Combinatória Poliédrica
Introdução

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-21 21:13

Objetivo

Entender melhor programas lineares (PL) e lineares inteiros (PLI)

Objetivo

Entender melhor programas lineares (PL) e lineares inteiros (PLI)

Exemplo:

Objetivo

Entender melhor programas lineares (PL) e lineares inteiros (PLI)

Exemplo:

$$\begin{aligned} \text{maximize } & 3x_1 - 5x_2 \\ \text{sujeito a } & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ & -3x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

Objetivo

Entender melhor programas lineares (PL) e lineares inteiros (PLI)

Exemplo:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize } & 3x_1 - 5x_2 \\
\text{sujeito a } & x_1 + x_2 \leq 6 \\
& 3x_1 - 2x_2 \leq 0 \\
& -3x_2 \leq 1
\end{aligned}
$$

PLs e PLIs são muito importante em diversas áreas, como:

Objetivo

Entender melhor programas lineares (PL) e lineares inteiros (PLI)

Exemplo:

$$\begin{aligned} \text{maximize } & 3x_1 - 5x_2 \\ \text{sujeito a } & \quad x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ & -3x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

PLs e PLIs são muito importante em diversas áreas, como:

- Economia

Objetivo

Entender melhor programas lineares (PL) e lineares inteiros (PLI)

Exemplo:

$$\begin{aligned} \text{maximize } & 3x_1 - 5x_2 \\ \text{sujeito a } & \quad x_1 + x_2 \le 6 \\ & 3x_1 - 2x_2 \le 0 \\ & -3x_2 \le 1 \end{aligned}$$

PLs e PLIs são muito importante em diversas áreas, como:

- Economia
- Engenharia

Objetivo

Entender melhor programas lineares (PL) e lineares inteiros (PLI)

Exemplo:

$$\begin{aligned} \text{maximize } & 3x_1 - 5x_2 \\ \text{sujeito a } & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 3x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ & -3x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

PLs e PLIs são muito importante em diversas áreas, como:

- Economia
- Engenharia
- Ciência da Computação

Vetores

Um vetor $\boldsymbol{v}$ é uma sequência de m elementos, por exemplo:

Vetores

Um vetor $\boldsymbol{v}$ é uma sequência de m elementos, por exemplo:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vetores

Um vetor $\boldsymbol{v}$ é uma sequência de m elementos, por exemplo:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Observações:

Vetores

Um vetor $\boldsymbol{v}$ é uma sequência de m elementos, por exemplo:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Observações:

- São *vetores-coluna*

Vetores

Um vetor $\boldsymbol{v}$ é uma sequência de m elementos, por exemplo:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Observações:

- São *vetores-coluna*
- m é a dimensão do vetor

Vetores

Um vetor $\boldsymbol{v}$ é uma sequência de m elementos, por exemplo:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Observações:

- São *vetores-coluna*
- m é a dimensão do vetor
- $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de dimensão m em $\mathbb{R}$

Vetores

Um vetor $\boldsymbol{v}$ é uma sequência de m elementos, por exemplo:

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Observações:

- São *vetores-coluna*
- m é a dimensão do vetor
- $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de dimensão m em $\mathbb{R}$
- v_i é o i-ésimo elemento de $\boldsymbol{v}$

Matrizes

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ é uma sequência de n vetores-coluna, por exemplo:

Matrizes

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ é uma sequência de n vetores-coluna, por exemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ é uma sequência de n vetores-coluna, por exemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Observações:

Matrizes

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ é uma sequência de n vetores-coluna, por exemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Observações:

- m é o número de linhas

Matrizes

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ é uma sequência de n vetores-coluna, por exemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Observações:

- m é o número de linhas
- n é o número de colunas

Matrizes

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ é uma sequência de n vetores-coluna, por exemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Observações:

- m é o número de linhas
- n é o número de colunas
- $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz de dimensão $m \times n$ em $\mathbb{R}$

Matrizes

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ é uma sequência de n vetores-coluna, por exemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Observações:

- m é o número de linhas
- n é o número de colunas
- $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz de dimensão $m \times n$ em $\mathbb{R}$
- A_{ij} é o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna

Matrizes

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ é uma sequência de n vetores-coluna, por exemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Observações:

- m é o número de linhas
- n é o número de colunas
- $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz de dimensão $m \times n$ em $\mathbb{R}$
- A_{ij} é o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna
- $\boldsymbol{A}_{*j}$ é a j-ésima coluna de $\boldsymbol{A}$

Matrizes

Uma matriz $\boldsymbol{A}$ é uma sequência de n vetores-coluna, por exemplo:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Observações:

- m é o número de linhas
- n é o número de colunas
- $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz de dimensão $m \times n$ em $\mathbb{R}$
- A_{ij} é o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna
- $\boldsymbol{A}_{*j}$ é a j-ésima coluna de $\boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{A}_{i*}$ é a i-ésima linha de $\boldsymbol{A}$

