Combinatória Poliédrica
Dualidade

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-21 21:15

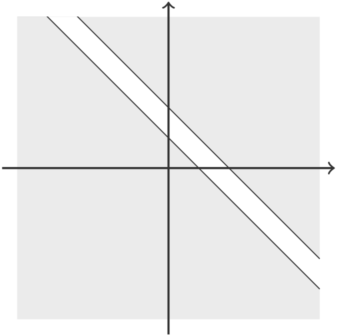
Lema de Farkas

Lema. Seja $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ um vetor. Então, existe um vetor $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ se e somente se para cada vetor $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ com $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ temos $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \geq 0$.

Lema de Farkas

Exemplo de $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ vazio:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

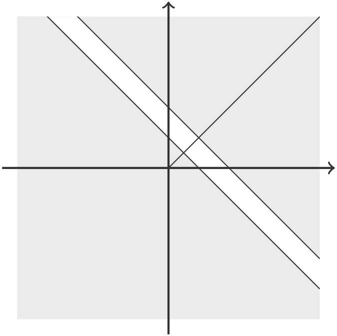


Existe $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} < 0$?

Lema de Farkas

Temos que $y_1 = y_2$, pois

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

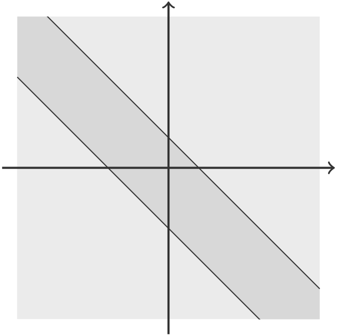


E $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} = -4y_1 + 2y_2 = -2y_1 < 0$ para $y_1 = 1$ (por exemplo)

Lema de Farkas

Exemplo de $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ não vazio:

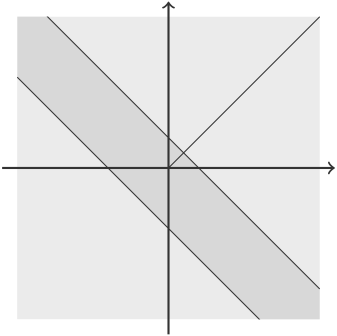
$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



Lema de Farkas

Novamente temos que $y_1 = y_2$, pois

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

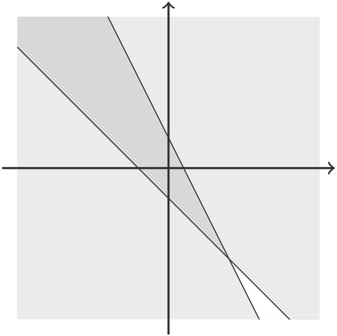


Mas agora $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} = 4y_1 + 2y_2 = 6y_1 \geq 0$ para todo $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$

Lema de Farkas

Outro exemplo de $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ não vazio:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

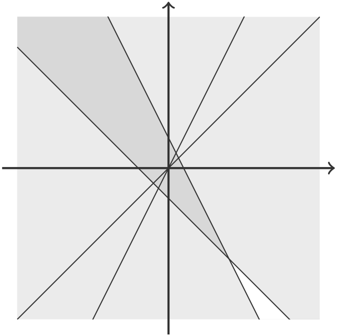


Existe $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} < \boldsymbol{0}$?

Lema de Farkas

Temos que $y_1 = y_2 = 0$, pois

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Mas então $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} = 0$

Lema de Farkas — Caso Geral

Lema. Para matrizes $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ e vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ de dimensões apropriadas temos que

$$\left.\begin{array}{r}\text{Existem } \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y} \text{ tais que}\\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{y} \le \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{D}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}\end{array}\right\} \bigvee \left\{\begin{array}{l}\text{Existem } \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \text{ tais que}\\ \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A}+\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{C} \ge \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{B}+\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{u} \ge \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b} < 0\end{array}\right.$$

(O símbolo $\vee$ denota o "ou" exclusivo.)

Prova. Exercício.

