Combinatória Poliédrica
Descrição de Poliedros

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-21 21:14

Descrição Externa

Até o momento, descrevemos um poliedro como

$$P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$$

Descrição Externa

Até o momento, descrevemos um poliedro como

$$P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$$

Essa é a chamada descrição externa do poliedro

Descrição Externa

Até o momento, descrevemos um poliedro como

$$P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$$

Essa é a chamada descrição externa do poliedro

- Uma descrição a partir da interseção de semi-espaços

Descrição Externa

Até o momento, descrevemos um poliedro como

$$P = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$$

Essa é a chamada descrição externa do poliedro

- Uma descrição a partir da interseção de semi-espaços

Veremos uma outra descrição, a descrição interna

Teorema de Weyl, 1935

Teorema. Para toda matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, temos que $\operatorname{lin}(\boldsymbol{A})$, $\operatorname{afim}(\boldsymbol{A})$, $\operatorname{conv}(\boldsymbol{A})$ e $\operatorname{cone}(\boldsymbol{A})$ são poliedros.

Soma de Poliedros

Se P_1 e P_2 são subconjuntos do $\mathbb{R}^n$, então a soma de P_1 com P_2 é

$$P_1 + P_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x = x_1 + x_2, x_1 \in P_1, x_2 \in P_2\}$$

Soma de Poliedros

Se P_1 e P_2 são subconjuntos do $\mathbb{R}^n$, então a soma de P_1 com P_2 é

$$P_1 + P_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x = x_1 + x_2, x_1 \in P_1, x_2 \in P_2\}$$

Teorema. Se P_1 e P_2 são poliedros, então $P_1 + P_2$ é um poliedro.

Soma de Poliedros

Se P_1 e P_2 são subconjuntos do $\mathbb{R}^n$, então a soma de P_1 com P_2 é

$$P_1 + P_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x = x_1 + x_2, x_1 \in P_1, x_2 \in P_2\}$$

Teorema. Se P_1 e P_2 são poliedros, então $P_1 + P_2$ é um poliedro.

Prova. Exercício.

Soma de Poliedros

Se P_1 e P_2 são subconjuntos do $\mathbb{R}^n$, então a soma de P_1 com P_2 é

$$P_1 + P_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \colon x = x_1 + x_2, x_1 \in P_1, x_2 \in P_2\}$$

Teorema. Se P_1 e P_2 são poliedros, então $P_1 + P_2$ é um poliedro.

Prova. Exercício.

Corolário. Se $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n'}$, então

$$\operatorname{conv}(A) + \operatorname{cone}(B)$$

é um poliedro.

Soma de Poliedros

Se P_1 e P_2 são subconjuntos do $\mathbb{R}^n$, então a soma de P_1 com P_2 é

$$P_1 + P_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : x = x_1 + x_2, x_1 \in P_1, x_2 \in P_2\}$$

Teorema. Se P_1 e P_2 são poliedros, então $P_1 + P_2$ é um poliedro.

Prova. Exercício.

Corolário. Se $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m \times n'}$, então

$$\operatorname{conv}(A) + \operatorname{cone}(B)$$

é um poliedro.

Objetivo: provar que todo poliedro é da forma $\operatorname{conv}(A) + \operatorname{cone}(B)$

Farkas novamente

Considere a seguinte versão do Lema de Farkas:

Farkas novamente

Considere a seguinte versão do Lema de Farkas:
$\exists \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sse $\forall \boldsymbol{u}$, se $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}$ então $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \geq 0$

Farkas novamente

Considere a seguinte versão do Lema de Farkas:
$\exists \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sse $\forall \boldsymbol{u}$, se $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}$ então $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \geq 0$

Caracterízamos todos os $\boldsymbol{b}$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ tem solução

Farkas novamente

Considere a seguinte versão do Lema de Farkas:
$\exists \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sse $\forall \boldsymbol{u}$, se $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}$ então $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \geq 0$

Caracterízamos todos os $\boldsymbol{b}$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ tem solução

Por definição,

$$\operatorname{cone}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \colon \text{ existe } \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \text{ tal que } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

e, por tanto, temos a seguinte proposição

Farkas novamente

Considere a seguinte versão do Lema de Farkas:
$\exists \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ sse $\forall \boldsymbol{u}$, se $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}$ então $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \geq 0$

Caracterízamos todos os $\boldsymbol{b}$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$ tem solução

Por definição,

$$\mathrm{cone}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \colon \text{ existe } \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \text{ tal que } \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$$

e, por tanto, temos a seguinte proposição

Proposição. Para toda matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\mathrm{cone}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \colon \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \leq 0 \text{ para todo } \boldsymbol{u} \in P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})\}$$

Entendendo Geometricamente a Proposição

Proposição. Para toda matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\operatorname{cone}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \colon \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} \leq 0 \text{ para todo } \boldsymbol{u} \in P(\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{0})\}$$

Entendendo Geometricamente a Proposição

Proposição. Para toda matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\operatorname{cone}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m : \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} \leq 0 \text{ para todo } \boldsymbol{u} \in P(\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{0})\}$$

Note que $P(\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{0})$ é um cone:

Entendendo Geometricamente a Proposição

Proposição. Para toda matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\operatorname{cone}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \colon \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} \leq 0 \text{ para todo } \boldsymbol{u} \in P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})\}$$

Note que $P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})$ é um cone:

- Se pegarmos uma combinação cônica dos pontos de $P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})$, o resultado também estará em $P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})$

Entendendo Geometricamente a Proposição

Proposição. Para toda matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\operatorname{cone}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \colon \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} \leq 0 \text{ para todo } \boldsymbol{u} \in P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})\}$$

Note que $P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})$ é um cone:

