# Combinatória Poliédrica
# Fecho Inteiro

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

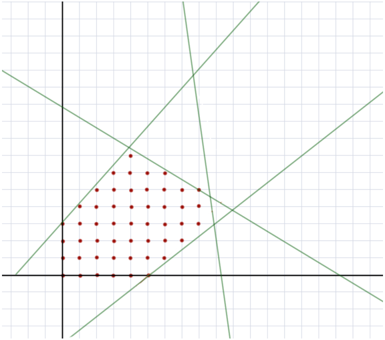
Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-25 13:24

# Fecho Inteiro

Dado um poliedro $P$, o fecho inteiro $P_I$ de $P$ é o conjunto:

$$P_I = \mathrm{conv}\{\boldsymbol{x} \in P \colon \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n\}$$

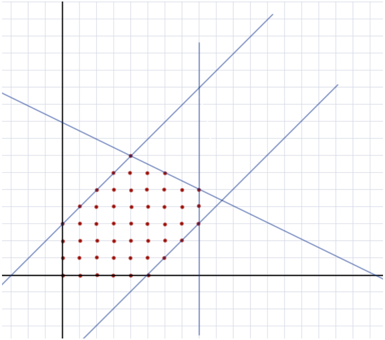


Poliedro $P$

# Fecho Inteiro

Dado um poliedro $P$, o fecho inteiro $P_I$ de $P$ é o conjunto:

$$P_I = \operatorname{conv}\{\boldsymbol{x} \in P : \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n\}$$



Poliedro $P_I$

# Fecho Inteiro

Dada um poliedro $P$, o fecho inteiro $P_I$ de $P$ é o conjunto:

$$P_I = \operatorname{conv}\{\boldsymbol{x} \in P \colon \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n\}$$

# Fecho Inteiro

Dada um poliedro $P$, o fecho inteiro $P_I$ de $P$ é o conjunto:

$$P_I = \text{conv}\{\boldsymbol{x} \in P \colon \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n\}$$

Ou seja, resolver

$$\begin{aligned} \text{maximize } & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

é equivalente a resolver $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})_I\}$

# Fecho Inteiro

Dada um poliedro $P$, o fecho inteiro $P_I$ de $P$ é o conjunto:

$$P_I = \mathrm{conv}\{\boldsymbol{x} \in P \colon \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n\}$$

Ou seja, resolver

$$\begin{aligned} \text{maximize } & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

é equivalente a resolver $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})_I\}$

Ou seja, se conseguirmos calcular $P_I$, podemos resolver o problema de programação linear inteira!

# Uma dificuldade...

Ou seja, se conseguirmos calcular $P_I$, podemos resolver o problema de programação linear inteira!

# Uma dificuldade...

Ou seja, se conseguirmos calcular $P_I$, podemos resolver o problema de programação linear inteira!

Mas Programação Linear Inteira é NP-difícil...

# Uma dificuldade...

Ou seja, se conseguirmos calcular $P_I$, podemos resolver o problema de programação linear inteira!

Mas Programação Linear Inteira é NP-difícil...

Então não esperamos que exista um algoritmo polinomial para calcular $P_I$

# Uma dificuldade...

Ou seja, se conseguirmos calcular $P_I$, podemos resolver o problema de programação linear inteira!

Mas Programação Linear Inteira é NP-difícil...

Então não esperamos que exista um algoritmo polinomial para calcular $P_I$

Mas talvez em alguns casos seja possível calcular $P_I$ rapidamente

# Uma dificuldade...

Ou seja, se conseguirmos calcular $P_I$, podemos resolver o problema de programação linear inteira!

Mas Programação Linear Inteira é NP-difícil...

Então não esperamos que exista um algoritmo polinomial para calcular $P_I$

Mas talvez em alguns casos seja possível calcular $P_I$ rapidamente

- Ou rápido o suficiente...

