Combinatória Poliédrica
Facetas

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-27 15:57

Facetas

Uma face não-trivial F de $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ é uma faceta se F não está contida em nenhuma outra face própria de $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

Facetas

Uma face não-trivial F de $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ é uma faceta se F não está contida em nenhuma outra face própria de $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

- Algumas vezes dizemos que uma inequação é uma faceta

Facetas

Uma face não-trivial F de $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ é uma faceta se F não está contida em nenhuma outra face própria de $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

- Algumas vezes dizemos que uma inequação é uma faceta
- Isso quando a inequação define a faceta

Facetas

Uma face não-trivial F de $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ é uma faceta se F não está contida em nenhuma outra face própria de $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

- Algumas vezes dizemos que uma inequação é uma faceta
- Isso quando a inequação define a faceta

Veremos que as facetas formam um sistema "minimal" para representar $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

Redundância

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema de inequações

Redundância

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema de inequações

- Para simplificar, vamos denotar $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ por M

Redundância

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema de inequações

- Para simplificar, vamos denotar $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ por M

Seja $I \subseteq M$, o sistema $\boldsymbol{A}_{I*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_I$ é redundante em relação a $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ se $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = P(\boldsymbol{A}_{M\setminus I*}, \boldsymbol{b}_{M\setminus I})$

Redundância

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema de inequações

- Para simplificar, vamos denotar $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ por M

Seja $I \subseteq M$, o sistema $\boldsymbol{A}_{I*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_I$ é redundante em relação a $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ se $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = P(\boldsymbol{A}_{M \setminus I*}, \boldsymbol{b}_{M \setminus I})$

- Se $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ tem subsistema redudante, então ele é redundante

Redundância

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema de inequações

- Para simplificar, vamos denotar $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ por M

Seja $I \subseteq M$, o sistema $\boldsymbol{A}_{I*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_I$ é redundante em relação a $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ se $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = P(\boldsymbol{A}_{M\setminus I*}, \boldsymbol{b}_{M\setminus I})$

- Se $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ tem subsistema redudante, então ele é redundante
- Caso contrário, o sistema é irredundante

Redundância

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema de inequações

- Para simplificar, vamos denotar $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ por M

Seja $I \subseteq M$, o sistema $\boldsymbol{A}_{I*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_I$ é redundante em relação a $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ se $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = P(\boldsymbol{A}_{M \setminus I*}, \boldsymbol{b}_{M \setminus I})$

- Se $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ tem subsistema redudante, então ele é redundante
- Caso contrário, o sistema é irredundante

Uma inequação $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_i$ irredundante em relação a $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ é dita equação implicita se $i \in \mathrm{ig}(P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}))$

Redundância

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema de inequações

- Para simplificar, vamos denotar $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ por M

Seja $I \subseteq M$, o sistema $\boldsymbol{A}_{I*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_I$ é redundante em relação a $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ se $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = P(\boldsymbol{A}_{M \setminus I*}, \boldsymbol{b}_{M \setminus I})$

- Se $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ tem subsistema redudante, então ele é redundante
- Caso contrário, o sistema é irredundante

Uma inequação $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_i$ irredundante em relação a $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ é dita equação implicita se $i \in \mathrm{ig}(P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}))$

$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{d}$ é irredundante se

Redundância

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema de inequações

- Para simplificar, vamos denotar $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ por M

Seja $I \subseteq M$, o sistema $\boldsymbol{A}_{I*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_I$ é redundante em relação a $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ se $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = P(\boldsymbol{A}_{M \setminus I*}, \boldsymbol{b}_{M \setminus I})$

- Se $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ tem subsistema redudante, então ele é redundante
- Caso contrário, o sistema é irredundante

Uma inequação $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_i$ irredundante em relação a $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ é dita equação implicita se $i \in \mathrm{ig}(P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}))$

$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{d}$ é irredundante se

- $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_i$ é irredundante com $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Cx} \leq \boldsymbol{d}, -\boldsymbol{Cx} \leq -\boldsymbol{d}$

Redundância

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema de inequações

- Para simplificar, vamos denotar $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ por M

Seja $I \subseteq M$, o sistema $\boldsymbol{A}_{I*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_I$ é redundante em relação a $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ se $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = P(\boldsymbol{A}_{M \setminus I*}, \boldsymbol{b}_{M \setminus I})$

- Se $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ tem subsistema redudante, então ele é redundante
- Caso contrário, o sistema é irredundante

Uma inequação $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_i$ irredundante em relação a $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ é dita equação implicita se $i \in \mathrm{ig}(P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}))$

$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{d}$ é irredundante se

- $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_i$ é irredundante com $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Cx} \leq \boldsymbol{d}, -\boldsymbol{Cx} \leq -\boldsymbol{d}$
- $\boldsymbol{C}$ tem posto-linha completo

Redundância

Seja $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ um sistema de inequações

- Para simplificar, vamos denotar $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ por M

