Combinatória Poliédrica
Faces

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-21 21:14

Inequação válida

Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

Inequação válida

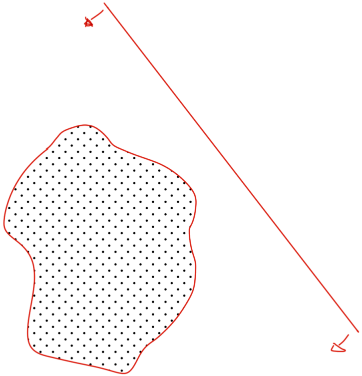
Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

Se $S \subseteq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha\}$ então $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ é uma inequação válida para S

Inequação válida

Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

Se $S \subseteq \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha\}$ então $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ é uma inequação válida para S



Hiperplano de suporte

Seja $H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = \alpha\}$

Hiperplano de suporte

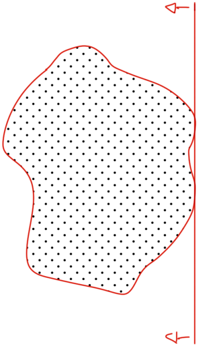
Seja $H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \alpha\}$

Se $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ para todo $\boldsymbol{x} \in S$ e $S \cap H \neq \emptyset$ então H é um hiperplano de suporte de S

Hiperplano de suporte

Seja $H = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \alpha\}$

Se $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ para todo $\boldsymbol{x} \in S$ e $S \cap H \neq \emptyset$ então H é um hiperplano de suporte de S



Face

Seja $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro

Face

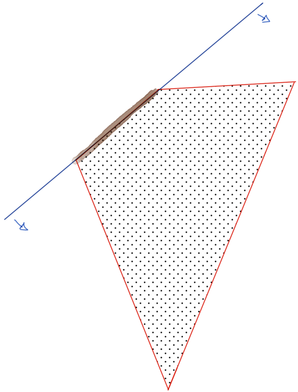
Seja $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro

Um conjunto $F \subseteq P$ é uma face de P se existe uma inequação válida $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ para P tal que $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \alpha\}$

Face

Seja $P \subseteq \mathbb{R}^n$ um poliedro

Um conjunto $F \subseteq P$ é uma face de P se existe uma inequação válida $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ para P tal que $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \alpha\}$



Definições

F é

Definições

F é

- face própria se $F \neq P$

Definições

F é

- face própria se $F \neq P$
- face não-trivial se $\emptyset \neq F \neq P$

Definições

F é

- face própria se $F \neq P$
- face não-trivial se $\emptyset \neq F \neq P$

Se $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ é uma inequação válida para P então dizemos que $P \cap \{x \colon \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \alpha\}$ é uma face induzida ou definda por $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$

Definições

F é

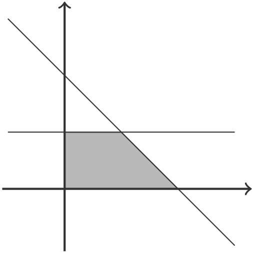
- face própria se $F \neq P$
- face não-trivial se $\emptyset \neq F \neq P$

Se $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ é uma inequação válida para P então dizemos que $P \cap \{x \colon \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} = \alpha\}$ é uma face induzida ou definda por $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$

Exercício. Prove que faces de poliedros também são poliedros.

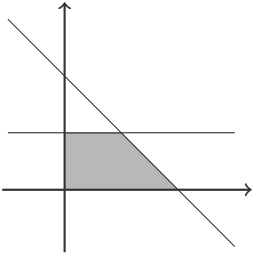
Exemplos de faces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Exemplos de faces

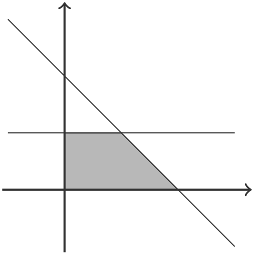
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