# Planos-de-Corte

Um algoritmo para resolver PLI poderia ser o seguinte:

# Planos-de-Corte

Um algoritmo para resolver PLI poderia ser o seguinte:

- Comece com o poliedro $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

# Planos-de-Corte

Um algoritmo para resolver PLI poderia ser o seguinte:

- Comece com o poliedro $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$
- Enquanto a solução ótima do poliedro não for inteira

# Planos-de-Corte

Um algoritmo para resolver PLI poderia ser o seguinte:

- Comece com o poliedro $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$
- Enquanto a solução ótima do poliedro não for inteira
  - Adicione uma nova restrição que corte a solução ótima atual

# Planos-de-Corte

Um algoritmo para resolver PLI poderia ser o seguinte:

- Comece com o poliedro $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$
- Enquanto a solução ótima do poliedro não for inteira
  - Adicione uma nova restrição que corte a solução ótima atual
  - Mas que não remova nenhuma solução inteira

# Planos-de-Corte

Um algoritmo para resolver PLI poderia ser o seguinte:

- Comece com o poliedro $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$
- Enquanto a solução ótima do poliedro não for inteira
  - Adicione uma nova restrição que corte a solução ótima atual
  - Mas que não remova nenhuma solução inteira

Essas restrições são chamadas de planos-de-corte

# Planos-de-Corte

Um algoritmo para resolver PLI poderia ser o seguinte:

- Comece com o poliedro $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$
- Enquanto a solução ótima do poliedro não for inteira
  - Adicione uma nova restrição que corte a solução ótima atual
  - Mas que não remova nenhuma solução inteira

Essas restrições são chamadas de planos-de-corte

- E é o nosso foco nessa parte do curso

# Planos-de-Corte

Um algoritmo para resolver PLI poderia ser o seguinte:

- Comece com o poliedro $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$
- Enquanto a solução ótima do poliedro não for inteira
  - Adicione uma nova restrição que corte a solução ótima atual
  - Mas que não remova nenhuma solução inteira

Essas restrições são chamadas de planos-de-corte

- E é o nosso foco nessa parte do curso

Vamos ver que teremos uma sequência finita de poliedros tal que

$$P \supseteq P' \supseteq P'' \supseteq \cdots \supseteq P_I$$

# Planos-de-Corte

Um algoritmo para resolver PLI poderia ser o seguinte:

- Comece com o poliedro $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$
- Enquanto a solução ótima do poliedro não for inteira
  - Adicione uma nova restrição que corte a solução ótima atual
  - Mas que não remova nenhuma solução inteira

Essas restrições são chamadas de planos-de-corte

- E é o nosso foco nessa parte do curso

Vamos ver que teremos uma sequência finita de poliedros tal que

$$P \supseteq P' \supseteq P'' \supseteq \cdots \supseteq P_I$$

Ou seja, esse processo termina e sempre com $P_I$

# Planos-de-Corte

Um algoritmo para resolver PLI poderia ser o seguinte:

- Comece com o poliedro $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$
- Enquanto a solução ótima do poliedro não for inteira
  - Adicione uma nova restrição que corte a solução ótima atual
  - Mas que não remova nenhuma solução inteira

Essas restrições são chamadas de planos-de-corte

- E é o nosso foco nessa parte do curso

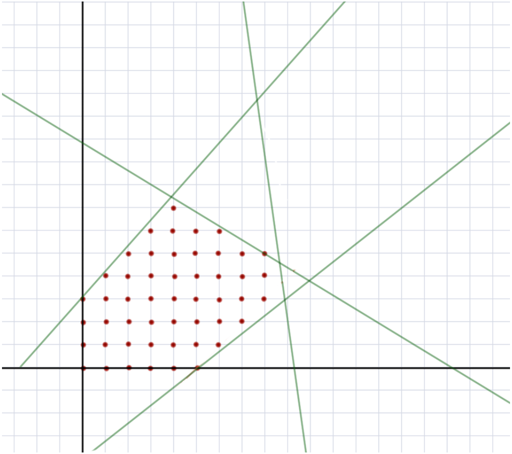
Vamos ver que teremos uma sequência finita de poliedros tal que

