

Combinatória Poliédrica

Fecho Inteiro

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

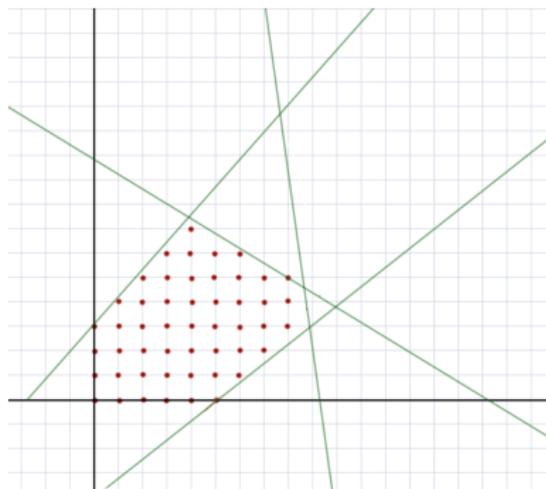
Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-25 13:25

Fecho Inteiro

Dado um poliedro P , o fecho inteiro P_I de P é o conjunto:

$$P_I = \text{conv}\{\mathbf{x} \in P : \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n\}$$

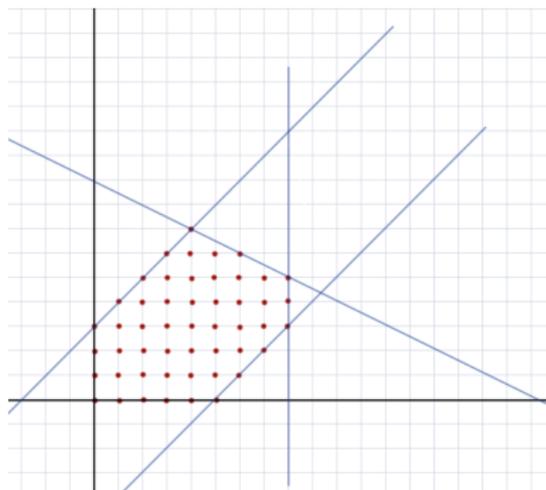


Poliedro P

Fecho Inteiro

Dado um poliedro P , o fecho inteiro P_I de P é o conjunto:

$$P_I = \text{conv}\{\mathbf{x} \in P : \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n\}$$



Poliedro P_I

Fecho Inteiro

Dada um poliedro P , o fecho inteiro P_I de P é o conjunto:

$$P_I = \text{conv}\{\mathbf{x} \in P : \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n\}$$

Ou seja, resolver

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{sujeito a } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ &\quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^n \end{aligned}$$

é equivalente a resolver $\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \in P(\mathbf{A}, \mathbf{b})_I\}$

Ou seja, se conseguirmos calcular P_I , podemos resolver o problema de programação linear inteira!

Uma dificuldade...

Ou seja, se conseguirmos calcular P_I , podemos resolver o problema de programação linear inteira!

Mas Programação Linear Inteira é NP-difícil...

Então não esperamos que exista um algoritmo polinomial para calcular P_I

Mas talvez em alguns casos seja possível calcular P_I rapidamente

- Ou rápido o suficiente...

Planos-de-Corte

Um algoritmo para resolver PLI poderia ser o seguinte:

- Comece com o poliedro $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$
- Enquanto a solução ótima do poliedro não for inteira
 - Adicione uma nova restrição que corte a solução ótima atual
 - Mas que não remova nenhuma solução inteira

Essas restrições são chamadas de **planos-de-corte**

- E é o nosso foco nessa parte do curso

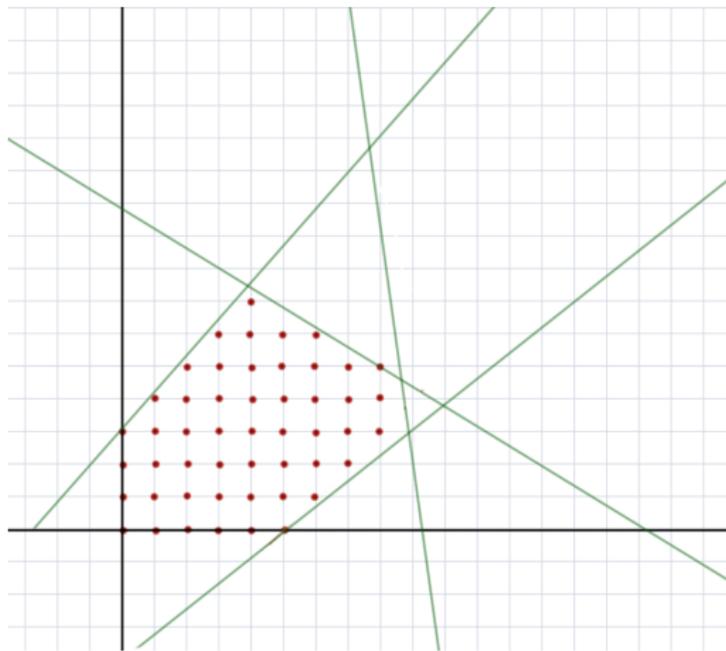
Vamos ver que teremos uma sequência finita de poliedros tal que