Lema de Farkas — Casos Especiais

Lema. Sejam $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Então, valem as seguintes afirmações:

(a) Existe $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$
$\vee$ existe $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} < 0$;

(b) Existe $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$
$\vee$ existe $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} < 0$;

(c) Existe $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
$\vee$ existe $\boldsymbol{u}$ tal que $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} < 0$;

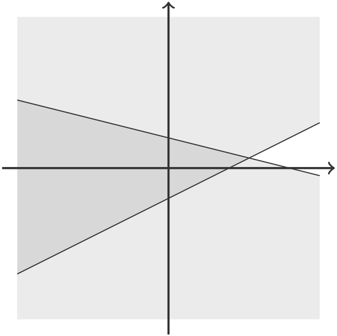
(d) Existe $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
$\vee$ existe $\boldsymbol{u}$ tal que $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{b} < 0$;

Prova. Segue do Lema anterior.

Casos Especiais — Exemplos

Exemplo de $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ não vazio:

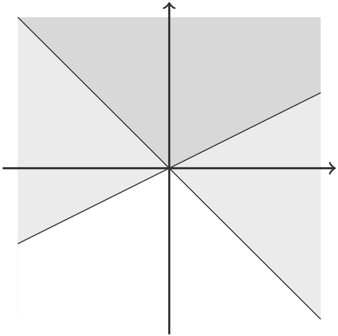
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$



Existe $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} < 0$?

Casos Especiais — Exemplos

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

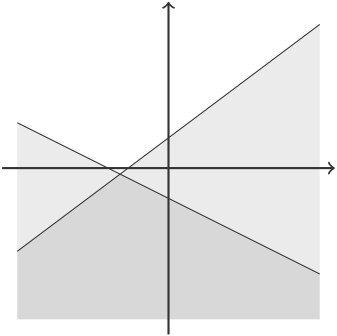


Todo ponto $\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$ que satisfaz $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} \geq \mathbf{0}$ é tal que $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \geq 0$

Casos Especiais — Exemplos

Exemplo de $\boldsymbol{Ax} \leq \boldsymbol{b}$ com $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ vazio:

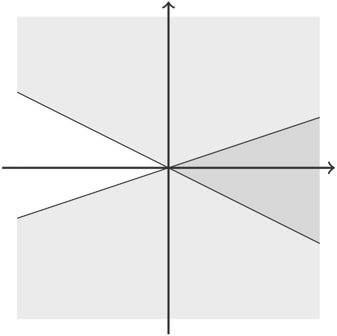
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$



Existe $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} \geq \boldsymbol{0}$ e $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} < 0$?

Casos Especiais — Exemplos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix}$$



Por exemplo, $\boldsymbol{y} = (1, 0)$ satisfaz $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} \geq 0$ e $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} = -4 < 0$

Versão Poliédrica

Lema. As seguintes asserções são válidas:

(i) $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset \quad \vee \quad P^{=}\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{b}^T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \neq \emptyset$;

(ii) $P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset \quad \vee \quad P\left(\begin{pmatrix} -\boldsymbol{A}^T \\ \boldsymbol{b}^T \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \neq \emptyset$;

Programa Linear

Consider o seguinte programa linear:

$$(P) \quad \max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$

- Se $\boldsymbol{x}$ é tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, dizemos que $\boldsymbol{x}$ é uma solução viável
- Se $\boldsymbol{x}^*$ é viável e $\boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}^* \geq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}$ para todo $\boldsymbol{x}$ viável, dizemos que $\boldsymbol{x}^*$ é uma solução ótima

Programa Linear

Podemos rescrever

$$\begin{aligned} (P) \quad & \max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

da seguinte forma

$$\begin{aligned} (P) \quad & \max z \\ & z \leq \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} (P) \quad & \max z \\ & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \leq -z \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Programa Linear

Podemos olhar esse programa

$$\begin{aligned} (P) \quad & \max z \\ & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \leq -z \\ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

na forma de matriz novamente

$$\begin{aligned} (P) \quad & \max z \\ & \begin{pmatrix} -\boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} -z \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para cada $z \in \mathbb{R}$ fixo, temos um poliedro P_z

$$P_z = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \begin{pmatrix} -\boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} -z \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \right\}$$

P_z

Para cada $z \in \mathbb{R}$ fixo, temos um poliedro P_z

$$P_z = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \begin{pmatrix} -\boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} -z \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \right\}$$

Para resolver o programa linear basta resolver

$$\max\{z \colon P_z \neq \emptyset\}$$

Se $P_z = \emptyset$ para todo $z \in \mathbb{R}$, então o programa linear é inviável