O segmento de $(1, 1)$ a $(2, 0)$ é uma face induzida por $x + y \leq 2$

Exemplos de faces

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



O ponto $(2, 0)$ é uma face induzida por $x \leq 2$

Proposição

Proposição. Se $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é um poliedro, então

Proposição

Proposição. Se $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é um poliedro, então

(a) P é uma face de si mesmo;

Proposição

Proposição. Se $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é um poliedro, então

(a) P é uma face de si mesmo;

(b) $\emptyset$ é uma face de P;

Proposição

Proposição. Se $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é um poliedro, então

(a) P é uma face de si mesmo;

(b) $\emptyset$ é uma face de P;

(c) Se $F = \{x \in P \colon \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = \alpha\}$ é uma face não-trivial de P, então $a \neq 0$

Proposição

Proposição. Se $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é um poliedro, então

(a) P é uma face de si mesmo;

(b) $\emptyset$ é uma face de P;

(c) Se $F = \{x \in P \colon \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = \alpha\}$ é uma face não-trivial de P, então $a \neq 0$

Prova. Exercício.

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ um poliedro, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e

$$z^* = \begin{cases} +\infty, & \text{caso } \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \text{ seja ilimitado sobre } P, \\ \max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in P\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ um poliedro, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e

$$z^* = \begin{cases} +\infty, & \text{caso } \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \text{ seja ilimitado sobre } P, \\ \max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in P\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então,

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ um poliedro, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e

$$z^* = \begin{cases} +\infty, & \text{caso } \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \text{ seja ilimitado sobre } P, \\ \max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in P\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então,

(a) a inequação $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \gamma$ é válida para P se e somente se $\gamma \geq z^*$;

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ um poliedro, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e

$$z^* = \begin{cases} +\infty, & \text{caso } \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \text{ seja ilimitado sobre } P, \\ \max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in P\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então,

(a) a inequação $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \gamma$ é válida para P se e somente se $\gamma \geq z^*$;

(b) $z^* < +\infty$ implica que $F = \{\boldsymbol{x} \in P \colon \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = z^*\}$ é uma face não-vazia de P e $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = z^*\}$ é um hiperplano de suporte de P (caso $\boldsymbol{c} \neq 0$);

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ um poliedro, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e

$$z^* = \begin{cases} +\infty, & \text{caso } \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \text{ seja ilimitado sobre } P, \\ \max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in P\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então,

(a) a inequação $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \gamma$ é válida para P se e somente se $\gamma \geq z^*$;

(b) $z^* < +\infty$ implica que $F = \{\boldsymbol{x} \in P \colon \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = z^*\}$ é uma face não-vazia de P e $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = z^*\}$ é um hiperplano de suporte de P (caso $\boldsymbol{c} \neq 0$);

Esse teorema é base para o Algoritmo Simplex!

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ um poliedro, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ e

$$z^* = \begin{cases} +\infty, & \text{caso } \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \text{ seja ilimitado sobre } P, \\ \max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in P\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então,

(a) a inequação $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \leq \gamma$ é válida para P se e somente se $\gamma \geq z^*$;

(b) $z^* < +\infty$ implica que $F = \{\boldsymbol{x} \in P \colon \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = z^*\}$ é uma face não-vazia de P e $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} = z^*\}$ é um hiperplano de suporte de P (caso $\boldsymbol{c} \neq 0$);

Esse teorema é base para o Algoritmo Simplex!

