Combinatória Poliédrica
Poliedro dos Emparelhamentos

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-11-06 15:54

Emparelhamento

Seja $G = (V, A)$ um grafo

Um emparelhamento E em G

- é um subconjunto de A
- tal que se $e = \{i, j\}$ e $f = \{k, l\}$ são arestas distintas de E
- então $e \cap f = \emptyset$

Problema do Emparelhamento Máximo: Dado um grafo $G = (V, A)$ e uma função de custo $c\colon A \to \mathbb{R}$, achar um emparalhemento E em G tal que $c(E)$ seja máximo.

Poliedro

O poliedro dos emparelhamentos de um grafo é o fecho convexo dos vetores de incidência dos emparelhamentos em G:

$$P_{\mathrm{Emp}}(G) = \mathrm{conv}\{\boldsymbol{\chi}^E \in \mathbb{R}^A \colon E \text{ é um emparelhamento em } G\}$$

Note que $\emptyset$ e $\{a\}$, para todo $a \in A$, são emparelhamentos em G

- E os vetores de incidência destes são afim-independentes

Lema. O poliedro $P_{\mathrm{Emp}}(G)$ tem dimensão plena, ou seja, $\dim(P_{\mathrm{Emp}}(G)) = |A|$.

Formulação inteira

Para um conjunto $S \subseteq V$, denote por $\delta(S)$ as arestas que têm apenas uma das pontas em S

- Se $S = \{v\}$, escrevemos apenas $\delta(v)$

Considere o poliedro $P_1(G)$ definido por

$$
\begin{aligned}
x_a &\geq 0, \quad \forall a \in A \\
x(\delta(v)) &\leq 1, \quad \forall v \in V
\end{aligned}
$$

Essas inequações são válidas para $P_{\text{Emp}}(G)$ e $P_{\text{Emp}}(G) \subseteq P_1(G)$

De fato, $P_1(G)$ é uma formulação inteira para o problema:

- Se $\boldsymbol{x} \in P_1(G) \cap \mathbb{Z}^A$, então $\boldsymbol{x}$ corresponde a um emparelhamento
- Se E é um emparelhamento, então $\boldsymbol{\chi}^E \in P_1(G)$

Soluções Fracionárias

$$P_{\text{Emp}}(G) \subseteq P_1(G) = \{\boldsymbol{x} \colon x_a \geq 0, \forall a \in A; x(\delta(v)) \leq 1, \forall v \in V\}$$

Mas existe G tal que $P_{\text{Emp}}(G) \neq P_1(G)$

- $\boldsymbol{x} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in P_1(K_3) \setminus P_{\text{Emp}}(K_3)$ (e $\boldsymbol{x}$ é um vértice)

No caso acima, $\boldsymbol{x}$ não satisfaz a desigualdade $\boldsymbol{x}(A) \leq 1$ em que A é o conjunto das arestas de um K_3

De forma geral,

- Se temos um conjunto $S \subseteq V$
- tal que $|S| \geq 3$ e $|S|$ é ímpar
- então qualquer emparelhamento em G tem no máximo $(|S| - 1)/2$ arestas no conjunto $A(S)$
- Ou seja, $x(A(S)) \leq (|S| - 1)/2$ é válida para $P_{\text{Emp}}(G)$

Facetas

Veremos que

$$x(A(S)) \leq (|S| - 1)/2 \quad \forall S \subseteq V \text{ tal que } |S| \text{ é impar}$$

(por vezes) definem facetas de $P_{\mathrm{Emp}}(G)$

Como

$$P_{\mathrm{Emp}}(G) = \mathrm{conv}\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^A \colon \boldsymbol{x} \in P_1(G)\} = P_1(G)_I$$

é possível obter a restrição acima a partir de uma sequência de combinações cônicas e arredondamentos

De fato,

1. Some $x(\delta(v)) \leq 1$ para todo $v \in S$
2. Some $-x_e \leq 0$ para todo $e \in \delta(S)$
3. Obtendo $x(A(S)) \leq |S|/2$ e arredondando
4. Temos que $x(A(S)) \leq \lfloor |S|/2 \rfloor = (|S| - 1)/2$