Caso contrário, podemos tentar limitar superiormente o valor da solução ótima resolvendo o seguinte problema:

$$\min\{z \colon P_z = \emptyset\}$$

Aplicando Farkas

Para cada $z \in \mathbb{R}$ fixo, temos um poliedro P_z

$$P_z = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \begin{pmatrix} -\boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \boldsymbol{x} \leq \begin{pmatrix} -z \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} \right\}$$

$P_z = \emptyset$ se e somente existe u tal que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} &\geq \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u}^T \begin{pmatrix} -\boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{A} \end{pmatrix} &= \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{u}^T \begin{pmatrix} -z \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} &< 0 \end{aligned}$$

Aplicando Farkas

$P_z = \emptyset$ se e somente existe u tal que

$$\boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{u}^T \begin{pmatrix} -\boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$
$$\boldsymbol{u}^T \begin{pmatrix} -z \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} < 0$$

Temos que $P_z = \emptyset$ se e somente existem λ e $\boldsymbol{y}$ tais que

$$\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} = \lambda \boldsymbol{c}^T$$
$$\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} < \lambda z$$
$$\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$$
$$\lambda \geq 0$$

Aplicando Farkas

Temos que $P_z = \emptyset$ se e somente existe λ e $\boldsymbol{y}$ tais que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} &= \lambda \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} &< \lambda z \\ \boldsymbol{y} &\geq \boldsymbol{0} \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

Lema. Se $P(A, b) \neq \emptyset$, então o sistema acima tem solução se e somente se o seguinte sistema tem solução:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} &< z \\ \boldsymbol{y} &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Novo sistema

Com esse novo sistema

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} &< z \\ \boldsymbol{y} &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

podemos ver que encontrar o menor z tal que $P_z = \emptyset$ é equivalente a resolver o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} (D) \quad & \min \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T \\ & \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Primal e Dual

$$(P) \quad \max \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$$

$$(D) \quad \min \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \qquad \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T \qquad \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$$

(P) é chamado de programa primal e (D) de programa dual

Se $\boldsymbol{x}$ é uma solução viável para (P) e $\boldsymbol{y}$ é uma solução viável para (D), então

$$\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$$

Essa observação é chamada de Teorema Fraco da Dualidade

- O dual é um limitante superior para o primal

Teorema Forte da Dualidade

Definições:

- Se para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} > M$, então (P) é ilimitado
- Se para todo $M \in \mathbb{R}$ existe $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T$ e $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} < M$, então (D) é ilimitado
- Se não existe $\boldsymbol{x}$ tal que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}$, então (P) é inviável
- Se não existe $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ tal que $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T$, então (D) é inviável

Teorema. Seja (P) um programa linear e (D) seu dual. Então:

- Se (P) é ilimitado, então (D) é inviável
- Se (D) é ilimitado, então (P) é inviável
- Se (P) é inviável, então (D) é inviável ou ilimitado
- Se (D) é inviável, então (P) é inviável ou ilimitado
- Se (P) e (D) são viáveis, então os seus valores ótimos são iguais

Teorema Forte da Dualidade

Lema. Seja (P) um programa linear e (D) seu dual. Então:

- Se (P) é ilimitado, então (D) é inviável
- Se (D) é ilimitado, então (P) é inviável

Teorema Forte da Dualidade

Lema. Seja (P) um programa linear e (D) seu dual. Então:

- Se (P) é inviável, então (D) é inviável ou ilimitado
- Se (D) é inviável, então (P) é inviável ou ilimitado

Teorema Forte da Dualidade

Lema. Seja (P) um programa linear e (D) seu dual. Então:

- Se (P) e (D) são viáveis, então os seus valores ótimos são iguais

Folgas Complementares

Teorema. Seja (P) um programa linear e seja (D) seu dual. Suponha que $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são soluções viáveis de (P) e (D), respectivamente. Então $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ são ótimos se e somente se, para todo j,

- se $y_j > 0$, então $A_{j*}x = b_j$
- se $A_{j*}x < b_j$, então $y_j = 0$

Outra forma de ver o Lema de Farkas

Considere o seguinte programa linear e seu dual:

$$(P) \quad \max \mathbf{0}^T \boldsymbol{x} \qquad\qquad (D) \quad \min \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \qquad\qquad \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A} = \mathbf{0}^T$$
$$\boldsymbol{y} \ge \mathbf{0}$$