- As soluções ótimas de um PL estão nas faces do poliedro

Conjunto Igualdade e Faces Induzidas

Dado um poliedro $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, queremos determinar quais inequções de $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ definem uma face F

Conjunto Igualdade e Faces Induzidas

Dado um poliedro $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, queremos determinar quais inequações de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ definem uma face F

Seja $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ o conjunto de índices das linhas de A

Conjunto Igualdade e Faces Induzidas

Dado um poliedro $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, queremos determinar quais inequações de $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ definem uma face F

Seja $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ o conjunto de índices das linhas de A

Definimos o conjunto igualdade de F como sendo

$$\mathrm{ig}(F) = \{i \in \mathrm{ind}(\boldsymbol{A})\colon \boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x} = b_i \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in F\}.$$

Conjunto Igualdade e Faces Induzidas

Dado um poliedro $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, queremos determinar quais inequções de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ definem uma face F

Seja $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ o conjunto de índices das linhas de A

Definimos o conjunto igualdade de F como sendo

$$\mathrm{ig}(F) = \{i \in \mathrm{ind}(\boldsymbol{A})\colon \boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x} = b_i \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in F\}.$$

Para $I \subseteq \mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$, seja

$$\mathrm{fa}(I) = \{\boldsymbol{x} \in P\colon A_{I*}x = b_I\}.$$

Conjunto Igualdade e Faces Induzidas

Dado um poliedro $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, queremos determinar quais inequções de $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ definem uma face F

Seja $\mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ o conjunto de índices das linhas de A

Definimos o conjunto igualdade de F como sendo

$$\mathrm{ig}(F) = \{i \in \mathrm{ind}(\boldsymbol{A})\colon \boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x} = b_i \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in F\}.$$

Para $I \subseteq \mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$, seja

$$\mathrm{fa}(I) = \{\boldsymbol{x} \in P\colon A_{I*}x = b_I\}.$$

O conjunto $\mathrm{fa}(I)$ é chamado de face induzida por I

Conjunto Igualdade e Faces Induzidas

Dado um poliedro $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, queremos determinar quais inequções de $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ definem uma face F

Seja $\operatorname{ind}(\boldsymbol{A})$ o conjunto de índices das linhas de A

Definimos o conjunto igualdade de F como sendo

$$\operatorname{ig}(F) = \{i \in \operatorname{ind}(\boldsymbol{A})\colon \boldsymbol{A}_{i*}\boldsymbol{x} = b_i \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in F\}.$$

Para $I \subseteq \operatorname{ind}(\boldsymbol{A})$, seja

$$\operatorname{fa}(I) = \{\boldsymbol{x} \in P\colon A_{I*}x = b_I\}.$$

O conjunto $\operatorname{fa}(I)$ é chamado de face induzida por I

Exercício. Considere $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ e $I \subseteq \operatorname{ind}(\boldsymbol{A})$. Prove que $\operatorname{fa}(I)$ é uma face de P.

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e $F \neq \emptyset$ um subconjunto de P. As seguintes afirmações são equivalentes:

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e $F \neq \emptyset$ um subconjunto de P. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) F é uma face de P;

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e $F \neq \emptyset$ um subconjunto de P. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) F é uma face de P;

(b) existe $I \subseteq \mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ tal que $F = \mathrm{fa}(I)$;

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e $F \neq \emptyset$ um subconjunto de P. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) F é uma face de P;

(b) existe $I \subseteq \mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ tal que $F = \mathrm{fa}(I)$;

(c) $F = \mathrm{fa}(\mathrm{ig}(F))$.

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e $F \neq \emptyset$ um subconjunto de P. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) F é uma face de P;

(b) existe $I \subseteq \mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ tal que $F = \mathrm{fa}(I)$;

(c) $F = \mathrm{fa}(\mathrm{ig}(F))$.

Ou seja, para obter uma face de um poliedro basta escolher algumas inequações de $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ e exigir que satisfaçam com igualdade.

Teorema

Teorema. Sejam $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ um poliedro e $F \neq \emptyset$ um subconjunto de P. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) F é uma face de P;

(b) existe $I \subseteq \mathrm{ind}(\boldsymbol{A})$ tal que $F = \mathrm{fa}(I)$;

(c) $F = \mathrm{fa}(\mathrm{ig}(F))$.

Ou seja, para obter uma face de um poliedro basta escolher algumas inequações de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ e exigir que satisfaçam com igualdade.

Corolário. Se $P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ com $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$, então P tem no máximo $2^m + 1$ faces.