

Combinatória Poliédrica

Introdução

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

Atualizado em: 2023-09-21 21:15

Objetivo

Entender melhor programas lineares (PL) e lineares inteiros (PLI)

Exemplo:

$$\begin{aligned} &\text{maximize } 3x_1 - 5x_2 \\ &\text{sujeito a } \quad x_1 + x_2 \leq 6 \\ &\quad \quad \quad 3x_1 - 2x_2 \leq 0 \\ &\quad \quad \quad -3x_2 \leq 1 \end{aligned}$$

PLs e PLIs são muito importante em diversas áreas, como:

- Economia
- Engenharia
- Ciência da Computação

Vetores

Um vetor \mathbf{v} é uma sequência de m elementos, por exemplo:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Observações:

- São *vetores-coluna*
- m é a dimensão do vetor
- $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de dimensão m em \mathbb{R}
- v_i é o i -ésimo elemento de \mathbf{v}

Matrizes

Uma matriz \mathbf{A} é uma sequência de n vetores-coluna, por exemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Observações:

- m é o número de linhas
- n é o número de colunas
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma matriz de dimensão $m \times n$ em \mathbb{R}
- A_{ij} é o elemento da i -ésima linha e j -ésima coluna
- \mathbf{A}_{*j} é a j -ésima coluna de \mathbf{A}
- \mathbf{A}_{i*} é a i -ésima linha de \mathbf{A}

Submatrizes

Considere uma matriz $\mathbf{A} \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}$

Sejam $M = \{1, \dots, m\}$ e $N = \{1, \dots, n\}$

Para $I \subseteq M$ e $J \subseteq N$, \mathbf{A}_{IJ} é a submatriz de \mathbf{A} obtida eliminando as linhas e colunas que não estão em I e J , respectivamente

Note que

- se $I = \{i\}$ então $\mathbf{A}_{IN} = \mathbf{A}_{i*}$
- se $J = \{j\}$ então $\mathbf{A}_{MJ} = \mathbf{A}_{*j}$

Escrevemos

- \mathbf{A}_{I*} ao invés de \mathbf{A}_{IN}
- \mathbf{A}_{*J} ao invés de \mathbf{A}_{MJ}

Transposta

A transposta de uma matriz \mathbf{A} é a matriz obtida trocando as linhas por colunas, por exemplo:

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Um vetor-linha \mathbf{v} é um vetor transposto de um vetor-coluna, por exemplo:

$$\mathbf{v}^T = (1 \quad 2 \quad 3)$$

Produto interno e notação

O produto interno de dois vetores \mathbf{x} e \mathbf{y} de \mathbb{R}^n é o escalar

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Um vetor \mathbf{v} é unitário se

- Existe i tal que $v_i = 1$ e
- $v_j = 0$ para todo $j \neq i$

Notação:

- $\mathbf{1}$ é o vetor de 1's.
- $\mathbf{0}$ é o vetor ou matriz de 0's.
- I é a matriz identidade
- \mathbf{e}_i é o vetor unitário que a componente 1 está na posição i

Poliedro

Um subconjunto $P \subseteq \mathbb{R}^n$ é chamado de *poliedro* se

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\}$$

para alguma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e algum vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$

Dado \mathbf{A} e \mathbf{b} , denotamos o poliedro por $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$

Programa Linear

Um **programa linear** é um problema de otimização que pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} &\text{maximize } \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ &\text{sujeito a } \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}\} = \max\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \in P(\mathbf{A}, \mathbf{b})\}$$

Assim, entendendo $P(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, podemos entender o PL!

Semi-espaço

Sejam $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbf{0}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o poliedro

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \alpha\}$$

é chamado de *semi-espaço*

Note que

$$P(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\} = \bigcap_{j=1}^m \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}_{j*}\mathbf{x} \leq b_j\}$$

Todo poliedro é uma interseção (finita) de semi-espaços!

- Definidos pelas linhas da matriz \mathbf{A} e entradas de \mathbf{b}

Hiper-plano

Já o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = \alpha\}$$

é chamada de *hiperplano*

Combinações

Um vetor \mathbf{x} é uma combinação linear de vetores $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n$ se existe vetor \mathbf{a} tal que

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}^i$$

Uma combinação linear é chamada

- **afim**, se $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$
- **cônica**, se $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$
- **convexa**, se for afim e cônica

Independência

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é **linearmente independente** se

- para qualquer subconjunto finito $\{v^1, \dots, v^t\}$ de S
- sempre que $\sum_{i=1}^t a_i v^i = \mathbf{0}$
- onde $a_i \in \mathbb{R}$
- temos que $a_i = 0$ para todo i

Caso contrário S é **linearmente dependente**

Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é **afim independente** se

- para qualquer subconjunto finito $\{v^1, \dots, v^t\}$ de S
- sempre que $\sum_{i=1}^t a_i v^i = \mathbf{0}$
- onde $a_i \in \mathbb{R}$ e $\sum_{i=1}^n a_i = 0$
- temos que $a_i = 0$ para todo i

Caso contrário S é **afim dependente**

Exercício

Exercício: Sejam $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n \in \mathbb{R}^m$. Prove que $\{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots, \mathbf{v}^n\}$ é afim independente se e somente se $\{\mathbf{v}^1 - \mathbf{v}^n, \mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^n, \dots, \mathbf{v}^{n-1} - \mathbf{v}^n\}$ é linearmente independente.