$$P \supseteq P' \supseteq P'' \supseteq \dots \supseteq P_I$$

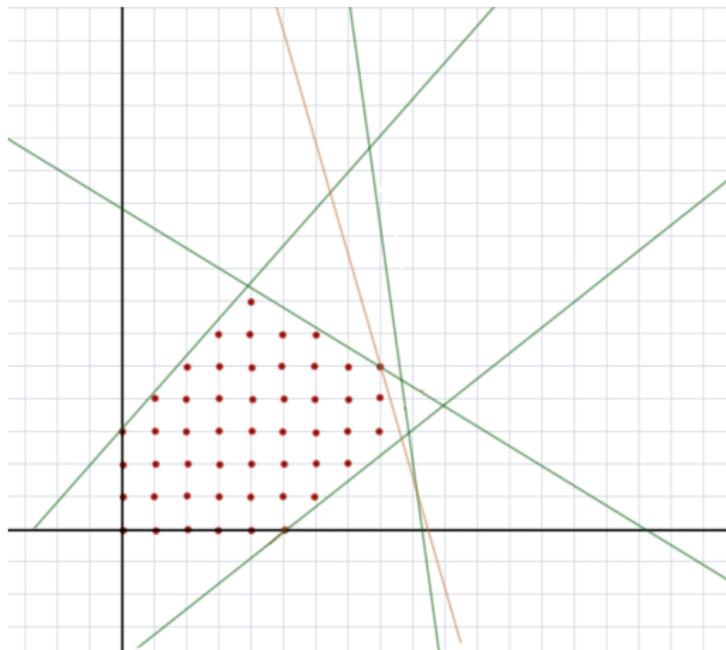
Ou seja, esse processo termina e sempre com P_I