Com o resultado que veremos, isso significa que $P_1(G)$ tem posto de Chvátal igual a 1

Teorema

Teorema. Para qualquer grafo $G = (V, A)$, o poliedro $P_{\mathrm{Emp}}(G)$ é descrito pelo sistema

(1) $x_a \geq 0$, para todo $a \in A$

(2) $x(\delta(v)) \leq 1$, para todo $v \in V$

(3) $x(A(S)) \leq (|S| - 1)/2$, para todo $S \subseteq V$, $|S| \geq 3$ e ímpar

Pela prova, toda faceta é de um desses três tipos

- Mas nem toda restrição acima define faceta

Inequações do tipo (3) são chamadas de *blossom inequalities*

Teorema

Teorema. Para cada aresta $a \in A$ a inequação

$$x_a \geq 0$$

define uma faceta do poliedro $P_{\mathrm{Emp}}(G)$.

Teorema

Teorema. Seja $G = (V, A)$ um grafo conexo com pelo menos 3 vértices, e seja v um vértice de G. Então a inequação

$$x(\delta(v)) \leq 1$$

define uma faceta de $P_{\mathrm{Emp}}(G)$ se, e somente se, os dois vizinhos de v são não-adjacentes sempre que $\mathrm{grau}(v) = 2$.

Teorema

Um grafo é hipo-emparelhável se não possui emparelhamento perfeito, mas ao remover qualquer um de seus vértices, o grafo resultante possui um emparelhamento perfeito

Um grafo é k-conexo se a remoção de qualquer conjunto de k vértices não desconecta o grafo

Teorema. Seja $G = (V, A)$ um grafo conexo com pelo menos 3 vértices, e seja $S \subseteq V$ tal que $|S| \geq 3$ e ímpar. Então a inequação

$$x(A(S)) \leq (|S| - 1)/2$$

define uma faceta de $P_{\mathrm{Emp}}(G)$ se e somente se o subgrafo induzido por S é 2-conexo e hipo-emparalhável.

Voltado ao $P_1(G)$

Será que existem grafos G tais que $P_1(G) = P_{\text{Emp}}(G)$?

Sim! Na verdade, podemos provar que $P_1(G) = P_{\text{Emp}}(G)$ se e somente se G é um grafo bipartido

Teorema. Seja $G = (V, A)$ um grafo bipartido. Então $P_{\text{Emp}}(G) = P_1(G)$.

Emparelhamentos Perfeitos

Um emparelhamento E é perfeito se todo vértice de G é incidente a uma aresta de E

Podemos definir então o seguinte poliedro dos emparelhamentos perfeitos:

$$P_{\text{Perf}}(G) = \text{conv}\{\boldsymbol{\chi}^E \in \mathbb{R}^A : E \text{ é um emparelhamento perfeito em } G\}$$

Teorema. O poliedro $P_{\text{Perf}}(G)$ é descrito pelo seguinte sistema:

(1) $x_a \geq 0$, para todo $a \in A$

(2) $x(\delta(v)) = 1$, para todo $v \in V$

(3) $x(\delta(W)) \geq 1$, para todo $W \subseteq V$, $|W|$ ímpar

Segue do Teorema do $P_{\text{Emp}}(G)$

- E também implica no Teorema do $P_{\text{Emp}}(G)$

Teoremas e Exercício

Teorema (de König). Num grafo bipartido, a cardinalidade de um emparelhamento máximo é igual ao número mínimo de vértices que cobrem todas as areas do grafo.

Teorema. Num grafo bipartido, a cardinalidade de uma cobertura mínima de arestas é igual à cardinalidade de um conjunto estável máximo.

Exercício. Prova que os vértices do poliedro $P_1(G)$, conhecido como o poliedro fracionário dos emparelhamentos, só tem componentes em $\{0, 1/2, 1\}$.