$$P \supseteq P' \supseteq P'' \supseteq \cdots \supseteq P_I$$

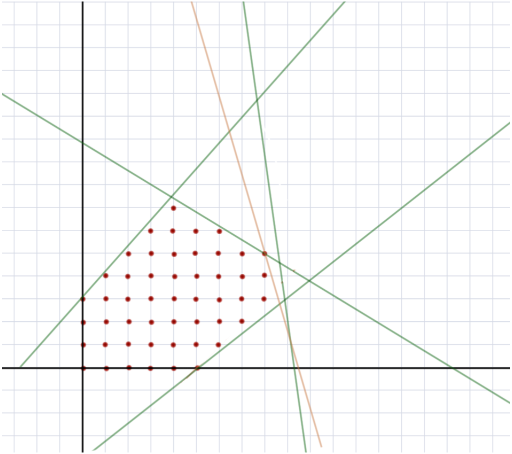
Ou seja, esse processo termina e sempre com $P_I$

- Portanto, conseguimos resolver o nosso problema de PLI

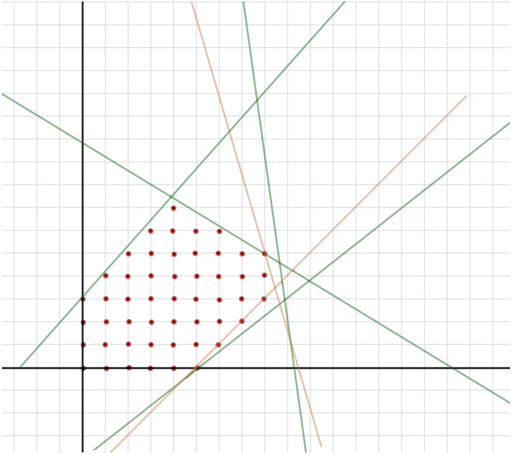
# Exemplo



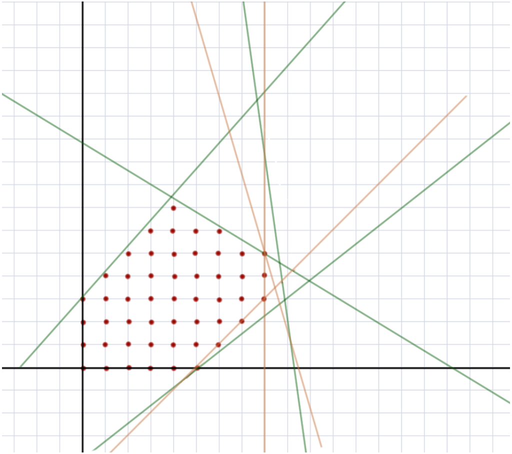
# Exemplo de adição de cortes



# Exemplo de adição de cortes



# Exemplo de adição de cortes



# Mas $P_I$ é um poliedro?

Um poliedro $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ é racional se $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}^m$

# Mas $P_I$ é um poliedro?

Um poliedro $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ é racional se $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}^m$

Veremos que, se $P$ é um poliedro racional, então $P_I$ é um poliedro

# Mas $P_I$ é um poliedro?

Um poliedro $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ é racional se $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}^m$

Veremos que, se $P$ é um poliedro racional, então $P_I$ é um poliedro

- Ou seja, $P_I = P(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{b}')$ para algum $\boldsymbol{A}'$ e $\boldsymbol{b}'$

# Mas $P_I$ é um poliedro?

Um poliedro $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ é racional se $\boldsymbol{A} \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{Q}^m$

Veremos que, se $P$ é um poliedro racional, então $P_I$ é um poliedro

- Ou seja, $P_I = P(\boldsymbol{A}', \boldsymbol{b}')$ para algum $\boldsymbol{A}'$ e $\boldsymbol{b}'$

Mas veremos alguns conceitos antes para poder provar o resultado

# Poliedro Inteiro

Um poliedro $P$ é inteiro se $P = P_I$

# Poliedro Inteiro

Um poliedro $P$ é inteiro se $P = P_I$

**Teorema**. Podemos mostrar que as seguintes afirmações são equivalentes sobre um poliedro racional $P$:

# Poliedro Inteiro

Um poliedro $P$ é inteiro se $P = P_I$

**Teorema**. Podemos mostrar que as seguintes afirmações são equivalentes sobre um poliedro racional $P$:

(a) $P$ é inteiro;