- Portanto, conseguimos resolver o nosso problema de PLI

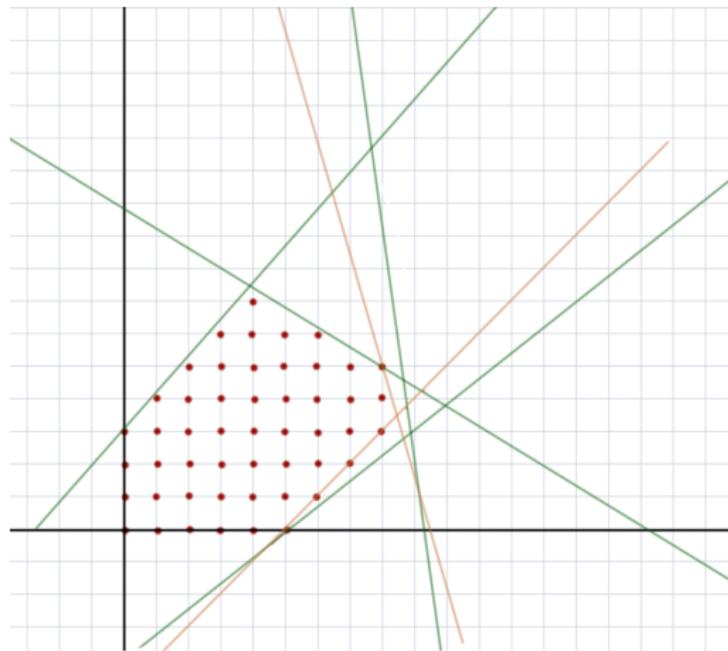
Exemplo



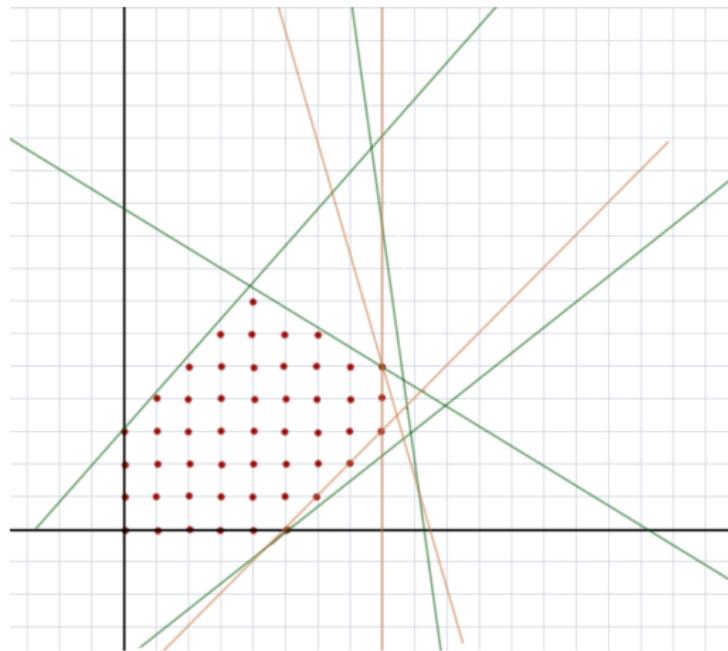
Exemplo de adição de cortes



Exemplo de adição de cortes



Exemplo de adição de cortes



Mas P_I é um poliedro?

Um poliedro $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ é racional se $\mathbf{A} \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{Q}^m$

Veremos que, se P é um poliedro racional, então P_I é um poliedro

- Ou seja, $P_I = P(\mathbf{A}', \mathbf{b}')$ para algum \mathbf{A}' e \mathbf{b}'

Mas veremos alguns conceitos antes para poder provar o resultado

Poliedro Inteiro

Um poliedro P é inteiro se $P = P_I$

Teorema. Podemos mostrar que as seguintes afirmações são equivalentes sobre um poliedro racional P :

- (a) P é inteiro;
- (b) cada face não vazia de P contém vetores inteiros;
- (c) cada face não vazia minimal de P contém vetores inteiros;
- (d) $\max\{c^T x : x \in P\}$ é atingido por um x inteiro para todo c para o qual o máximo é finito.

Prova. Exercício.

Matrizes TU

Uma matriz A é totalmente unimodular (TU) se o valor de cada subdeterminante de A é 0, 1 ou -1 .

- Exemplo: matriz de incidência de um digrafo
- Exemplo: matriz de incidência de um grafo bipartido

Teorema. Seja A uma matriz TU e b um vetor inteiro. Então, $P(A, b)$ é inteiro.

Outros resultados

Lema. Se \mathbf{A} e \mathbf{B} são matrizes TU, então

(a) \mathbf{A}^T é TU;

(b) $\begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}$ é TU.

Corolário. Seja \mathbf{A} uma matriz TU e \mathbf{b} , \mathbf{c} vetores inteiros. Então os seguintes problemas de programação linear têm solução inteira:

$$\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} = \min\{\mathbf{y}^T \mathbf{b} : \mathbf{y}^T \mathbf{A} = \mathbf{c}^T, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}.$$

Matrizes Unimodulares

Uma matriz A de posto-linha completo é unimodular se A é inteira e cada base de A tem determinante 1 ou -1

- Lembrando que uma base de uma matriz $m \times n$ é uma submatriz de A inversível de ordem m

Exercício. A é TU se e somente se (IA) é unimodular.

Teorema

Antes, um resultado útil...

Lema. Seja A uma matriz inteira quadrada. Então, A^{-1} existe e é inteira se e somente se $\det A = \pm 1$.

- Tais matrizes são chamadas de **unimodulares**
- Aqui expandimos o conceito para matrizes não quadradas

Teorema. Seja A uma matriz inteira de posto-linha completo. Então, $P=(A, b)$ é inteiro para cada vetor inteiro b se e somente se A é unimodular.

Corolário

Corolário. Seja A uma matriz inteira. Então, a matriz A é TU se e somente se para cada vetor inteiro b o poliedro $\{x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ é inteiro.

Exercício

Exercício. Uma matriz A é TU se e somente se para quaisquer vetores inteiros b e c , ambos os lados da equação (de dualidade linear):

$$\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} = \min\{y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0\}$$

são atingidos por vetores inteiros x e y (se forem finitos).

Teorema

Teorema. Seja A uma matriz com entradas 0 , $+1$ e -1 . As seguintes afirmações são equivalentes.

- A é TU;
- para cada vetor inteiro b o poliedro $\{x: Ax \leq b, x \geq 0\}$ só tem vértices inteiros;
- cada coleção de colunas de A pode ser particionada em duas partes, de modo que a soma das colunas em uma parte menos a soma das colunas na outra parte é um vetor com entradas 0 , $+1$ e -1 .
- cada submatriz não singular de A tem uma linha com um número ímpar de componentes não nulas.
- nenhuma submatriz quadrada de A tem determinante $+2$ ou -2 .

Prova. Veja Schrijver.

Exercícios

Exercício. Seja G um grafo orientado e A a matriz de incidência de G . Mostre que A é TU.

Exercício. Seja G um grafo e A a matriz de incidência de G . Mostre que A é TU se e só se G é bipartido.