Submatrizes

Considere uma matriz $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$

Submatrizes

Considere uma matriz $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$

Sejam $M = \{1, \ldots, m\}$ e $N = \{1, \ldots n\}$

Submatrizes

Considere uma matriz $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$

Sejam $M = \{1, \ldots, m\}$ e $N = \{1, \ldots n\}$

Para $I \subseteq M$ e $J \subseteq N$, $\boldsymbol{A}_{IJ}$ é a submatriz de $\boldsymbol{A}$ obtida eliminado as linhas e colunas que não estão em I e J, respectivamente

Submatrizes

Considere uma matriz $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$

Sejam $M = \{1, \ldots, m\}$ e $N = \{1, \ldots n\}$

Para $I \subseteq M$ e $J \subseteq N$, $\boldsymbol{A}_{IJ}$ é a submatriz de $\boldsymbol{A}$ obtida eliminado as linhas e colunas que não estão em I e J, respectivamente

Note que

Submatrizes

Considere uma matriz $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$

Sejam $M = \{1, \ldots, m\}$ e $N = \{1, \ldots n\}$

Para $I \subseteq M$ e $J \subseteq N$, $\boldsymbol{A}_{IJ}$ é a submatriz de $\boldsymbol{A}$ obtida eliminado as linhas e colunas que não estão em I e J, respectivamente

Note que

- se $I = \{i\}$ então $\boldsymbol{A}_{IN} = \boldsymbol{A}_{i*}$

Submatrizes

Considere uma matriz $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$

Sejam $M = \{1, \ldots, m\}$ e $N = \{1, \ldots n\}$

Para $I \subseteq M$ e $J \subseteq N$, $\boldsymbol{A}_{IJ}$ é a submatriz de $\boldsymbol{A}$ obtida eliminado as linhas e colunas que não estão em I e J, respectivamente

Note que

- se $I = \{i\}$ então $\boldsymbol{A}_{IN} = \boldsymbol{A}_{i*}$
- se $J = \{j\}$ então $\boldsymbol{A}_{MJ} = \boldsymbol{A}_{*j}$

Submatrizes

Considere uma matriz $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$

Sejam $M = \{1, \ldots, m\}$ e $N = \{1, \ldots n\}$

Para $I \subseteq M$ e $J \subseteq N$, $\boldsymbol{A}_{IJ}$ é a submatriz de $\boldsymbol{A}$ obtida eliminado as linhas e colunas que não estão em I e J, respectivamente

Note que

- se $I = \{i\}$ então $\boldsymbol{A}_{IN} = \boldsymbol{A}_{i*}$
- se $J = \{j\}$ então $\boldsymbol{A}_{MJ} = \boldsymbol{A}_{*j}$

Escrevemos

Submatrizes

Considere uma matriz $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$

Sejam $M = \{1, \dots, m\}$ e $N = \{1, \dots n\}$

Para $I \subseteq M$ e $J \subseteq N$, $\boldsymbol{A}_{IJ}$ é a submatriz de $\boldsymbol{A}$ obtida eliminado as linhas e colunas que não estão em I e J, respectivamente

Note que

- se $I = \{i\}$ então $\boldsymbol{A}_{IN} = \boldsymbol{A}_{i*}$
- se $J = \{j\}$ então $\boldsymbol{A}_{MJ} = \boldsymbol{A}_{*j}$

Escrevemos

- $\boldsymbol{A}_{I*}$ ao invés de $\boldsymbol{A}_{IN}$

Submatrizes

Considere uma matriz $\boldsymbol{A} \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$

Sejam $M = \{1, \ldots, m\}$ e $N = \{1, \ldots n\}$

Para $I \subseteq M$ e $J \subseteq N$, $\boldsymbol{A}_{IJ}$ é a submatriz de $\boldsymbol{A}$ obtida eliminado as linhas e colunas que não estão em I e J, respectivamente

Note que

- se $I = \{i\}$ então $\boldsymbol{A}_{IN} = \boldsymbol{A}_{i*}$
- se $J = \{j\}$ então $\boldsymbol{A}_{MJ} = \boldsymbol{A}_{*j}$

Escrevemos

- $\boldsymbol{A}_{I*}$ ao invés de $\boldsymbol{A}_{IN}$
- $\boldsymbol{A}_{*J}$ ao invés de $\boldsymbol{A}_{MJ}$

Transposta

A transposta de uma matriz $\boldsymbol{A}$ é a matriz obtida trocando as linhas por colunas, por exemplo:

Transposta

A transposta de uma matriz $\boldsymbol{A}$ é a matriz obtida trocando as linhas por colunas, por exemplo:

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Transposta

A transposta de uma matriz $\boldsymbol{A}$ é a matriz obtida trocando as linhas por colunas, por exemplo:

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Um vetor-linha $\boldsymbol{v}$ é um vetor transposto de um vetor-coluna, por exemplo:

Transposta

A transposta de uma matriz $\boldsymbol{A}$ é a matriz obtida trocando as linhas por colunas, por exemplo:

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Um vetor-linha $\boldsymbol{v}$ é um vetor transposto de um vetor-coluna, por exemplo:

$$\boldsymbol{v}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Produto interno e notação

O produto interno de dois vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$ é o escalar

$$\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Produto interno e notação

O produto interno de dois vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$ é o escalar

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Um vetor $\boldsymbol{v}$ é unitário se

Produto interno e notação

O produto interno de dois vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$ é o escalar