# Poliedro Inteiro

Um poliedro $P$ é inteiro se $P = P_I$

**Teorema**. Podemos mostrar que as seguintes afirmações são equivalentes sobre um poliedro racional $P$:

(a) $P$ é inteiro;

(b) cada face não vazia de $P$ contém vetores inteiros;

# Poliedro Inteiro

Um poliedro $P$ é inteiro se $P = P_I$

**Teorema**. Podemos mostrar que as seguintes afirmações são equivalentes sobre um poliedro racional $P$:

(a) $P$ é inteiro;

(b) cada face não vazia de $P$ contém vetores inteiros;

(c) cada face não vazia minimal de $P$ contém vetores inteiros;

# Poliedro Inteiro

Um poliedro $P$ é inteiro se $P = P_I$

**Teorema**. Podemos mostrar que as seguintes afirmações são equivalentes sobre um poliedro racional $P$:

(a) $P$ é inteiro;

(b) cada face não vazia de $P$ contém vetores inteiros;

(c) cada face não vazia minimal de $P$ contém vetores inteiros;

(d) $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in P\}$ é atingido por um $\boldsymbol{x}$ inteiro para todo $\boldsymbol{c}$ para o qual o máximo é finito.

# Poliedro Inteiro

Um poliedro $P$ é inteiro se $P = P_I$

**Teorema**. Podemos mostrar que as seguintes afirmações são equivalentes sobre um poliedro racional $P$:

(a) $P$ é inteiro;

(b) cada face não vazia de $P$ contém vetores inteiros;

(c) cada face não vazia minimal de $P$ contém vetores inteiros;

(d) $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in P\}$ é atingido por um $\boldsymbol{x}$ inteiro para todo $\boldsymbol{c}$ para o qual o máximo é finito.

**Prova**. Exercício.

# Matrizes TU

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ é totalmente unimodular (TU) se o valor de cada subdeterminante de $\boldsymbol{A}$ é $0$, $1$ ou $-1$.

# Matrizes TU

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ é totalmente unimodular (TU) se o valor de cada subdeterminante de $\boldsymbol{A}$ é $0$, $1$ ou $-1$.

- Exemplo: matriz de incidência de um digrafo

# Matrizes TU

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ é totalmente unimodular (TU) se o valor de cada subdeterminante de $\boldsymbol{A}$ é $0$, $1$ ou $-1$.

- Exemplo: matriz de incidência de um digrafo
- Exemplo: matriz de incidência de um grafo bipartido

# Matrizes TU

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ é totalmente unimodular (TU) se o valor de cada subdeterminante de $\boldsymbol{A}$ é $0$, $1$ ou $-1$.

- Exemplo: matriz de incidência de um digrafo
- Exemplo: matriz de incidência de um grafo bipartido

**Teorema**. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz TU e $\boldsymbol{b}$ um vetor inteiro. Então, $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ é inteiro.

# Outros resultados

**Lema**. Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são matrizes TU, então

# Outros resultados

**Lema**. Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são matrizes TU, então

(a) $A^T$ é TU;

# Outros resultados

**Lema**. Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são matrizes TU, então

(a) $A^T$ é TU;

(b) $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ é TU.

# Outros resultados

**Lema**. Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são matrizes TU, então

(a) $A^T$ é TU;

(b) $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ é TU.

**Corolário**. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz TU e $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ vetores inteiros. Então os seguintes problemas de programação linear têm solução inteira:

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\} = \min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}.$$

# Matrizes Unimodulares

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ de posto-linha completo é unimodular se $\boldsymbol{A}$ é inteira e cada base de $\boldsymbol{A}$ tem determinante $1$ ou $-1$

# Matrizes Unimodulares

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ de posto-linha completo é unimodular se $\boldsymbol{A}$ é inteira e cada base de $\boldsymbol{A}$ tem determinante $1$ ou $-1$

- Lembrando que uma base de uma matriz $m \times n$ é uma submatriz de $\boldsymbol{A}$ inversível de ordem $m$

# Matrizes Unimodulares

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ de posto-linha completo é unimodular se $\boldsymbol{A}$ é inteira e cada base de $\boldsymbol{A}$ tem determinante $1$ ou $-1$

- Lembrando que uma base de uma matriz $m \times n$ é uma submatriz de $\boldsymbol{A}$ inversível de ordem $m$

**Exercício**. $\boldsymbol{A}$ é TU se e somente se $(\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{A})$ é unimodular.