Exercício. Utilize os resultados mencionados nos exercícios anteriores para provar o **Teorema de König**: Num grafo bipartido, a cardinalidade de um emparelhamento máximo é igual à cardinalidade de uma cobertura mínima por vértices.

Teorema

Teorema. Um poliedro racional P é inteiro se e somente se cada hiperplano suporte racional de P contém vetores inteiros.

Corolário

Corolário. Seja $Ax \leq b$ um sistema racional. Então, $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$ é atingido por um vetor inteiro x^* , para cada vetor c para o qual o máximo é finito, se e só se, $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$ é inteiro para cada vetor inteiro c para o qual o máximo é finito.

Dualidade

Relembrando o teorema forte de dualidade da programação linear:

$$\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\} = \min\{\mathbf{y}^T \mathbf{b} : \mathbf{y}^T \mathbf{A} = \mathbf{c}^T, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

Seria muito bom se o teorema fosse válido também para programação linear inteira...

- Mas nem sempre é verdade...

Um sistema racional $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ é totalmente dual integral (TDI) se

- o mínimo de $\min\{\mathbf{y}^T \mathbf{b} : \mathbf{y}^T \mathbf{A} = \mathbf{c}^T, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$
- é atingido por uma solução ótima \mathbf{y} inteira
- para cada vetor inteiro \mathbf{c} para o qual o máximo é finito

Totalmente Dual Integral

Um sistema racional $Ax \leq b$ é totalmente dual integral (TDI) se

- o mínimo de $\min\{y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0\}$
- é atingido por uma solução ótima y inteira
- para cada vetor inteiro c para o qual o máximo é finito

Relembrando um Corolário...

Corolário. Seja A uma matriz TU e b, c vetores inteiros. Então os seguintes problemas de programação linear têm solução inteira:

$$\max\{c^T x : Ax \leq b\} = \min\{y^T b : y^T A = c^T, y \geq 0\}.$$

Ou seja, se A é TU então $Ax \leq b$ é TDI

Exercícios

Exercício. Seja $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ um sistema TDI. Mostre que se \mathbf{b} é inteiro e o $\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$ é finito, então o problema de maximização tem solução ótima inteira.

Corolário. Se $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ é um sistema TDI e \mathbf{b} é inteiro, então $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ é inteiro.

TDI é propriedade de sistema, não de poliedro...

O sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

define o mesmo poliedro que o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mas o primeiro é TDI, enquanto que o segundo não.

Em geral, sistemas TDI são redundantes.

Exercício

Exercício. Se \mathbf{A} é uma matriz inteira e \mathbf{b} é um vetor racional, então o sistema $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ é TDI se e só se o mínimo em

$$\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} = \min\{\mathbf{y}^T \mathbf{b} : \mathbf{y}^T \mathbf{A} \geq \mathbf{c}^T, \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$$

tem uma solução ótima inteira \mathbf{y} para cada vetor inteiro \mathbf{c} para o qual o mínimo é finito.

TDI minimal

Um sistema $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ é **TDI minimal** se esse sistema é TDI, mas qualquer subsistema próprio que define o mesmo poliedro que $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ não é TDI.

Teorema. Para cada poliedro racional P existe um sistema TDI $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ com \mathbf{A} inteiro e $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. O vetor \mathbf{b} pode ser escolhido inteiro se e só se P for inteiro. Além disso, se P é de dimensão plena, existe um único sistema TDI minimal $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ com \mathbf{A} inteiro e $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Nesse caso, \mathbf{b} é inteiro se e só se P é inteiro.

Corolário

Corolário. Um poliedro racional P é inteiro se e só se existe um sistema TDI $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ com $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ e \mathbf{A} inteiro.

Se fossemos capazes de descobrir um sistema TDI que caracteriza um poliedro inteiro, poderíamos resolver qualquer programa linear inteiro com função objetivo racional.

- O problema é que sistema TDI minimal pode ter tamanho exponencial...

Exemplo

Exemplo. Seja k um número inteiro e P o poliedro

$$P = \{(x, y) : x \geq 0, x + ky \geq 0\}.$$

Um sistema $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ TDI minimal tal que $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ é dado pelas inequações $x + jy \geq 0$ para $j = 0, \dots, k$. Tal sistema tem tamanho $O(k \log k)$, que é portanto exponencial no tamanho da instância.

Complexidade

Dado um sistema racional $Ax \leq b$, o problema de decidir se tal sistema determina um poliedro inteiro está em **co-NP**

- Não se sabe se o problema está em **NP**
- Se o posto de A é fixo, então o problema pode ser resolvido em tempo polinomial

Decidir se um dado sistema $Ax \leq b$ é TDI está em **co-NP** quando a matriz A é inteira.

- Quando a matriz não é inteira, não se sabe se o problema está em **co-NP**.