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Um vetor $\boldsymbol{v}$ é unitário se

- Existe i tal que $v_i = 1$ e

Produto interno e notação

O produto interno de dois vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$ é o escalar

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Um vetor $\boldsymbol{v}$ é unitário se

- Existe i tal que $v_i = 1$ e
- $v_j = 0$ para todo $j \neq i$

Produto interno e notação

O produto interno de dois vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$ é o escalar

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Um vetor $\boldsymbol{v}$ é unitário se

- Existe i tal que $v_i = 1$ e
- $v_j = 0$ para todo $j \neq i$

Notação:

Produto interno e notação

O produto interno de dois vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$ é o escalar

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Um vetor $\boldsymbol{v}$ é unitário se

- Existe i tal que $v_i = 1$ e
- $v_j = 0$ para todo $j \neq i$

Notação:

- $\mathbf{1}$ é o vetor de 1's.

Produto interno e notação

O produto interno de dois vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$ é o escalar

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Um vetor $\boldsymbol{v}$ é unitário se

- Existe i tal que $v_i = 1$ e
- $v_j = 0$ para todo $j \neq i$

Notação:

- $\mathbf{1}$ é o vetor de 1's.
- $\mathbf{0}$ é o vetor ou matriz de 0's.

Produto interno e notação

O produto interno de dois vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$ é o escalar

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Um vetor $\boldsymbol{v}$ é unitário se

- Existe i tal que $v_i = 1$ e
- $v_j = 0$ para todo $j \neq i$

Notação:

- $\mathbf{1}$ é o vetor de 1's.
- $\mathbf{0}$ é o vetor ou matriz de 0's.
- I é a matriz identidade

Produto interno e notação

O produto interno de dois vetores $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{R}^n$ é o escalar

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Um vetor $\boldsymbol{v}$ é unitário se

- Existe i tal que $v_i = 1$ e
- $v_j = 0$ para todo $j \neq i$

Notação:

- $\mathbf{1}$ é o vetor de 1's.
- $\mathbf{0}$ é o vetor ou matriz de 0's.
- I é a matriz identidade
- e_i é o vetor unitário que a componente 1 está na posição i

Poliedro

Um subconjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado de *poliedro* se

Poliedro

Um subconjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado de *poliedro* se

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$$

Poliedro

Um subconjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado de *poliedro* se

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$$

para alguma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e algum vetor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$

Poliedro

Um subconjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado de *poliedro* se

$$P = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\}$$

para alguma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e algum vetor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$

Dado $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{b}$, denotamos o poliedro por $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

Programa Linear

Um programa linear é um problema de otimização que pode ser escrito na forma:

Programa Linear

Um programa linear é um problema de otimização que pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ &\text{sujeito a} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Programa Linear

Um programa linear é um problema de otimização que pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} \text{maximize } & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{sujeito a } & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Ou seja,

Programa Linear

Um programa linear é um problema de otimização que pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ &\text{sujeito a} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\} = \max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})\}$$

Programa Linear

Um programa linear é um problema de otimização que pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ &\text{sujeito a} \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\} = \max\{\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \colon \boldsymbol{x} \in P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})\}$$

Assim, entendendo $P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$, podemos entender o PL!

Semi-espaço

Sejam $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o poliedro

Semi-espaço

Sejam $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o poliedro

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \leq \alpha\}$$

Semi-espaço

Sejam $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o poliedro

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \leq \alpha\}$$

é chamado de *semi-espaço*

Semi-espaço

Sejam $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o poliedro

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \leq \alpha\}$$

é chamado de *semi-espaço*

Note que

Semi-espaço

Sejam $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o poliedro

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \leq \alpha\}$$

é chamado de *semi-espaço*

Note que

$$P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\} = \bigcap_{j=1}^{m} \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}_{j*}\boldsymbol{x} \leq b_j\}$$

Semi-espaço

Sejam $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o poliedro

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha\}$$

é chamado de *semi-espaço*

Note que

$$P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\} = \bigcap_{j=1}^{m} \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}_{j*}\boldsymbol{x} \leq b_j\}$$

Todo poliedro é uma interseção (finita) de semi-espaços!

Semi-espaço

Sejam $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o poliedro

$$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha\}$$

é chamado de *semi-espaço*

Note que

$$P(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b}\} = \bigcap_{j=1}^{m} \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}_{j*}\boldsymbol{x} \leq b_j\}$$

Todo poliedro é uma interseção (finita) de semi-espaços!