# Teorema

Antes, um resultado útil...

# Teorema

Antes, um resultado útil...

**Lema**. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz inteira quadrada. Então, $\boldsymbol{A}^{-1}$ é existe e é inteira se e somente $\det A = \pm 1$.

# Teorema

Antes, um resultado útil...

**Lema**. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz inteira quadrada. Então, $\boldsymbol{A}^{-1}$ é existe e é inteira se e somente $\det A = \pm 1$.

- Tais matrizes são chamadas de unimodulares

# Teorema

Antes, um resultado útil...

**Lema**. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz inteira quadrada. Então, $\boldsymbol{A}^{-1}$ é existe e é inteira se e somente $\det A = \pm 1$.

- Tais matrizes são chamadas de unimodulares
- Aqui expandimos o conceito para matrizes não quadradas

# Teorema

Antes, um resultado útil...

**Lema**. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz inteira quadrada. Então, $\boldsymbol{A}^{-1}$ é existe e é inteira se e somente $\det A = \pm 1$.

- Tais matrizes são chamadas de unimodulares
- Aqui expandimos o conceito para matrizes não quadradas

**Teorema**. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz inteira de posto-linha completo. Então, $P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ é inteiro para cada vetor inteiro $\boldsymbol{b}$ se e somente se $\boldsymbol{A}$ é unimodular.

# Corolário

**Corolário**. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz inteira. Então, a matriz $\boldsymbol{A}$ é TU se e somente se para cada vetor inteiro $\boldsymbol{b}$ o poliedro $\{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ é inteiro.

# Exercício

**Exercício**. Uma matriz $\boldsymbol{A}$ é TU se e somente se para quaisquer vetores inteiros $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$, ambos os lados da equação (de dualidade linar):

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} = \min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$$

são atingidos por vetores inteiros $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ (se forem finitios).

# Teorema

**Teorema**. Seja $A$ uma matriz com entradas $0$, $+1$ e $-1$. As seguintes afirmações são equivalentes.

# Teorema

**Teorema**. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz com entradas $0$, $+1$ e $-1$. As seguintes afirmações são equivalentes.

- $\boldsymbol{A}$ é TU;

# Teorema

**Teorema**. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz com entradas $0$, $+1$ e $-1$. As seguintes afirmações são equivalentes.

- $\boldsymbol{A}$ é TU;
- para cada vetor inteiro $\boldsymbol{b}$ o poliedro $\{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$ só tem vértices inteiros;

# Teorema

**Teorema**. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz com entradas $0$, $+1$ e $-1$. As seguintes afirmações são equivalentes.

- $\boldsymbol{A}$ é TU;
- para cada vetor inteiro $\boldsymbol{b}$ o poliedro $\{\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$ só tem vértices inteiros;
- cada coleção de colunas de $\boldsymbol{A}$ pode ser particionada em duas partes, de modo que a soma das colunas em uma parte menos a soma das colunas na outra parte é um vetor com entradas $0$, $+1$ e $-1$.

# Teorema

**Teorema**. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz com entradas $0$, $+1$ e $-1$. As seguintes afirmações são equivalentes.

- $\boldsymbol{A}$ é TU;
- para cada vetor inteiro $\boldsymbol{b}$ o poliedro $\{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$ só tem vértices inteiros;
- cada coleção de colunas de $\boldsymbol{A}$ pode ser particionada em duas partes, de modo que a soma das colunas em uma parte menos a soma das colunas na outra parte é um vetor com entradas $0$, $+1$ e $-1$.
- cada submatriz não singular de $\boldsymbol{A}$ tem uma linha com um número ímpar de componentes não nulas.