Fechos e Subespaços

Seja $S \subseteq \mathbb{R}^n$

- $\text{lin}(S)$ é o fecho linear de S
 - conjunto de todos os vetores que são combinação linear de um número finito de vetores de S
- Definimos também $\text{afim}(S)$, $\text{cone}(S)$, e $\text{conv}(S)$

Se $S = \emptyset$, então

- $\text{lin}(S) = \text{cone}(S) = \{\mathbf{0}\}$
- $\text{conv}(S) = \text{afim}(S) = \emptyset$

Dizemos que S é um

- *subespaço linear*, se $\text{lin}(S) = S$
- *subespaço afim*, se $\text{afim}(S) = S$
- *cone*, se $\text{cone}(S) = S$
- *conjunto convexo*, se $\text{conv}(S) = S$

S pode ser as colunas de uma matriz \mathbf{A}

- Escrevemos $\text{lin}(\mathbf{A})$, $\text{afim}(\mathbf{A})$, $\text{cone}(\mathbf{A})$, e $\text{conv}(\mathbf{A})$

Posto

O **posto** de $S \subseteq \mathbb{R}^n$ é a cardinalidade de um maior subconjunto de S que é linearmente independente

- Escrevemos $\text{posto}(S)$
- Definimos analogamente $\text{posto-afim}(S)$

$\{0\}$ é afim-independente mas não é linearmente independente

E se S é linearmente independente, então S é afim-independente

Exercício: Prove que, para todo $S \subseteq \mathbb{R}^n$, se $0 \in \text{afim}(S)$, então $\text{posto-afim}(S) = \text{posto}(S) + 1$; e se $0 \notin \text{afim}(S)$, então $\text{posto-afim}(S) = \text{posto}(S)$.

A dimensão $\text{dim}(S)$ de S é $\text{posto-afim}(S) - 1$

- S tem dimensão **plena** se $\text{dim}(S) = n$

Posto de uma matriz

O posto de uma matriz \mathbf{A} é o posto de suas colunas

- Denotamos por $\text{posto}(\mathbf{A})$
- É igual ao posto de suas linhas

Uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tem

- **posto-linha completo**, se $\text{posto}(\mathbf{A}) = m$
- **posto-coluna completo**, se $\text{posto}(\mathbf{A}) = n$

Cones Poliédricos

Um cone $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é poliédrico se C é um poliedro

Exercício: Mostre que todo cone $C \subseteq \mathbb{R}^2$ é um poliedro

Exercício: Dê um exemplo de um cone que não é poliédrico

Exercício: Mostre que todo poliedro é um conjunto convexo

Cones Poliédricos

Proposição: Um cone $C \in \mathbb{R}^n$ é poliédrico se e somente se existe uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $C = P(A, \mathbf{0})$

O que mais é um Poliedro?

Proposição: Sejam $A \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}$, $B \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$, $C \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_3}$,
 $D \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$, $E \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_2}$, $F \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_3}$, $G \in \mathbb{R}^{m_3 \times n_1}$,
 $H \in \mathbb{R}^{m_3 \times n_2}$, $J \in \mathbb{R}^{m_3 \times n_3}$, $a \in \mathbb{R}^{m_1}$, $b \in \mathbb{R}^{m_2}$, e $c \in \mathbb{R}^{m_3}$, o
sistema

$$Ax + By + Cz = a$$

$$Dx + Ey + Fz \geq b$$

$$Gx + Hy + Jz \leq c$$

$$x \geq 0$$

$$y \leq 0$$

$$x \in \mathbb{R}^{n_1}$$

$$y \in \mathbb{R}^{n_2}$$

$$z \in \mathbb{R}^{n_3}$$

é um poliedro.

$$P = (\mathbf{A}, \mathbf{b})$$

Pela proposição anterior

$$P = (\mathbf{A}, \mathbf{b}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

é um poliedro

Mas nem todo poliedro pode ser escrito dessa forma

- Exemplo: $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$

Porém, podemos achar um poliedro “equivalente”, em outra dimensão...

Transformando P em $P^=$

Para cada inequação da forma $\mathbf{a}^T \mathbf{x} \leq \alpha$ de P

- Adicionamos uma nova variável $y \geq 0$
- A ideia é que $y = \alpha - \mathbf{a}^T \mathbf{x}$
- Chamamos y de variável de folga
- Passamos a ter $\mathbf{a}^T \mathbf{x} + y = \alpha$
- Trocamos x por $x^+ - x^-$, com $x^+, x^- \geq 0$
- E ficamos com a igualdade $\mathbf{a}^T (\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) + y = \alpha$

De forma geral,

$$P^= \left(\left(\mathbf{A} \quad -\mathbf{A} \quad \mathbf{I} \right), \mathbf{b} \right)$$

pois $P^= = \{(\mathbf{x}^+, \mathbf{x}^-, \mathbf{y}) : \mathbf{A}\mathbf{x}^+ - \mathbf{A}\mathbf{x}^- + \mathbf{I}\mathbf{y} = \mathbf{b}\}$

Por que é “equivalente” e não igual?