresta

```
1 p_no remove_da_lista(p_no lista, int v) {
2     p_no proximo;
3     if (lista == NULL)
4         return NULL;
5     else if (lista->v == v) {
6         proximo = lista->prox;
7         free(lista);
8         return proximo;
9     } else {
10         lista->prox = remove_da_lista(lista->prox, v);
11         return lista;
12     }
13 }
```

```
1 void remove_aresta(p_grafo g, int u, int v) {
2     g->adjacencia[u] = remove_da_lista(g->adjacencia[u], v);
3     g->adjacencia[v] = remove_da_lista(g->adjacencia[v], u);
4 }
```


Verificando se tem uma aresta e imprimindo

```
1 int tem_aresta(p_grafo g, int u, int v) {  
2     p_no t;  
3     for (t = g->adjacencia[u]; t != NULL; t = t->prox)  
4         if (t->v == v)  
5             return 1;  
6     return 0;  
7 }
```

Verificando se tem uma aresta e imprimindo

```
1 int tem_aresta(p_grafo g, int u, int v) {
2     p_no t;
3     for (t = g->adjacencia[u]; t != NULL; t = t->prox)
4         if (t->v == v)
5             return 1;
6     return 0;
7 }
```

```
1 void imprime_arestas(p_grafo g) {
2     int u;
3     p_no t;
4     for (u = 0; u < g->n; u++)
5         for (t = g->adjacencia[u]; t != NULL; t = t->prox)
6             printf("{%d,%d}\n", u, t->v);
7 }
```

O Problema das Pontes de Königsberg

Königsberg (hoje Kaliningrado, Rússia) tinha 7 pontes

O Problema das Pontes de Königsberg

Königsberg (hoje Kaliningrado, Rússia) tinha 7 pontes

- Acreditava-se que era possível passear por toda a cidade

O Problema das Pontes de Königsberg

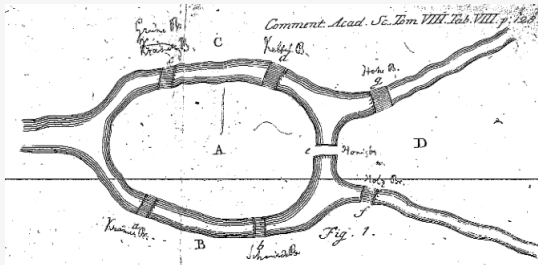
Königsberg (hoje Kaliningrado, Rússia) tinha 7 pontes

- Acreditava-se que era possível passear por toda a cidade
- Atravessando cada ponte **exatamente** uma vez

O Problema das Pontes de Königsberg

Königsberg (hoje Kaliningrado, Rússia) tinha 7 pontes

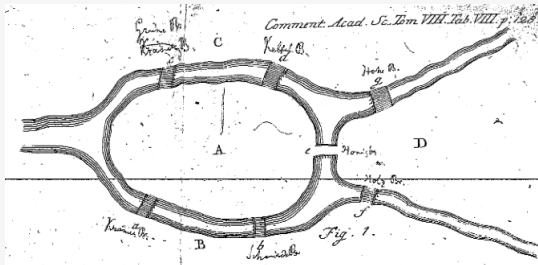
- Acreditava-se que era possível passear por toda a cidade
- Atravessando cada ponte **exatamente** uma vez



O Problema das Pontes de Königsberg

Königsberg (hoje Kaliningrado, Rússia) tinha 7 pontes

- Acreditava-se que era possível passear por toda a cidade
- Atravessando cada ponte **exatamente** uma vez

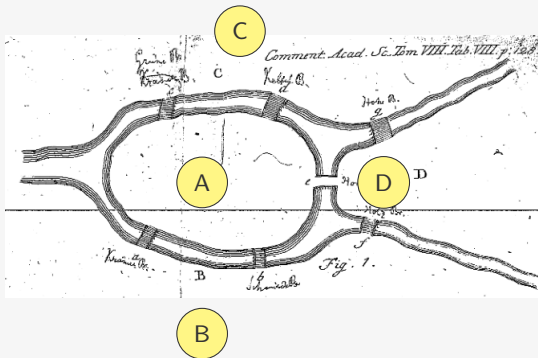


Leonhard Euler, em 1736, modelou o problema como um grafo

O Problema das Pontes de Königsberg

Königsberg (hoje Kaliningrado, Rússia) tinha 7 pontes

- Acreditava-se que era possível passear por toda a cidade
- Atravessando cada ponte **exatamente** uma vez