- Definidos pelas linhas da matriz $\boldsymbol{A}$ e entradas de $\boldsymbol{b}$

Hiper-plano

Já o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = \alpha\}$$

é chamada de *hiperplano*

Combinações

Um vetor $\boldsymbol{x}$ é uma combinação linear de vetores $\boldsymbol{v^1}, \boldsymbol{v^2}, \ldots, \boldsymbol{v^n}$ se

Combinações

Um vetor $\boldsymbol{x}$ é uma combinação linear de vetores $\boldsymbol{v^1}, \boldsymbol{v^2}, \ldots, \boldsymbol{v^n}$ se existe vetor $\boldsymbol{a}$ tal que

Combinações

Um vetor $\boldsymbol{x}$ é uma combinação linear de vetores $\boldsymbol{v^1}, \boldsymbol{v^2}, \ldots, \boldsymbol{v^n}$ se existe vetor $\boldsymbol{a}$ tal que

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v^i}$$

Combinações

Um vetor $\boldsymbol{x}$ é uma combinação linear de vetores $\boldsymbol{v^1}, \boldsymbol{v^2}, \ldots, \boldsymbol{v^n}$ se existe vetor $\boldsymbol{a}$ tal que

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v^i}$$

Uma combinação linear é chamada

Combinações

Um vetor $\boldsymbol{x}$ é uma combinação linear de vetores $\boldsymbol{v^1}, \boldsymbol{v^2}, \ldots, \boldsymbol{v^n}$ se existe vetor $\boldsymbol{a}$ tal que

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v^i}$$

Uma combinação linear é chamada

- afim, se $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$

Combinações

Um vetor $\boldsymbol{x}$ é uma combinação linear de vetores $\boldsymbol{v^1}, \boldsymbol{v^2}, \ldots, \boldsymbol{v^n}$ se existe vetor $\boldsymbol{a}$ tal que

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v^i}$$

Uma combinação linear é chamada

- afim, se $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$
- cônica, se $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$

Combinações

Um vetor $\boldsymbol{x}$ é uma combinação linear de vetores $\boldsymbol{v^1}, \boldsymbol{v^2}, \ldots, \boldsymbol{v^n}$ se existe vetor $\boldsymbol{a}$ tal que

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v^i}$$

Uma combinação linear é chamada

- afim, se $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$
- cônica, se $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$
- convexa, se for afim e cônica

Independência

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é linearmente independente se

Independência

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é linearmente independente se

- para qualquer subconjunto finito $\{\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^t\}$ de S

Independência

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é linearmente independente se

- para qualquer subconjunto finito $\{\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^t\}$ de S
- sempre que $\sum_{i=1}^t a_i \boldsymbol{v}^i = \mathbf{0}$

Independência

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é linearmente independente se

- para qualquer subconjunto finito $\{\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^t\}$ de S
- sempre que $\sum_{i=1}^{t} a_i \boldsymbol{v}^i = \mathbf{0}$
- onde $a_i \in \mathbb{R}$

Independência

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é linearmente independente se

- para qualquer subconjunto finito $\{\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^t\}$ de S
- sempre que $\sum_{i=1}^{t} a_i \boldsymbol{v}^i = \mathbf{0}$
- onde $a_i \in \mathbb{R}$
- temos que $a_i = 0$ para todo i

Independência

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é linearmente independente se

- para qualquer subconjunto finito $\{\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^t\}$ de S
- sempre que $\sum_{i=1}^{t} a_i \boldsymbol{v}^i = \mathbf{0}$
- onde $a_i \in \mathbb{R}$
- temos que $a_i = 0$ para todo i

Caso contrário S é linearmente dependente

Independência

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é linearmente independente se

- para qualquer subconjunto finito $\{\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^t\}$ de S
- sempre que $\sum_{i=1}^t a_i \boldsymbol{v}^i = \mathbf{0}$
- onde $a_i \in \mathbb{R}$
- temos que $a_i = 0$ para todo i

Caso contrário S é linearmente dependente

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é afim independente se

Independência

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é linearmente independente se

- para qualquer subconjunto finito $\{\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^t\}$ de S
- sempre que $\sum_{i=1}^{t} a_i \boldsymbol{v}^i = \mathbf{0}$
- onde $a_i \in \mathbb{R}$
- temos que $a_i = 0$ para todo i

Caso contrário S é linearmente dependente

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é afim independente se

- para qualquer subconjunto finito $\{v^1, \ldots, v^t\}$ de S

Independência

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é linearmente independente se

- para qualquer subconjunto finito $\{\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^t\}$ de S
- sempre que $\sum_{i=1}^{t} a_i \boldsymbol{v}^i = \mathbf{0}$
- onde $a_i \in \mathbb{R}$
- temos que $a_i = 0$ para todo i

Caso contrário S é linearmente dependente

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é afim independente se

- para qualquer subconjunto finito $\{v^1, \ldots, v^t\}$ de S
- sempre que $\sum_{i=1}^{t} a_i v^i = \mathbf{0}$

Independência

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é linearmente independente se

- para qualquer subconjunto finito $\{\boldsymbol{v}^1, \dots, \boldsymbol{v}^t\}$ de S
- sempre que $\sum_{i=1}^t a_i \boldsymbol{v}^i = \mathbf{0}$
- onde $a_i \in \mathbb{R}$
- temos que $a_i = 0$ para todo i

Caso contrário S é linearmente dependente

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é afim independente se

- para qualquer subconjunto finito $\{v^1, \dots, v^t\}$ de S
- sempre que $\sum_{i=1}^t a_i v^i = \mathbf{0}$
- onde $a_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n a_i = 0$

Independência

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é linearmente independente se

- para qualquer subconjunto finito $\{\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^t\}$ de S
- sempre que $\sum_{i=1}^t a_i \boldsymbol{v}^i = \mathbf{0}$
- onde $a_i \in \mathbb{R}$
- temos que $a_i = 0$ para todo i