# Teorema

**Teorema**. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz com entradas $0$, $+1$ e $-1$. As seguintes afirmações são equivalentes.

- $\boldsymbol{A}$ é TU;
- para cada vetor inteiro $\boldsymbol{b}$ o poliedro $\{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$ só tem vértices inteiros;
- cada coleção de colunas de $\boldsymbol{A}$ pode ser particionada em duas partes, de modo que a soma das colunas em uma parte menos a soma das colunas na outra parte é um vetor com entradas $0$, $+1$ e $-1$.
- cada submatriz não singular de $\boldsymbol{A}$ tem uma linha com um número ímpar de componentes não nulas.
- nenhuma submatriz quadrada de $\boldsymbol{A}$ tem determinante $+2$ ou $-2$.

# Teorema

**Teorema**. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz com entradas $0$, $+1$ e $-1$. As seguintes afirmações são equivalentes.

- $\boldsymbol{A}$ é TU;
- para cada vetor inteiro $\boldsymbol{b}$ o poliedro $\{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ só tem vértices inteiros;
- cada coleção de colunas de $\boldsymbol{A}$ pode ser particionada em duas partes, de modo que a soma das colunas em uma parte menos a soma das colunas na outra parte é um vetor com entradas $0$, $+1$ e $-1$.
- cada submatriz não singular de $\boldsymbol{A}$ tem uma linha com um número ímpar de componentes não nulas.
- nenhuma submatriz quadrada de $\boldsymbol{A}$ tem determinante $+2$ ou $-2$.

**Prova**. Veja Schrijver.

# Exercícios

**Exercício**. Seja $G$ um grafo orientado e $\boldsymbol{A}$ a matriz de incidência de $G$. Mostre que $\boldsymbol{A}$ é TU.

# Exercícios

**Exercício**. Seja $G$ um grafo orientado e $\boldsymbol{A}$ a matriz de incidência de $G$. Mostre que $\boldsymbol{A}$ é TU.

**Exercício**. Seja $G$ um grafo e $\boldsymbol{A}$ a matriz de incidência de $G$. Mostre que $\boldsymbol{A}$ é TU se e só se $G$ é bipartido.

# Exercícios

**Exercício**. Seja $G$ um grafo orientado e $\boldsymbol{A}$ a matriz de incidência de $G$. Mostre que $\boldsymbol{A}$ é TU.

**Exercício**. Seja $G$ um grafo e $\boldsymbol{A}$ a matriz de incidência de $G$. Mostre que $\boldsymbol{A}$ é TU se e só se $G$ é bipartido.

**Exercício**. Utilize os resultados mencionados nos exercícios anteriores para provar o Teorema de König: Num grafo bipartido, a cardinalidade de um emparelhamento máximo é igual à cardinalidade de uma cobertura mínima por vértices.

# Teorema

**Teorema**. Um poliedro racional $P$ é inteiro se e somente se cada hiperplano suporte racional de $P$ contém vetores inteiros.

# Corolário

**Corolário**. Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema racional. Então, $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}\}$ é atingido por um vetor inteiro $\boldsymbol{x}^*$, para cada vetor $\boldsymbol{c}$ para o qual o máximo é finito, se e só se, $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}\}$ é inteiro para cada vetor inteiro $\boldsymbol{c}$ para o qual o máximo é finito.

# Dualidade

Relembrando o teorema forte de dualidade da programação linear:

# Dualidade

Relembrando o teorema forte de dualidade da programação linear:

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\} = \min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}\colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$$

# Dualidade

Relembrando o teorema forte de dualidade da programação linear:

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\} = \min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}\colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \ge \boldsymbol{0}\}$$

Seria muito bom se o teorema fosse válido também para programação linear inteira...

# Dualidade

Relembrando o teorema forte de dualidade da programação linear:

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\} = \min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}\colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$$

Seria muito bom se o teorema fosse válido também para programação linear inteira...

- Mas nem sempre é verdade...

# Dualidade

Relembrando o teorema forte de dualidade da programação linear:

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\} = \min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b}\colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$$

Seria muito bom se o teorema fosse válido também para programação linear inteira...

