MC-202
Árvores Binárias de Busca

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

2º semestre/2018

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
  - insira no final

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
  - insira no final
  - para remover, troque com o último e remova o último

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
  - insira no final
  - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
  - insira no final
  - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores ordenados:

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
  - insira no final
  - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores ordenados:

- Podemos buscar em $\mathrm{O}(\lg n)$

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
  - insira no final
  - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores ordenados:

- Podemos buscar em $\mathrm{O}(\lg n)$
- Mas inserir e remover leva $\mathrm{O}(n)$

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
  - insira no final
  - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores ordenados:

- Podemos buscar em $\mathrm{O}(\lg n)$
- Mas inserir e remover leva $\mathrm{O}(n)$

Veremos árvores binárias de busca

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
  - insira no final
  - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores ordenados:

- Podemos buscar em $\mathrm{O}(\lg n)$
- Mas inserir e remover leva $\mathrm{O}(n)$

Veremos árvores binárias de busca

- primeiro uma versão simples, depois uma sofisticada

Tempo para Inserção, Remoção e Busca

Usando Listas Duplamente Ligadas:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores não-ordenados:

- Podemos inserir e remover em $\mathrm{O}(1)$
  - insira no final
  - para remover, troque com o último e remova o último
- Mas buscar demora $\mathrm{O}(n)$

Se usarmos vetores ordenados:

- Podemos buscar em $\mathrm{O}(\lg n)$
- Mas inserir e remover leva $\mathrm{O}(n)$

Veremos árvores binárias de busca

- primeiro uma versão simples, depois uma sofisticada
- versão sofisticada: três operações levam $\mathrm{O}(\lg n)$

Árvore Binária de Busca

Uma Árvore Binária de Busca (ABB) é uma árvore binária em que cada nó contém um elemento de um conjunto ordenável

Árvore Binária de Busca

Uma Árvore Binária de Busca (ABB) é uma árvore binária em que cada nó contém um elemento de um conjunto ordenável

Cada nó r, com subárvores esquerda T_e e direita T_d satisfaz a seguinte propriedade:

Árvore Binária de Busca

Uma Árvore Binária de Busca (ABB) é uma árvore binária em que cada nó contém um elemento de um conjunto ordenável

Cada nó r, com subárvores esquerda T_e e direita T_d satisfaz a seguinte propriedade:

1. $e < r$ para todo elemento $e \in T_e$

Árvore Binária de Busca

Uma Árvore Binária de Busca (ABB) é uma árvore binária em que cada nó contém um elemento de um conjunto ordenável

Cada nó r, com subárvores esquerda T_e e direita T_d satisfaz a seguinte propriedade:

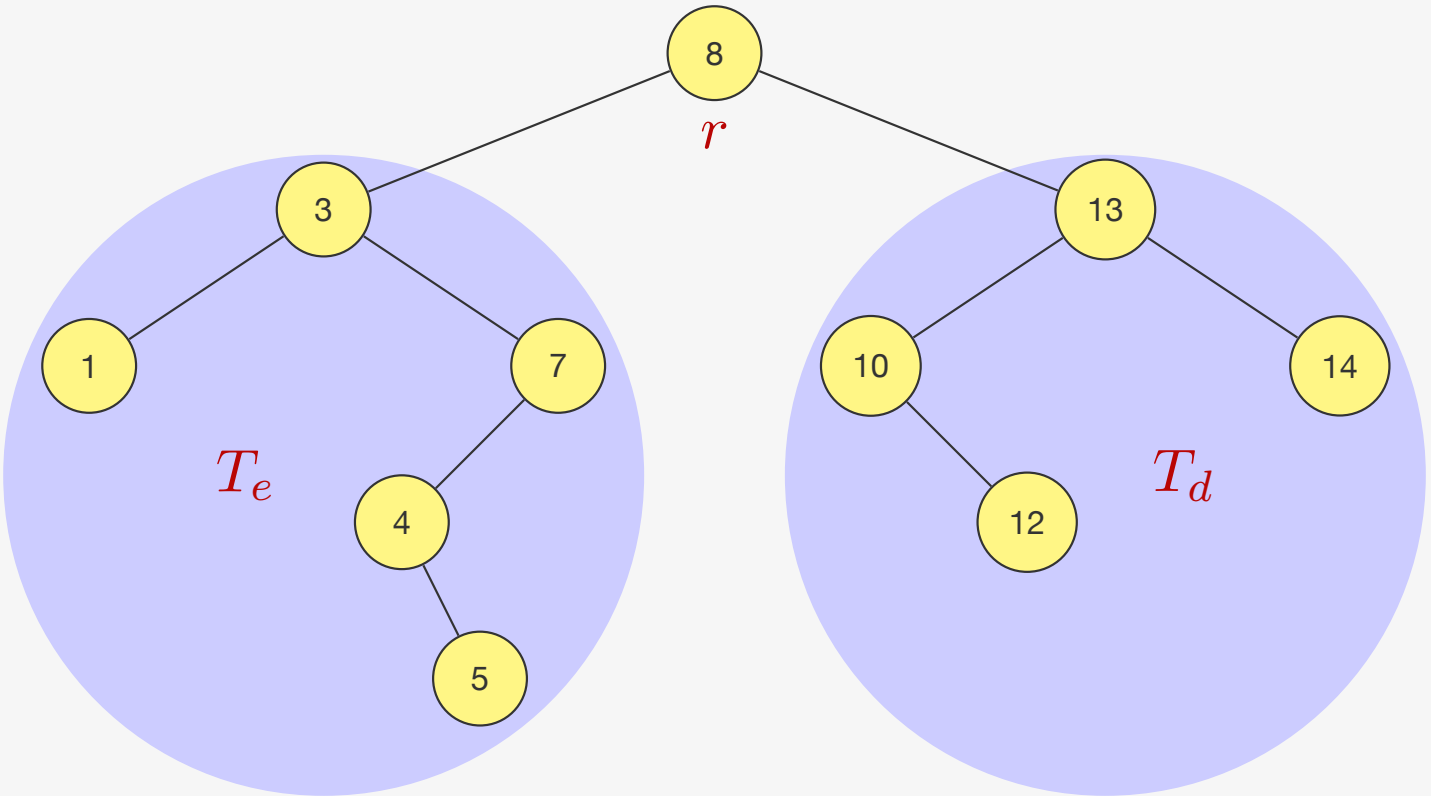
1. $e < r$ para todo elemento $e \in T_e$
2. $d > r$ para todo elemento $d \in T_d$