Caso contrário S é linearmente dependente

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é afim independente se

- para qualquer subconjunto finito $\{v^1, \ldots, v^t\}$ de S
- sempre que $\sum_{i=1}^t a_i v^i = \mathbf{0}$
- onde $a_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n a_i = 0$
- temos que $a_i = 0$ para todo i

Independência

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é linearmente independente se

- para qualquer subconjunto finito $\{\boldsymbol{v}^1, \ldots, \boldsymbol{v}^t\}$ de S
- sempre que $\sum_{i=1}^{t} a_i \boldsymbol{v}^i = \mathbf{0}$
- onde $a_i \in \mathbb{R}$
- temos que $a_i = 0$ para todo i

Caso contrário S é linearmente dependente

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é afim independente se

- para qualquer subconjunto finito $\{v^1, \ldots, v^t\}$ de S
- sempre que $\sum_{i=1}^{t} a_i v^i = \mathbf{0}$
- onde $a_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$
- temos que $a_i = 0$ para todo i

Caso contrário S é afim dependente

Exercício

Exercício: Sejam $\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^n \in \mathbb{R}^m$. Prove que $\{\boldsymbol{v}^1, \boldsymbol{v}^2, \ldots, \boldsymbol{v}^n\}$ é afim independente se e somente se $\{\boldsymbol{v}^1 - \boldsymbol{v}^n, \boldsymbol{v}^2 - \boldsymbol{v}^n, \ldots, \boldsymbol{v}^{n-1} - \boldsymbol{v}^n\}$ é linearmente independente.

Fechos e Subespaços

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$

Fechos e Subespaços

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\mathrm{lin}(S)$ é o fecho linear de S

Fechos e Subespaços

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\text{lin}(S)$ é o fecho linear de S
  - conjunto de todos os vetores que são combinação linear de um número finito de vetores de S

Fechos e Subespaços

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\mathrm{lin}(S)$ é o fecho linear de S
  - conjunto de todos os vetores que são combinação linear de um número finito de vetores de S
- Definimos também $\mathrm{afim}(S)$, $\mathrm{cone}(S)$, e $\mathrm{conv}(S)$

Fechos e Subespaços

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\mathrm{lin}(S)$ é o fecho linear de S
  - conjunto de todos os vetores que são combinação linear de um número finito de vetores de S
- Definimos também $\mathrm{afim}(S)$, $\mathrm{cone}(S)$, e $\mathrm{conv}(S)$

Se $S = \emptyset$, então

Fechos e Subespaços

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\mathrm{lin}(S)$ é o fecho linear de S
  - conjunto de todos os vetores que são combinação linear de um número finito de vetores de S
- Definimos também $\mathrm{afim}(S)$, $\mathrm{cone}(S)$, e $\mathrm{conv}(S)$

Se $S = \emptyset$, então

- $\mathrm{lin}(S) = \mathrm{cone}(S) = \{\mathbf{0}\}$

Fechos e Subespaços

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\text{lin}(S)$ é o fecho linear de S
  - conjunto de todos os vetores que são combinação linear de um número finito de vetores de S
- Definimos também $\text{afim}(S)$, $\text{cone}(S)$, e $\text{conv}(S)$

Se $S = \emptyset$, então

- $\text{lin}(S) = \text{cone}(S) = \{\mathbf{0}\}$
- $\text{conv}(S) = \text{afim}(S) = \emptyset$

Fechos e Subespaços

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\mathrm{lin}(S)$ é o fecho linear de S
  - conjunto de todos os vetores que são combinação linear de um número finito de vetores de S
- Definimos também $\mathrm{afim}(S)$, $\mathrm{cone}(S)$, e $\mathrm{conv}(S)$

Se $S = \emptyset$, então

- $\mathrm{lin}(S) = \mathrm{cone}(S) = \{\mathbf{0}\}$
- $\mathrm{conv}(S) = \mathrm{afim}(S) = \emptyset$

Dizemos que S é um

Fechos e Subespaços

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\mathrm{lin}(S)$ é o fecho linear de S
  - conjunto de todos os vetores que são combinação linear de um número finito de vetores de S
- Definimos também $\mathrm{afim}(S)$, $\mathrm{cone}(S)$, e $\mathrm{conv}(S)$

Se $S = \emptyset$, então

- $\mathrm{lin}(S) = \mathrm{cone}(S) = \{\mathbf{0}\}$
- $\mathrm{conv}(S) = \mathrm{afim}(S) = \emptyset$

Dizemos que S é um

- *subespaço linear*, se $\mathrm{lin}(S) = S$

Fechos e Subespaços

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\mathrm{lin}(S)$ é o fecho linear de S
  - conjunto de todos os vetores que são combinação linear de um número finito de vetores de S
- Definimos também $\mathrm{afim}(S)$, $\mathrm{cone}(S)$, e $\mathrm{conv}(S)$

Se $S = \emptyset$, então

- $\mathrm{lin}(S) = \mathrm{cone}(S) = \{\mathbf{0}\}$
- $\mathrm{conv}(S) = \mathrm{afim}(S) = \emptyset$

Dizemos que S é um

- *subespaço linear*, se $\mathrm{lin}(S) = S$
- *subespaço afim*, se $\mathrm{afim}(S) = S$