Seja $I \subseteq M$, o sistema $\boldsymbol{A}_{I*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_I$ é redundante em relação a $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ se $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = P(\boldsymbol{A}_{M\setminus I*}, \boldsymbol{b}_{M\setminus I})$

- Se $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ tem subsistema redudante, então ele é redundante
- Caso contrário, o sistema é irredundante

Uma inequação $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_i$ irredundante em relação a $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ é dita equação implicita se $i \in \mathrm{ig}(P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}))$

$\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{d}$ é irredundante se

- $\boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_i$ é irredundante com $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}, \boldsymbol{Cx} \leq \boldsymbol{d}, -\boldsymbol{Cx} \leq -\boldsymbol{d}$
- $\boldsymbol{C}$ tem posto-linha completo

Redundância ou Irredundância é uma propriedade do sistema, não do poliedro, pois um poliedro pode ter várias representações

Exercício

Exercício. Mostre que se a inequação $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ é válida para $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ então existe $\delta' \leq \delta$ tal que $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \delta'$ pode ser escrita como combinação cônica das inequações de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$.

Teorema

Teorema. Seja F uma faceta de $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Então

Teorema

Teorema. Seja F uma faceta de $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Então

(a) $\mathrm{ig}(P) \subseteq \mathrm{ig}(F)$

Teorema

Teorema. Seja F uma faceta de $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Então

(a) $\mathrm{ig}(P) \subseteq \mathrm{ig}(F)$

(b) para todo $i \in \mathrm{ig}(F) \setminus \mathrm{ig}(P)$, $F = \mathrm{fa}(\{i\})$

Teorema

Teorema. Seja F uma faceta de $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Então

(a) $\mathrm{ig}(P) \subseteq \mathrm{ig}(F)$

(b) para todo $i \in \mathrm{ig}(F) \setminus \mathrm{ig}(P)$, $F = \mathrm{fa}(\{i\})$

Note que as facetas são definidas por uma única inequação

Teorema

Teorema. Seja F uma faceta de $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$. Então

(a) $\mathrm{ig}(P) \subseteq \mathrm{ig}(F)$

(b) para todo $i \in \mathrm{ig}(F) \setminus \mathrm{ig}(P)$, $F = \mathrm{fa}(\{i\})$

Note que as facetas são definidas por uma única inequação

- Mas não significa que toda inequação define uma faceta...

Corolário

Corolário. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e $\mathcal{F}$ o conjunto das facetas de P. Então,

Corolário

Corolário. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e $\mathcal{F}$ o conjunto das facetas de P. Então,

(a) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \neq F_2$ então $\mathrm{ig}(F_1) \cap \mathrm{ig}(F_2) = \mathrm{ig}(P)$;

Corolário

Corolário. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e $\mathcal{F}$ o conjunto das facetas de P. Então,

(a) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \neq F_2$ então $\mathrm{ig}(F_1) \cap \mathrm{ig}(F_2) = \mathrm{ig}(P)$;

(b) $|\mathcal{F}| \leq |M| - |\,\mathrm{ig}(P)|$;

Corolário

Corolário. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e $\mathcal{F}$ o conjunto das facetas de P. Então,

(a) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \neq F_2$ então $\mathrm{ig}(F_1) \cap \mathrm{ig}(F_2) = \mathrm{ig}(P)$;

(b) $|\mathcal{F}| \leq |M| - |\mathrm{ig}(P)|$;

(c) existe $I \subseteq M$ tal que $I \subseteq M \setminus \mathrm{ig}(P)$, $|I| = |\mathcal{F}|$ e $F \in \mathcal{F}$ se e só se existe precisamente um $i \in I$ tal que $F = \mathrm{fa}(\{i\})$.

Corolário

Corolário. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e $\mathcal{F}$ o conjunto das facetas de P. Então,

(a) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \neq F_2$ então $\mathrm{ig}(F_1) \cap \mathrm{ig}(F_2) = \mathrm{ig}(P)$;

(b) $|\mathcal{F}| \leq |M| - |\mathrm{ig}(P)|$;

(c) existe $I \subseteq M$ tal que $I \subseteq M \setminus \mathrm{ig}(P)$, $|I| = |\mathcal{F}|$ e $F \in \mathcal{F}$ se e só se existe precisamente um $i \in I$ tal que $F = \mathrm{fa}(\{i\})$.

I do item (c) é chamado conjunto dos índices-faceta

Corolário

Corolário. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e $\mathcal{F}$ o conjunto das facetas de P. Então,

(a) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \neq F_2$ então $\mathrm{ig}(F_1) \cap \mathrm{ig}(F_2) = \mathrm{ig}(P)$;

(b) $|\mathcal{F}| \leq |M| - |\,\mathrm{ig}(P)|$;

(c) existe $I \subseteq M$ tal que $I \subseteq M \setminus \mathrm{ig}(P)$, $|I| = |\mathcal{F}|$ e $F \in \mathcal{F}$ se e só se existe precisamente um $i \in I$ tal que $F = \mathrm{fa}(\{i\})$.