Separação do $P_{\mathrm{Perf}}(G)$

Teorema. O poliedro $P_{\mathrm{Perf}}(G)$ é descrito pelo seguinte sistema:

(1) $x_a \geq 0$, para todo $a \in A$

(2) $x(\delta(v)) = 1$, para todo $v \in V$

(3) $x(\delta(W)) \geq 1$, para todo $W \subseteq V$, $|W|$ ímpar

Considere o problema:

> *Dado um vetor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^A$, decidir se $\boldsymbol{y}$ satisfaz (1), (2) e (3). Se não, encontrar uma inequação violada por $\boldsymbol{y}$.*

Decidir se $\boldsymbol{y}$ satisfaz (1) e (2) é fácil

- Vamos supor que satisfaz (1) e (2)
- e testar se satisfaz (3)

Separação do $P_{\text{Perf}}(G)$

Dado um vetor $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^A$, decidir se $\boldsymbol{y}$ satisfaz $y(\delta(W)) \geq 1$, para todo $W \subseteq V$, $|W|$ ímpar. Se não, encontrar uma inequação violada por $\boldsymbol{y}$.

Considere $\boldsymbol{y}$ como custos associados as arestas de G

O problema consiste em testar se

- G tem um corte $\delta(W)$
- com $|W|$ ímpar
- com custo $y(\delta(W)) < 1$

Um corte $\delta(W)$ com $|W|$ ímpar é chamado de corte ímpar

Queremos então encontrar um corte ímpar de custo mínimo em um grafo com custos não-negativos associados às suas arestas

- Problema que pode ser resolvido em tempo polinomial

Separação do $P_{\mathrm{Emp}}(G)$

Teorema. Para qualquer grafo $G = (V, A)$, o poliedro $P_{\mathrm{Emp}}(G)$ é descrito pelo sistema

(1) $x_a \geq 0$, para todo $a \in A$

(2) $x(\delta(v)) \leq 1$, para todo $v \in V$

(3) $x(A(S)) \leq (|S| - 1)/2$, para todo $S \subseteq V$, $|S| \geq 3$ e ímpar

Separação:

Dado $\boldsymbol{x}'$ satisfazendo (1) e (2) encontrar um subconjunto $S \subseteq V$, $|S|$ ímpar, tal que $x'(A(S)) > (|S| - 1)/2$, ou provar que tal S não existe.

Separação do $P_{\mathrm{Emp}}(G)$

Dado $\boldsymbol{x}'$ satisfazendo $x_a \geq 0$, para todo $a \in A$ e $x(\delta(v)) \leq 1$, para todo $v \in V$, encontrar um subconjunto $S \subseteq V$, $|S|$ ímpar, tal que $x'(A(S)) > (|S|-1)/2$, ou provar que tal S não existe.

Considere variáveis de folga s_v para $x(\delta(v)) \leq 1$

- Isto é, $s_v = 1 - x(\delta(v))$

Somando $x(\delta(v)) + s_v = 1$ para todo $v \in S$, obtemos

$$2x(A(S)) + x(\delta(S)) + s(S) = |S|$$

Portanto,

$$x(A(S)) \leq (|S|-1)/2 \iff \frac{|S| - x(\delta(S)) - s(S)}{2} \leq (|S|-1)/2$$
$$\iff x(\delta(S)) + s(S) \geq 1$$

Separação do $P_{\mathrm{Emp}}(G)$

Dado x', calculamos $s'_v = 1 - x'(\delta(v))$ para todo $v \in V$

Então, encontrar S tal que $x'(A(S)) > (|S| - 1)/2$ é equivalente a encontrar S tal que $x'(\delta(S)) + s'(S) < 1$

Basta fazer o seguinte:

- Adicione um novo vértice universal w a G
- Defina as capacidade de $\{v, w\}$ como s'_v
- Defina as outras capacidade de acordo com x'
- Queremos um corte ímpar de custo mínimo que não contém w
- Consideramos que $|V(G)|$ é par (s.p.g.)
  - Um corte ímpar $\delta(S)$ divide $V(G) \cup \{w\}$ em dois conjuntos
  - Com $|S|$ ímpar e $V(G) \setminus S$ ímpar
  - Um deles não tem w