Fechos e Subespaços

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\text{lin}(S)$ é o fecho linear de S
  - conjunto de todos os vetores que são combinação linear de um número finito de vetores de S
- Definimos também $\text{afim}(S)$, $\text{cone}(S)$, e $\text{conv}(S)$

Se $S = \emptyset$, então

- $\text{lin}(S) = \text{cone}(S) = \{\mathbf{0}\}$
- $\text{conv}(S) = \text{afim}(S) = \emptyset$

Dizemos que S é um

- *subespaço linear*, se $\text{lin}(S) = S$
- *subespaço afim*, se $\text{afim}(S) = S$
- *cone*, se $\text{cone}(S) = S$

Fechos e Subespaços

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\mathrm{lin}(S)$ é o fecho linear de S
  - conjunto de todos os vetores que são combinação linear de um número finito de vetores de S
- Definimos também $\mathrm{afim}(S)$, $\mathrm{cone}(S)$, e $\mathrm{conv}(S)$

Se $S = \emptyset$, então

- $\mathrm{lin}(S) = \mathrm{cone}(S) = \{\mathbf{0}\}$
- $\mathrm{conv}(S) = \mathrm{afim}(S) = \emptyset$

Dizemos que S é um

- *subespaço linear*, se $\mathrm{lin}(S) = S$
- *subespaço afim*, se $\mathrm{afim}(S) = S$
- *cone*, se $\mathrm{cone}(S) = S$
- *conjunto convexo*, se $\mathrm{conv}(S) = S$

Fechos e Subespaços

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\mathrm{lin}(S)$ é o fecho linear de S
  - conjunto de todos os vetores que são combinação linear de um número finito de vetores de S
- Definimos também $\mathrm{afim}(S)$, $\mathrm{cone}(S)$, e $\mathrm{conv}(S)$

Se $S = \emptyset$, então

- $\mathrm{lin}(S) = \mathrm{cone}(S) = \{\mathbf{0}\}$
- $\mathrm{conv}(S) = \mathrm{afim}(S) = \emptyset$

Dizemos que S é um

- *subespaço linear*, se $\mathrm{lin}(S) = S$
- *subespaço afim*, se $\mathrm{afim}(S) = S$
- *cone*, se $\mathrm{cone}(S) = S$
- *conjunto convexo*, se $\mathrm{conv}(S) = S$

S pode ser as colunas de uma matriz $\boldsymbol{A}$

Fechos e Subespaços

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\mathrm{lin}(S)$ é o fecho linear de S
  - conjunto de todos os vetores que são combinação linear de um número finito de vetores de S
- Definimos também $\mathrm{afim}(S)$, $\mathrm{cone}(S)$, e $\mathrm{conv}(S)$

Se $S = \emptyset$, então

- $\mathrm{lin}(S) = \mathrm{cone}(S) = \{\mathbf{0}\}$
- $\mathrm{conv}(S) = \mathrm{afim}(S) = \emptyset$

Dizemos que S é um

- *subespaço linear*, se $\mathrm{lin}(S) = S$
- *subespaço afim*, se $\mathrm{afim}(S) = S$
- *cone*, se $\mathrm{cone}(S) = S$
- *conjunto convexo*, se $\mathrm{conv}(S) = S$

S pode ser as colunas de uma matriz $\boldsymbol{A}$

- Escrevemos $\mathrm{lin}(\boldsymbol{A})$, $\mathrm{afim}(\boldsymbol{A})$, $\mathrm{cone}(\boldsymbol{A})$, e $\mathrm{conv}(\boldsymbol{A})$

Posto

O posto de $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é a cardinalidade de um maior subconjunto de S que é linearmente indepentende

Posto

O posto de $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é a cardinalidade de um maior subconjunto de S que é linearmente indepentende

- Escrevemos $\text{posto}(S)$

Posto

O posto de $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é a cardinalidade de um maior subconjunto de S que é linearmente indepentende

- Escrevemos $\mathrm{posto}(S)$
- Definimos analogamente $\mathrm{posto\text{-}afim}(S)$

Posto

O posto de $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é a cardinalidade de um maior subconjunto de S que é linearmente indepentende

- Escrevemos $\mathrm{posto}(S)$
- Definimos analogamente $\mathrm{posto\text{-}afim}(S)$

$\{\mathbf{0}\}$ é afim-independente mas não é linearmente independente

Posto

O posto de $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é a cardinalidade de um maior subconjunto de S que é linearmente indepentende

- Escrevemos $\mathrm{posto}(S)$
- Definimos analogamente $\mathrm{posto\text{-}afim}(S)$

$\{\mathbf{0}\}$ é afim-independente mas não é linearmente independente

E se S é linearmente independente, então S é afim-independente

Posto

O posto de $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é a cardinalidade de um maior subconjunto de S que é linearmente indepentende

- Escrevemos $\mathrm{posto}(S)$
- Definimos analogamente $\text{posto-afim}(S)$

$\{\mathbf{0}\}$ é afim-independente mas não é linearmente independente

E se S é linearmente independente, então S é afim-independente

Exercício: Prove que, para todo $S \subseteq \mathbb{R}^n$, se $\mathbf{0} \in \mathrm{afim}(S)$, então $\text{posto-afim}(S) = \mathrm{posto}(S) + 1$; e se $\mathbf{0} \notin \mathrm{afim}(S)$, então $\text{posto-afim}(S) = \mathrm{posto}(S)$.