- Se pegarmos uma combinação cônica dos pontos de $P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})$, o resultado também estará em $P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})$

Considere $\boldsymbol{b}$ tal que existe $\boldsymbol{x}$ solução de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$

Entendendo Geometricamente a Proposição

Proposição. Para toda matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\operatorname{cone}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \colon \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \leq 0 \text{ para todo } \boldsymbol{u} \in P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})\}$$

Note que $P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})$ é um cone:

- Se pegarmos uma combinação cônica dos pontos de $P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})$, o resultado também estará em $P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})$

Considere $\boldsymbol{b}$ tal que existe $\boldsymbol{x}$ solução de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$

- Esses são os vetores $\boldsymbol{b}$ com ângulo maior ou igual a $90°$ com todos os vetores do cone $P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})$

Entendendo Geometricamente a Proposição

Proposição. Para toda matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\text{cone}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \colon \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} \leq 0 \text{ para todo } \boldsymbol{u} \in P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})\}$$

Note que $P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})$ é um cone:

- Se pegarmos uma combinação cônica dos pontos de $P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})$, o resultado também estará em $P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})$

Considere $\boldsymbol{b}$ tal que existe $\boldsymbol{x}$ solução de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$

- Esses são os vetores $\boldsymbol{b}$ com ângulo maior ou igual a 90° com todos os vetores do cone $P(\boldsymbol{A}^T, \mathbf{0})$

Esse é o conceito de cone polar

Cone Polar

O cone polar S° de um conjunto S é

$$S^\circ = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0} \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in S\}$$

Cone Polar

O cone polar S° de um conjunto S é

$$S^\circ = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0} \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in S\}$$

O complemento ortogonal $S^\perp$ de S é

$$S^\perp = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in S\}$$

Cone Polar

O cone polar S° de um conjunto S é

$$S^\circ = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{0} \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in S\}$$

O complemento ortogonal $S^\perp$ de S é

$$S^\perp = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \text{ para todo } \boldsymbol{x} \in S\}$$

Note que $S^\perp \subseteq S^\circ$

Reescrevendo a Proposição

Proposição. Para toda matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\operatorname{cone}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \colon \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} \leq 0 \text{ para todo } \boldsymbol{u} \in P(\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{0})\}$$

Reescrevendo a Proposição

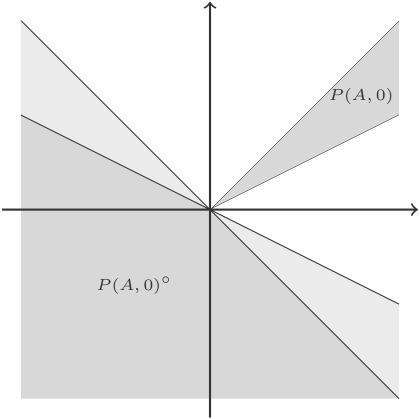
Proposição. Para toda matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\operatorname{cone}(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m \colon \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{b} \leq 0 \text{ para todo } \boldsymbol{u} \in P(\boldsymbol{A}^T, \boldsymbol{0})\}$$

Proposição. Para toda matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{0})^\circ = \operatorname{cone}(\boldsymbol{A}^T)$$

Cone Polar — Visão Geométrica



Exercícios

Exercício. Para $S, S_i \subseteq \mathbb{R}^n$ valem as seguintes afirmações:

(a) $S_i \subseteq S_j$ implica $S_j^\circ \subseteq S_i^\circ$

(b) $S \subseteq S^{\circ\circ}$

(c) $\left(\cup_{i=1}^k S_i\right)^\circ = \cap_{i=1}^k S_i^\circ$

(d) $S^\circ = \text{cone}(S^\circ) = (cone(S))^\circ$

(e) $S = \text{lin}(S)$ implica que $S^\circ = S^\perp$

Proposição

Proposição. Para toda matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$\operatorname{cone}(\boldsymbol{A}^T)^\circ = P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{0})$$

Teorema

Teorema. Para toda matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$P(\boldsymbol{A}, \mathbf{0})^{\circ\circ} = P(\boldsymbol{A}, \mathbf{0}) \text{ e } \operatorname{cone}(\boldsymbol{A})^{\circ\circ} = \operatorname{cone}(\boldsymbol{A})$$

Teorema de Minkoski, 1896

Teorema. Um subconjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ é um cone poliédrico se e somente se K é o fecho cônico de um número finito de vetores. Em outras palavras, para cada matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, existe uma matriz $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ tal que

$$P(\boldsymbol{A}, \mathbf{0}) = \operatorname{cone}(\boldsymbol{B});$$

e, reciprocamente, para cada matriz $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$, existe uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $P(\boldsymbol{A}, \mathbf{0}) = \operatorname{cone}(\boldsymbol{B})$.

Representação Interna

Teorema. Considere $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Então existem conjuntos finitos V, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tais que

$$P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \operatorname{conv}(V) + \operatorname{cone}(E).$$

Prova. Exercício.

Representação Interna

Teorema. Considere $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Então existem conjuntos finitos V, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tais que

$$P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \operatorname{conv}(V) + \operatorname{cone}(E).$$

Corolário. Um subconjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é um politopo se e somente se P é o fecho convexo de um número finito de vetores.

Prova. Exercício.

Representação Interna

Teorema. Considere $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Então existem conjuntos finitos V, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ tais que

$$P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \mathrm{conv}(V) + \mathrm{cone}(E).$$

Corolário. Um subconjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é um politopo se e somente se P é o fecho convexo de um número finito de vetores.

Teorema. Um subconjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é um poliedro se e somente se P é a soma de um politopo e um cone poliédrico.

Prova. Exercício.