- Mas nem sempre é verdade...

Um sistema racional $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ é totalmente dual integral (TDI) se

# Dualidade

Relembrando o teorema forte de dualidade da programação linear:

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\} = \min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$$

Seria muito bom se o teorema fosse válido também para programação linear inteira...

- Mas nem sempre é verdade...

Um sistema racional $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ é totalmente dual integral (TDI) se

- o mínimo de $\min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$

# Dualidade

Relembrando o teorema forte de dualidade da programação linear:

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\} = \min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$$

Seria muito bom se o teorema fosse válido também para programação linear inteira...

- Mas nem sempre é verdade...

Um sistema racional $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ é totalmente dual integral (TDI) se

- o mínimo de $\min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$
- é atingido por uma solução ótima $\boldsymbol{y}$ inteira

# Dualidade

Relembrando o teorema forte de dualidade da programação linear:

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\} = \min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$$

Seria muito bom se o teorema fosse válido também para programação linear inteira...

- Mas nem sempre é verdade...

Um sistema racional $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ é totalmente dual integral (TDI) se

- o mínimo de $\min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$
- é atingido por uma solução ótima $\boldsymbol{y}$ inteira
- para cada vetor inteiro $\boldsymbol{c}$ para o qual o máximo é finito

# Totalmente Dual Integral

Um sistema racional $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ é totalmente dual integral (TDI) se

- o mínimo de $\min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$
- é atingido por uma solução ótima $\boldsymbol{y}$ inteira
- para cada vetor inteiro $\boldsymbol{c}$ para o qual o máximo é finito

# Totalmente Dual Integral

Um sistema racional $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ é totalmente dual integral (TDI) se

- o mínimo de $\min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$
- é atingido por uma solução ótima $\boldsymbol{y}$ inteira
- para cada vetor inteiro $\boldsymbol{c}$ para o qual o máximo é finito

Relembrando um Corolário...

# Totalmente Dual Integral

Um sistema racional $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ é totalmente dual integral (TDI) se

- o mínimo de $\min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$
- é atingido por uma solução ótima $\boldsymbol{y}$ inteira
- para cada vetor inteiro $\boldsymbol{c}$ para o qual o máximo é finito

Relembrando um Corolário...

**Corolário**. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz TU e $b$, $c$ vetores inteiros. Então os seguintes problemas de programação linear têm solução inteira:

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}\} = \min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}.$$

# Totalmente Dual Integral

Um sistema racional $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ é totalmente dual integral (TDI) se

- o mínimo de $\min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$
- é atingido por uma solução ótima $\boldsymbol{y}$ inteira
- para cada vetor inteiro $\boldsymbol{c}$ para o qual o máximo é finito

Relembrando um Corolário...

**Corolário**. Seja $\boldsymbol{A}$ uma matriz TU e $b$, $c$ vetores inteiros. Então os seguintes problemas de programação linear têm solução inteira:

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}\} = \min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}.$$

Ou seja, se $\boldsymbol{A}$ é TU então $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ é TDI

# Exercícios

**Exercício**. Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema TDI. Mostre que se $\boldsymbol{b}$ é inteiro e o $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}\}$ é finito, então o problema de maximização tem solução ótima inteira.

# Exercícios

**Exercício**. Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema TDI. Mostre que se $\boldsymbol{b}$ é inteiro e o $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}\}$ é finito, então o problema de maximização tem solução ótima inteira.

**Corolário**. Se $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ é um sistema TDI e $\boldsymbol{b}$ é inteiro, então $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ é inteiro.

# TDI é propriedade de sistema, não de poliedro...

O sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# TDI é propriedade de sistema, não de poliedro...

O sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

define o mesmo poliedro que o sistema

# TDI é propriedade de sistema, não de poliedro...

O sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

define o mesmo poliedro que o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# TDI é propriedade de sistema, não de poliedro...

O sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

define o mesmo poliedro que o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mas o primeiro é TDI, enquanto que o segundo não.

# TDI é propriedade de sistema, não de poliedro...

O sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

define o mesmo poliedro que o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mas o primeiro é TDI, enquanto que o segundo não.