Posto

O posto de $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é a cardinalidade de um maior subconjunto de S que é linearmente indepentende

- Escrevemos $\mathrm{posto}(S)$
- Definimos analogamente $\text{posto-afim}(S)$

$\{\mathbf{0}\}$ é afim-independente mas não é linearmente independente

E se S é linearmente independente, então S é afim-independente

Exercício: Prove que, para todo $S \subseteq \mathbb{R}^n$, se $\mathbf{0} \in \mathrm{afim}(S)$, então $\text{posto-afim}(S) = \mathrm{posto}(S) + 1$; e se $\mathbf{0} \notin \mathrm{afim}(S)$, então $\text{posto-afim}(S) = \mathrm{posto}(S)$.

A dimensão $\dim(S)$ de S é $\text{posto-afim}(S) - 1$

Posto

O **posto** de $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é a cardinalidade de um maior subconjunto de S que é linearmente indepentende

- Escrevemos $\mathrm{posto}(S)$
- Definimos analogamente $\text{posto-afim}(S)$

$\{\mathbf{0}\}$ é afim-independente mas não é linearmente independente

E se S é linearmente independente, então S é afim-independente

Exercício: Prove que, para todo $S \subseteq \mathbb{R}^n$, se $\mathbf{0} \in \mathrm{afim}(S)$, então $\text{posto-afim}(S) = \mathrm{posto}(S) + 1$; e se $\mathbf{0} \notin \mathrm{afim}(S)$, então $\text{posto-afim}(S) = \mathrm{posto}(S)$.

A dimensão $\dim(S)$ de S é $\text{posto-afim}(S) - 1$

- S tem dimensão **plena** se $\dim(S) = n$

Posto de uma matriz

O posto de uma matriz $\boldsymbol{A}$ é o posto de suas colunas

Posto de uma matriz

O posto de uma matriz $\boldsymbol{A}$ é o posto de suas colunas

- Denotamos por $\text{posto}(\boldsymbol{A})$

Posto de uma matriz

O posto de uma matriz $\boldsymbol{A}$ é o posto de suas colunas

- Denotamos por $\text{posto}(\boldsymbol{A})$
- É igual ao posto de suas linhas

Posto de uma matriz

O posto de uma matriz $\boldsymbol{A}$ é o posto de suas colunas

- Denotamos por $\text{posto}(\boldsymbol{A})$
- É igual ao posto de suas linhas

Uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tem

Posto de uma matriz

O posto de uma matriz $\boldsymbol{A}$ é o posto de suas colunas

- Denotamos por $\text{posto}(\boldsymbol{A})$
- É igual ao posto de suas linhas

Uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tem

- posto-linha completo, se $\text{posto}(\boldsymbol{A}) = m$

Posto de uma matriz

O posto de uma matriz $\boldsymbol{A}$ é o posto de suas colunas

- Denotamos por $\operatorname{posto}(\boldsymbol{A})$
- É igual ao posto de suas linhas

Uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tem

- posto-linha completo, se $\operatorname{posto}(\boldsymbol{A}) = m$
- posto-coluna completo, se $\operatorname{posto}(\boldsymbol{A}) = n$

Cones Poliédricos

Um cone $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é poliédrico se C é um poliedro

Cones Poliédricos

Um cone $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é poliédrico se C é um poliedro

Exercício: Mostre que todo cone $C \subseteq \mathbb{R}^2$ é um poliedro

Cones Poliédricos

Um cone $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é poliédrico se C é um poliedro

Exercício: Mostre que todo cone $C \subseteq \mathbb{R}^2$ é um poliedro

Exercício: Dê um exemplo de um cone que não é poliédrico

Cones Poliédricos

Um cone $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é poliédrico se C é um poliedro

Exercício: Mostre que todo cone $C \subseteq \mathbb{R}^2$ é um poliedro

Exercício: Dê um exemplo de um cone que não é poliédrico

Exercício: Mostre que todo poliedro é um conjunto convexo

Cones Poliédricos

Proposição: Um cone $C \in \mathbb{R}^n$ é poliédrico se e somente se existe uma matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $C = P(\boldsymbol{A}, \mathbf{0})$

O que mais é um Poliedro?

Proposição: Sejam $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$, $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_3}$, $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$, $\boldsymbol{E} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$, $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_3}$, $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{m_3 \times n_1}$, $\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{m_3 \times n_2}$, $\boldsymbol{J} \in \mathbb{R}^{m_3 \times n_3}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{m_1}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{m_2}$, e $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^{m_3}$, o sistema

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{By} + \boldsymbol{Cz} &= \boldsymbol{a} \\
\boldsymbol{Dx} + \boldsymbol{Ey} + \boldsymbol{Fz} &\geq \boldsymbol{b} \\
\boldsymbol{Gx} + \boldsymbol{Hy} + \boldsymbol{Jz} &\leq \boldsymbol{c} \\
\boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{y} &\leq \boldsymbol{0} \\
\boldsymbol{x} &\in \mathbb{R}^{n_1} \\
\boldsymbol{y} &\in \mathbb{R}^{n_2} \\
\boldsymbol{z} &\in \mathbb{R}^{n_3}
\end{aligned}$$

é um poliedro.

