

Combinatória Poliédrica

Facetas

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-27 15:58

Facetas

Uma face não-trivial F de $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ é uma **faceta** se F não está contida em nenhuma outra face própria de $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

- Algumas vezes dizemos que uma inequação é uma faceta
- Isso quando a inequação define a faceta

Veremos que as facetas formam um sistema “**minimal**” para representar $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

Redundância

Seja $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ um sistema de inequações

- Para simplificar, vamos denotar $\text{ind}(\mathbf{A})$ por M

Seja $I \subseteq M$, o sistema $\mathbf{A}_{I*}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_I$ é redundante em relação a $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ se $P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{A}_{M \setminus I*}, \mathbf{b}_{M \setminus I})$

- Se $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ tem subsistema redundante, então ele é **redundante**
- Caso contrário, o sistema é **irredundante**

Uma inequação $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_i$ irredundante em relação a $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ é dita **equação implícita** se $i \in \text{ig}(P(\mathbf{A}, \mathbf{b}))$

$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{Cx} = \mathbf{d}$ é irredundante se

- $\mathbf{A}_{i*}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_i$ é irredundante com $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{Cx} \leq \mathbf{d}, -\mathbf{Cx} \leq -\mathbf{d}$
- \mathbf{C} tem posto-linha completo

Redundância ou Irredundância é uma propriedade do sistema, não do poliedro, pois um poliedro pode ter várias representações

Exercício

Exercício. Mostre que se a inequação $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \delta$ é válida para $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ então existe $\delta' \leq \delta$ tal que $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \delta'$ pode ser escrita como combinação cônica das inequações de $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$.

Teorema

Teorema. Seja F uma faceta de $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$. Então

(a) $\text{ig}(P) \subseteq \text{ig}(F)$

(b) para todo $i \in \text{ig}(F) \setminus \text{ig}(P)$, $F = \text{fa}(\{i\})$

Note que as facetas são definidas por uma única inequação

- Mas não significa que toda inequação define uma faceta...

Corolário

Corolário. Seja $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ um poliedro e \mathcal{F} o conjunto das facetas de P . Então,

- (a) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, $F_1 \neq F_2$ então $\text{ig}(F_1) \cap \text{ig}(F_2) = \text{ig}(P)$;
- (b) $|\mathcal{F}| \leq |M| - |\text{ig}(P)|$;
- (c) existe $I \subseteq M$ tal que $I \subseteq M \setminus \text{ig}(P)$, $|I| = |\mathcal{F}|$ e $F \in \mathcal{F}$ se e só se existe precisamente um $i \in I$ tal que $F = \text{fa}(\{i\})$.

I do item (c) é chamado conjunto dos **índices-faceta**

- todo $i \in I$ gera faceta

Lemas

Lema. Sejam $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$, I um conjunto índice-faceta de P e $j \in M \setminus (I \cup \text{ig}(P))$. Então $\mathbf{A}_{j*} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_j$ é redundante com $\mathbf{A}_{I*} \mathbf{x} \leq \mathbf{b}_I$.

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \neq \emptyset$ um poliedro, $I \subseteq M \setminus \text{ig}(P)$, $J \subseteq \text{ig}(P)$ e suponha $P = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}_{J*}\mathbf{x} = \mathbf{b}_J, \mathbf{A}_{I*}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_I\}$. Essa descrição de P é irredundante se e somente se

- (a) I é um conjunto de índices-faceta de P ;
- (b) \mathbf{A}_{J*} é uma matrix $p \times n$ de posto-linha completo.

Corolário. Seja $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro de dimensão plena. Então, para todo $I \subseteq M$, $\mathbf{A}_{I*}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}_I$ é uma descrição irredundante de P se e só se I é o conjunto de índices-faceta de P .

Teorema

Teorema. Seja $P = P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ um poliedro e F uma face não trivial de P . As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) F é uma faceta de P ;
- (b) F é uma face própria maximal de P ;
- (c) $\dim(F) = \dim(P) - 1$;
- (d) F contém $\dim(P)$ vetores afim-independentes;
- (e) Seja $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \gamma$ uma inequação válida em relação a P tal que $F = \{\mathbf{x} \in P : \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \gamma\}$. Então, para toda inequação $\mathbf{d}^T \mathbf{x} \leq \delta$ válida em relação a P , tal que $F \subseteq \{\mathbf{x} \in P : \mathbf{d}^T \mathbf{x} = \delta\}$, temos que existe um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\text{ig}(P)}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$ tal que

$$\mathbf{d}^T = \alpha \mathbf{c}^T + \mathbf{u}^T \mathbf{A}_{\text{ig}(P)*},$$

$$\delta = \alpha \gamma + \mathbf{u}^T \mathbf{b}_{\text{ig}(P)}.$$

Corolário

Corolário. Seja $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro de dimensão plena e $F = \{\mathbf{x} \in P : \mathbf{c}^T \mathbf{x} = \gamma\}$ uma face de P . São equivalentes:

- (a) F é uma faceta de P ;
- (b) $\dim(F) = n - 1$;
- (c) se $\mathbf{d}^T \mathbf{x} = \delta$, $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$, é uma inequação válida tal que $F \subseteq \{\mathbf{x} \in P : \mathbf{d}^T \mathbf{x} = \delta\}$, então existe $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ tal que $\mathbf{d}^T = \alpha \mathbf{c}^T$ e $\delta = \alpha \gamma$.