Em geral, sistemas TDI são redundantes.

# Exercício

**Exercício**. Se $\boldsymbol{A}$ é uma matriz inteira e $\boldsymbol{b}$ é um vetor racional, então o sistema $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ é TDI se e só se o mínimo em

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\} = \min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$$

tem uma solução ótima inteira $\boldsymbol{y}$ para cada vetor inteiro $\boldsymbol{c}$ para o qual o mínimo é finito.

# TDI minimal

Um sistema $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ é TDI minimal se esse sistema é TDI, mas qualquer subsistema próprio que define o mesmo poliedro que $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ não é TDI.

# TDI minimal

Um sistema $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ é TDI minimal se esse sistema é TDI, mas qualquer subsistema próprio que define o mesmo poliedro que $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ não é TDI.

**Teorema**. Para cada poliedro racional $P$ existe um sistema TDI $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{A}$ inteiro e $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. O vetor $\boldsymbol{b}$ pode ser escolhido inteiro se e só se $P$ for inteiro. Além disso, se $P$ é de dimensão plena, existe um único sistema TDI minimal $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{A}$ inteiro e $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Nesse caso, $\boldsymbol{b}$ é inteiro se e só se $P$ é inteiro.

# Corolário

**Corolário**. Um poliedro racional $P$ é inteiro se e só se existe um sistema TDI $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ com $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ e $\boldsymbol{A}$ inteiro.

# Corolário

**Corolário**. Um poliedro racional $P$ é inteiro se e só se existe um sistema TDI $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ com $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ e $\boldsymbol{A}$ inteiro.

Se fossemos capazes de descobrir um sistema TDI que caracteriza um poliedro inteiro, poderíamos resolver qualquer programa linear inteiro com função objetivo racional.

# Corolário

**Corolário**. Um poliedro racional $P$ é inteiro se e só se existe um sistema TDI $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ com $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ e $\boldsymbol{A}$ inteiro.

Se fossemos capazes de descobrir um sistema TDI que caracteriza um poliedro inteiro, poderíamos resolver qualquer programa linear inteiro com função objetivo racional.

- O problema é que sistema TDI minimal pode ter tamanho exponencial...

# Exemplo

**Exemplo**. Seja $k$ um número inteiro e $P$ o poliedro

$$P = \{(x, y) \colon x \geq 0, x + ky \geq 0\}.$$

Um sistema $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ TDI minimal tal que $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ é dado pelas inequações $x + jy \geq 0$ para $j = 0, \ldots, k$. Tal sistema tem tamanho $O(k \log k)$, que é portanto exponencial no tamanho da instância.

# Complexidade

Dado um sistema racional $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, o problema de decidir se tal sistema determina um poliedro inteiro está em co-NP

# Complexidade

Dado um sistema racional $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$, o problema de decidir se tal sistema determina um poliedro inteiro está em co-NP

- Não se sabe se o problema está em NP

# Complexidade

Dado um sistema racional $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$, o problema de decidir se tal sistema determina um poliedro inteiro está em co-NP

- Não se sabe se o problema está em NP
- Se o posto de $\boldsymbol{A}$ é fixo, então o problema pode ser resolvido em tempo polinomial

# Complexidade

Dado um sistema racional $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$, o problema de decidir se tal sistema determina um poliedro inteiro está em co-NP

- Não se sabe se o problema está em NP
- Se o posto de $\boldsymbol{A}$ é fixo, então o problema pode ser resolvido em tempo polinomial

Decidir se um dado sistema $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ é TDI está em co-NP quando a matriz $\boldsymbol{A}$ é inteira.

# Complexidade

Dado um sistema racional $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$, o problema de decidir se tal sistema determina um poliedro inteiro está em co-NP

- Não se sabe se o problema está em NP
- Se o posto de $\boldsymbol{A}$ é fixo, então o problema pode ser resolvido em tempo polinomial

Decidir se um dado sistema $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ é TDI está em co-NP quando a matriz $\boldsymbol{A}$ é inteira.

- Quando a matriz não é inteira, não se sabe se o problema está em co-NP.