Note que $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \neq \emptyset$ se e somente se (P) é viável e note que

- Se (P) é viável, seu valor ótimo é zero
- Se (P) é viável, então (D) também é viável
- E pelo Teorema Forte da Dualidade, (P) e (D) têm o mesmo valor ótimo
- $\boldsymbol{y} = \mathbf{0}$ é sempre solução dual viável

$P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \emptyset$ sse existe solução dual viável $\boldsymbol{y}$ tal que $\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b} < 0$

Relaxação Lagrangiana — Outra forma de obter o dual

Considere o seguinte programa primal:

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & \max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

Podemos relaxar o problema

- permitindo que $\boldsymbol{A}_{j*}\boldsymbol{x} > b_j$,
- mas penalizando com um valor $y_j(b_j - \boldsymbol{A}_{j*}\boldsymbol{x})$,
- com $y_j \geq 0$

Ou seja, temos que

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\} \leq \min\{\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\} \colon \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}$$

(por que?)

Calculando o Dual

$$\begin{aligned}
\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\} &\leq \min\{\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x})\} \colon \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\} \\
&= \min\{\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\} \colon \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\} \\
&= \min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} + \max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\} \colon \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\} \\
&= \min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} + \max\{(\boldsymbol{c}^T - \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}\} \colon \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\} \\
&= \min\{\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{b} \colon \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}\}
\end{aligned}$$

Temos dualidade fraca de graça, mas mais do que isso

- Se vale a igualdade, então o $\boldsymbol{y}$ escolhido é tal que $y_j > 0$ ou $\boldsymbol{A}_{j*}x = b_j$ (folgas complementares)
- E, portanto, temos também dualidade forte

Relaxação Langrangiana — Forma Geral

Relaxação Langrangiana é algo muito útil

- Não apenas para programas lineares
- Mas também para programas lineares inteiros
- E até mesmo para otimização não-linear!

Uma relaxação lagrangiana de um programa linear

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & \max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{d}
\end{aligned}
$$

é algo da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\min_{\boldsymbol{\lambda} \geq \boldsymbol{0}} \quad & \max \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\lambda}^T (\boldsymbol{d} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}) \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

E nos oferece um limitante superior para o programa original

Forma Geral do Dual

Vimos o dual de $\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$

- Vamos ver para um programa linear mais complicado

$$
\begin{aligned}
(P) \quad & \max \boldsymbol{c}_1^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}_2^T\boldsymbol{y} + \boldsymbol{c}_3^T\boldsymbol{z} \\
& \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{b}_1 \\
& \boldsymbol{D}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{b}_2 \\
& \boldsymbol{G}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{y} + \boldsymbol{I}\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b}_3 \\
& \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
(D) \quad & \min \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{b}_3 \\
& \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{D} + \boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{G} \geq \boldsymbol{c}_1^T \\
& \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{H} \leq \boldsymbol{c}_2^T \\
& \boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{C} + \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{F} + \boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{I} = \boldsymbol{c}_3^T \\
& \boldsymbol{\alpha} \geq \boldsymbol{0} \\
& \boldsymbol{\beta} \leq \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

Além disso, o dual do dual é o próprio primal!

Regras de Formação do Dual

Se o seu primal é de maximização:

- Cada restrição $\leq$ leva a uma variável dual ≥ 0
- Cada restrição $=$ leva a uma variável dual livre
- Cada restrição $\geq$ leva a uma variável dual ≤ 0

Se o seu primal é de minimização:

- Cada restrição $\leq$ leva a uma variável dual ≤ 0
- Cada restrição $=$ leva a uma variável dual livre
- Cada restrição $\geq$ leva a uma variável dual ≥ 0

Regras de Formação do Dual

Se o seu primal é de maximização:

- Cada variável ≥ 0 leva a uma restrição dual $\geq$
- Cada variável livre leva a uma restrição dual $=$
- Cada variável ≤ 0 leva a uma restrição dual $\leq$

Se o seu primal é de minimização:

- Cada variável ≥ 0 leva a uma restrição dual $\leq$
- Cada variável livre leva a uma restrição dual $=$
- Cada variável ≤ 0 leva a uma restrição dual $\geq$