I do item (c) é chamado conjunto dos índices-faceta

- todo $i \in I$ gera faceta

Lemas

Lema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$, I um conjunto índice-faceta de P e $j \in M \setminus (I \cup \mathrm{ig}(P))$. Então $\boldsymbol{A}_{j*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_j$ é redundante com $\boldsymbol{A}_{I*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_I$.

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ um poliedro, $I \subseteq M \setminus \mathrm{ig}(P)$, $J \subseteq \mathrm{ig}(P)$ e suponha $P = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}_{J*}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_J, \boldsymbol{A}_{I*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_I\}$. Essa descrição de P é irredundante se e somente se

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ um poliedro, $I \subseteq M \setminus \mathrm{ig}(P)$, $J \subseteq \mathrm{ig}(P)$ e suponha $P = \{\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{A}_{J*}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_J, \boldsymbol{A}_{I*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_I\}$. Essa descrição de P é irredundante se e somente se

(a) I é um conjunto de índices-faceta de P;

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ um poliedro, $I \subseteq M \setminus \mathrm{ig}(P)$, $J \subseteq \mathrm{ig}(P)$ e suponha $P = \{\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{A}_{J*}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_J, \boldsymbol{A}_{I*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_I\}$. Essa descrição de P é irredundante se e somente se

(a) I é um conjunto de índices-faceta de P;

(b) $\boldsymbol{A}_{J*}$ é uma matrix $p \times n$ de posto-linha completo.

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ um poliedro, $I \subseteq M \setminus \mathrm{ig}(P)$, $J \subseteq \mathrm{ig}(P)$ e suponha $P = \{\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}_{J*}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_J, \boldsymbol{A}_{I*}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}_I\}$. Essa descrição de P é irredundante se e somente se

(a) I é um conjunto de índices-faceta de P;

(b) $\boldsymbol{A}_{J*}$ é uma matrix $p \times n$ de posto-linha completo.

Corolário. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro de dimensão plena. Então, para todo $I \subseteq M$, $\boldsymbol{A}_{I*}x \leq \boldsymbol{b}_I$ é uma descrição irredundante de P se e só se I é o conjunto de índices-faceta de P.

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e F uma face não trivial de P. As seguintes afirmações são equivalentes:

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e F uma face não trivial de P. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) F é uma faceta de P;

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e F uma face não trivial de P. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) F é uma faceta de P;

(b) F é uma face própria maximal de P;

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e F uma face não trivial de P. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) F é uma faceta de P;

(b) F é uma face própria maximal de P;

(c) $\dim(F) = \dim(P) - 1$;

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e F uma face não trivial de P. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) F é uma faceta de P;

(b) F é uma face própria maximal de P;

(c) $\dim(F) = \dim(P) - 1$;

(d) F contém $\dim(P)$ vetores afim-independentes;

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e F uma face não trivial de P. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) F é uma faceta de P;

(b) F é uma face própria maximal de P;

(c) $\dim(F) = \dim(P) - 1$;

(d) F contém $\dim(P)$ vetores afim-independentes;

(e) Seja $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \gamma$ uma inequação válida em relação a P tal que $F = \{\boldsymbol{x} \in P \colon \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \gamma\}$. Então, para toda inequação $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} \leq \delta$ válida em relação a P, tal que $F \subseteq \{\boldsymbol{x} \in P \colon \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} = \delta\}$, temos que existe um vetor $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^{\mathrm{ig}(P)}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ tal que

$$\boldsymbol{d}^T = \alpha\boldsymbol{c}^T + \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A}_{\mathrm{ig}(P)*},$$

$$\delta = \alpha\gamma + \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b}_{\mathrm{ig}(P)}.$$

Corolário

Corolário. Seja $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro de dimensão plena e $F = \{\boldsymbol{x} \in P \colon \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \gamma\}$ uma face de P. São equivalentes:

Corolário

Corolário. Seja $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro de dimensão plena e $F = \{\boldsymbol{x} \in P \colon \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \gamma\}$ uma face de P. São equivalentes:

(a) F é uma faceta de P;

Corolário

Corolário. Seja $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro de dimensão plena e $F = \{\boldsymbol{x} \in P \colon \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} = \gamma\}$ uma face de P. São equivalentes:

(a) F é uma faceta de P;

(b) $\dim(F) = n - 1$;

Corolário

Corolário. Seja $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro de dimensão plena e $F = \{\boldsymbol{x} \in P \colon \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = \gamma\}$ uma face de P. São equivalentes:

(a) F é uma faceta de P;

(b) $\dim(F) = n - 1$;

(c) se $\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} = \delta$, $\boldsymbol{d} \neq 0$, é uma inequação válida tal que $F \subseteq \{\boldsymbol{x} \in P \colon \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{x} = \delta\}$, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ tal que $\boldsymbol{d}^T = \alpha\boldsymbol{c}^T$ e $\delta = \alpha\gamma$.