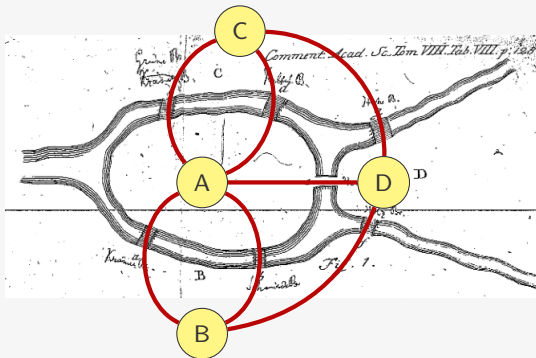


Leonhard Euler, em 1736, modelou o problema como um grafo

O Problema das Pontes de Königsberg

Königsberg (hoje Kaliningrado, Rússia) tinha 7 pontes

- Acreditava-se que era possível passear por toda a cidade
- Atravessando cada ponte **exatamente** uma vez

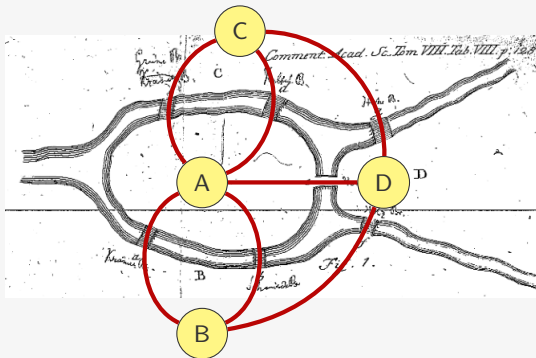


Leonhard Euler, em 1736, modelou o problema como um grafo

O Problema das Pontes de Königsberg

Königsberg (hoje Kaliningrado, Rússia) tinha 7 pontes

- Acreditava-se que era possível passear por toda a cidade
- Atravessando cada ponte **exatamente** uma vez



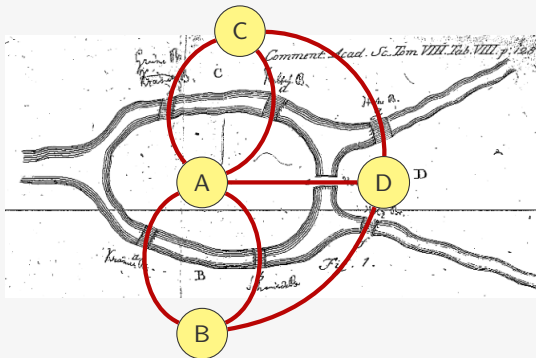
Leonhard Euler, em 1736, modelou o problema como um grafo

- Provou que tal passeio não é possível

O Problema das Pontes de Königsberg

Königsberg (hoje Kaliningrado, Rússia) tinha 7 pontes

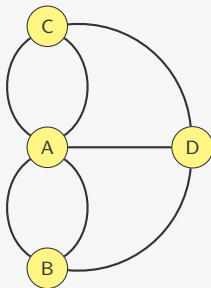
- Acreditava-se que era possível passear por toda a cidade
- Atravessando cada ponte **exatamente** uma vez



Leonhard Euler, em 1736, modelou o problema como um grafo

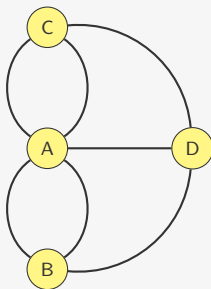
- Provou que tal passeio não é possível
- E fundou a Teoria dos Grafos...