$P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

Pela proposição anterior

$P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

Pela proposição anterior

$$P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

$P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

Pela proposição anterior

$$P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

é um poliedro

$P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

Pela proposição anterior

$$P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

é um poliedro

Mas nem todo poliedro pode ser escrito dessa forma

$P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

Pela proposição anterior

$$P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

é um poliedro

Mas nem todo poliedro pode ser escrito dessa forma

- Exemplo: $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$

$P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$

Pela proposição anterior

$$P^{=}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$$

é um poliedro

Mas nem todo poliedro pode ser escrito dessa forma

- Exemplo: $\{x \in \mathbb{R} \colon x \leq 1\}$

Porém, podemos achar um poliedro "equivalente", em outra dimensão...

Transformando P em $P^{=}$

Para cada inequação da forma $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ de P

Transformando P em $P^=$

Para cada inequação da forma $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ de P

- Adicionamos uma nova variável $y \geq 0$

Transformando P em $P^=$

Para cada inequação da forma $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ de P

- Adicionamos uma nova variável $y \geq 0$
- A ideia é que $y = \alpha - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$

Transformando P em $P^=$

Para cada inequação da forma $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ de P

- Adicionamos uma nova variável $y \geq 0$
- A ideia é que $y = \alpha - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$
- Chamamos y de variável de folga

Transformando P em $P^=$

Para cada inequação da forma $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ de P

- Adicionamos uma nova variável $y \geq 0$
- A ideia é que $y = \alpha - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$
- Chamamos y de variável de folga
- Passamos a ter $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + y = \alpha$

Transformando P em $P^=$

Para cada inequação da forma $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ de P

- Adicionamos uma nova variável $y \geq 0$
- A ideia é que $y = \alpha - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$
- Chamamos y de variável de folga
- Passamos a ter $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + y = \alpha$
- Trocamos x por $x^+ - x^-$, com $x^+, x^- \geq 0$

Transformando P em $P^=$

Para cada inequação da forma $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ de P

- Adicionamos uma nova variável $y \geq 0$
- A ideia é que $y = \alpha - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$
- Chamamos y de variável de folga
- Passamos a ter $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + y = \alpha$
- Trocamos x por $x^+ - x^-$, com $x^+, x^- \geq 0$
- E ficamos com a igualdade $\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{x}^+ - \boldsymbol{x}^-) + y = \alpha$

Transformando P em $P^=$

Para cada inequação da forma $\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} \leq \alpha$ de P

- Adicionamos uma nova variável $y \geq 0$
- A ideia é que $y = \alpha - \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}$
- Chamamos y de variável de folga
- Passamos a ter $\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} + y = \alpha$
- Trocamos x por $x^+ - x^-$, com $x^+, x^- \geq 0$
- E ficamos com a igualdade $\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{x}^+ - \boldsymbol{x}^-) + y = \alpha$

De forma geral,

Transformando P em $P^{=}$

Para cada inequação da forma $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ de P

- Adicionamos uma nova variável $y \geq 0$
- A ideia é que $y = \alpha - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$
- Chamamos y de variável de folga
- Passamos a ter $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + y = \alpha$
- Trocamos x por $x^+ - x^-$, com $x^+, x^- \geq 0$
- E ficamos com a igualdade $\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{x}^+ - \boldsymbol{x}^-) + y = \alpha$

De forma geral,

$$P^{=}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A} & I\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}\right)$$

Transformando P em $P^=$

Para cada inequação da forma $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ de P

- Adicionamos uma nova variável $y \geq 0$
- A ideia é que $y = \alpha - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$
- Chamamos y de variável de folga
- Passamos a ter $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + y = \alpha$
- Trocamos x por $x^+ - x^-$, com $x^+, x^- \geq 0$
- E ficamos com a igualdade $\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{x}^+ - \boldsymbol{x}^-) + y = \alpha$

De forma geral,

$$P^=\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A} & I\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}\right)$$

pois $P^= = \{(\boldsymbol{x}^+, \boldsymbol{x}^-, \boldsymbol{y})\colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^+ - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^- + \boldsymbol{I}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}\}$

Transformando P em $P^=$

Para cada inequação da forma $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} \leq \alpha$ de P

- Adicionamos uma nova variável $y \geq 0$
- A ideia é que $y = \alpha - \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x}$
- Chamamos y de variável de folga
- Passamos a ter $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{x} + y = \alpha$
- Trocamos x por $x^+ - x^-$, com $x^+, x^- \geq 0$
- E ficamos com a igualdade $\boldsymbol{a}^T(\boldsymbol{x}^+ - \boldsymbol{x}^-) + y = \alpha$

De forma geral,

$$P^=\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{A} & I\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}\right)$$

pois $P^= = \{(\boldsymbol{x}^+, \boldsymbol{x}^-, \boldsymbol{y})\colon \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^+ - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^- + \boldsymbol{I}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}\}$

Por que é "equivalente" e não igual?