Multigrafos



A estrutura usada por Euler é o que chamamos de **Multigrafo**

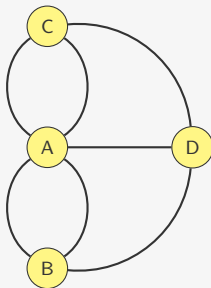
Multigrafos



A estrutura usada por Euler é o que chamamos de **Multigrafo**

- Podemos ter **arestas paralelas** (ou **múltiplas**)

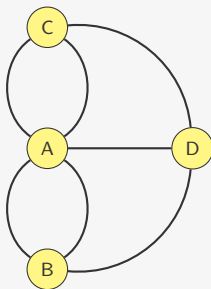
Multigrafos



A estrutura usada por Euler é o que chamamos de **Multigrafo**

- Podemos ter **arestas paralelas** (ou **múltiplas**)
- Ao invés de um **conjunto** de arestas, temos um **multiconjunto** de arestas

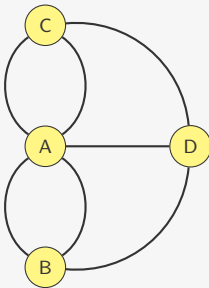
Multigrafos



A estrutura usada por Euler é o que chamamos de **Multigrafo**

- Podemos ter **arestas paralelas** (ou **múltiplas**)
- Ao invés de um **conjunto** de arestas, temos um **multiconjunto** de arestas
- Pode ser representada por Listas de Adjacência

Multigrafos



A estrutura usada por Euler é o que chamamos de **Multigrafo**

- Podemos ter **arestas paralelas** (ou **múltiplas**)
- Ao invés de um **conjunto** de arestas, temos um **multiconjunto** de arestas
- Pode ser representada por Listas de Adjacência
 - Por Matriz de Adjacências é mais difícil

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

- Matriz: $O(|V|^2)$

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

- Matriz: $O(|V|^2)$
- Listas: $O(|V| + |E|)$

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

- Matriz: $O(|V|^2)$
- Listas: $O(|V| + |E|)$

Tempo:

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

- Matriz: $O(|V|^2)$
- Listas: $O(|V| + |E|)$

Tempo:

Operação	Matriz	Listas
Inserir	$O(1)$	$O(1)$
Remover	$O(1)$	$O(d(v))$
Aresta existe?	$O(1)$	$O(d(v))$
Percorrer vizinhança	$O(V)$	$O(d(v))$

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

- Matriz: $O(|V|^2)$
- Listas: $O(|V| + |E|)$

Tempo:

Operação	Matriz	Listas
Inserir	$O(1)$	$O(1)$
Remover	$O(1)$	$O(d(v))$
Aresta existe?	$O(1)$	$O(d(v))$
Percorrer vizinhança	$O(V)$	$O(d(v))$

As duas permitem representar grafos, digrafos e multigrafos

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

- Matriz: $O(|V|^2)$
- Listas: $O(|V| + |E|)$

Tempo:

Operação	Matriz	Listas
Inserir	$O(1)$	$O(1)$
Remover	$O(1)$	$O(d(v))$
Aresta existe?	$O(1)$	$O(d(v))$
Percorrer vizinhança	$O(V)$	$O(d(v))$

As duas permitem representar grafos, digrafos e multigrafos

- mas multigrafos é mais fácil com Listas de Adjacência

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

- Matriz: $O(|V|^2)$
- Listas: $O(|V| + |E|)$

Tempo:

Operação	Matriz	Listas
Inserir	$O(1)$	$O(1)$
Remover	$O(1)$	$O(d(v))$
Aresta existe?	$O(1)$	$O(d(v))$
Percorrer vizinhança	$O(V)$	$O(d(v))$

As duas permitem representar grafos, digrafos e multigrafos

- mas multigrafos é mais fácil com Listas de Adjacência

Qual usar?

Comparação Listas e Matrizes

Espaço para o armazenamento:

- Matriz: $O(|V|^2)$
- Listas: $O(|V| + |E|)$

Tempo:

Operação	Matriz	Listas
Inserir	$O(1)$	$O(1)$
Remover	$O(1)$	$O(d(v))$
Aresta existe?	$O(1)$	$O(d(v))$
Percorrer vizinhança	$O(V)$	$O(d(v))$

As duas permitem representar grafos, digrafos e multigrafos

- mas multigrafos é mais fácil com Listas de Adjacência

Qual usar?

- Depende das operações usadas e se o grafo é esparso

Importância dos Grafos

Grafos são amplamente usados na Computação e na Matemática para a modelagem de problemas:

Importância dos Grafos

Grafos são amplamente usados na Computação e na Matemática para a modelagem de problemas:

- **Redes Sociais:** grafos são a forma de representar uma relação entre duas pessoas

Importância dos Grafos

Grafos são amplamente usados na Computação e na Matemática para a modelagem de problemas:

- **Redes Sociais:** grafos são a forma de representar uma relação entre duas pessoas
- **Mapas:** podemos ver o mapa de uma cidade como um grafo e achar o menor caminho entre dois pontos

Importância dos Grafos

Grafos são amplamente usados na Computação e na Matemática para a modelagem de problemas:

- **Redes Sociais:** grafos são a forma de representar uma relação entre duas pessoas
- **Mapas:** podemos ver o mapa de uma cidade como um grafo e achar o menor caminho entre dois pontos
- **Páginas na Internet:** links são arcos de uma página para a outra - podemos querer ver qual é a página mais popular

Importância dos Grafos

Grafos são amplamente usados na Computação e na Matemática para a modelagem de problemas:

- **Redes Sociais:** grafos são a forma de representar uma relação entre duas pessoas
- **Mapas:** podemos ver o mapa de uma cidade como um grafo e achar o menor caminho entre dois pontos
- **Páginas na Internet:** links são arcos de uma página para a outra - podemos querer ver qual é a página mais popular
- **Redes de Computadores:** a topologia de uma rede de computadores é um grafo

Importância dos Grafos

Grafos são amplamente usados na Computação e na Matemática para a modelagem de problemas:

- **Redes Sociais:** grafos são a forma de representar uma relação entre duas pessoas
- **Mapas:** podemos ver o mapa de uma cidade como um grafo e achar o menor caminho entre dois pontos
- **Páginas na Internet:** links são arcos de uma página para a outra - podemos querer ver qual é a página mais popular
- **Redes de Computadores:** a topologia de uma rede de computadores é um grafo
- **Circuitos Eletrônicos:** podemos criar algoritmos para ver se há curto-circuito por exemplo

Importância dos Grafos

Grafos são amplamente usados na Computação e na Matemática para a modelagem de problemas:

- **Redes Sociais:** grafos são a forma de representar uma relação entre duas pessoas
- **Mapas:** podemos ver o mapa de uma cidade como um grafo e achar o menor caminho entre dois pontos
- **Páginas na Internet:** links são arcos de uma página para a outra - podemos querer ver qual é a página mais popular
- **Redes de Computadores:** a topologia de uma rede de computadores é um grafo
- **Circuitos Eletrônicos:** podemos criar algoritmos para ver se há curto-circuito por exemplo
- etc...

Exercício

Escreva uma função que dado um digrafo G representado por matriz de adjacências, devolve o grafo G' resultante em transformar cada arco (u, v) de G em uma aresta $\{u, v\}$ em G'

Repita o exercício anterior para um digrafo representado por listas de adjacências

Solução

```
1 p_grafo digrafo_para_grafo(p_grafo d) {
2     int i, j;
3     p_grafo g = malloc(sizeof(struct grafo));
4     g->n = d->n;
5     g->adj = malloc(g->n * sizeof(int *));
6     for (i = 0; i < g->n; i++)
7         g->adj[i] = malloc(g->n * sizeof(int));
8     for (i = 0; i < g->n; i++)
9         for (j = 0; j < g->n; j++) {
10         if (d->adj[i][j] || d->adj[j][i])
11             g->adj[i][j] = 1;
12         else
13             g->adj[i][j] = 0;
14     }
15     return g;
16 }
```

Solução

```
1 p_grafo digrafo_para_grafo(p_grafo d) {
2     p_grafo g = criar_grafo(d->n);
3     for (v = 0; v < d->n; v++)
4         for (p_no t = d->adjacencia[v]; t != NULL; t = t->prox)
5             if (!tem_aresta(g, i, t->v))
6                 insere_aresta(g, i, t->v);
7     return g;
8 }
```

Dúvidas?