Árvore Binária de Busca

Uma Árvore Binária de Busca (ABB) é uma árvore binária em que cada nó contém um elemento de um conjunto ordenável

Cada nó r, com subárvores esquerda T_e e direita T_d satisfaz a seguinte propriedade:

1. $e < r$ para todo elemento $e \in T_e$
2. $d > r$ para todo elemento $d \in T_d$



TAD - Árvores de Busca Binária

```
1  typedef struct No {
2      int chave;
3      struct No *esq, *dir, *pai; /*pai é opcional, usado em
       sucessor e antecessor*/
4  } No;
5
6  typedef No * p_no;
7
8  p_no criar_arvore();
9
10 void destruir_arvore(p_no raiz);
11
12 p_no inserir(p_no raiz, int chave);
13
14 p_no remover(p_no raiz, int chave);
15
16 p_no buscar(p_no raiz, int chave);
17
18 p_no minimo(p_no raiz);
19
20 p_no maximo(p_no raiz);
21
22 p_no sucessor(p_no x);
23
24 p_no antecessor(p_no x);
```

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

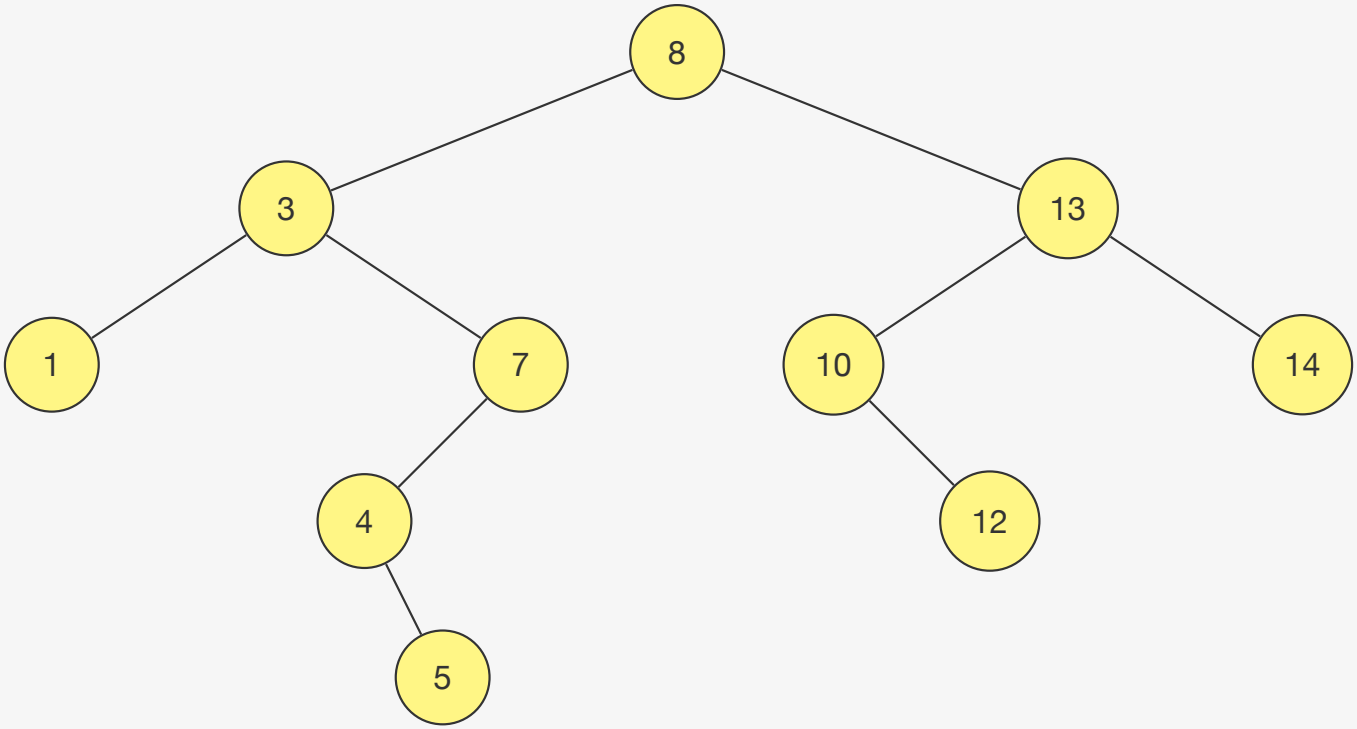
Ex: Buscando por 4

Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

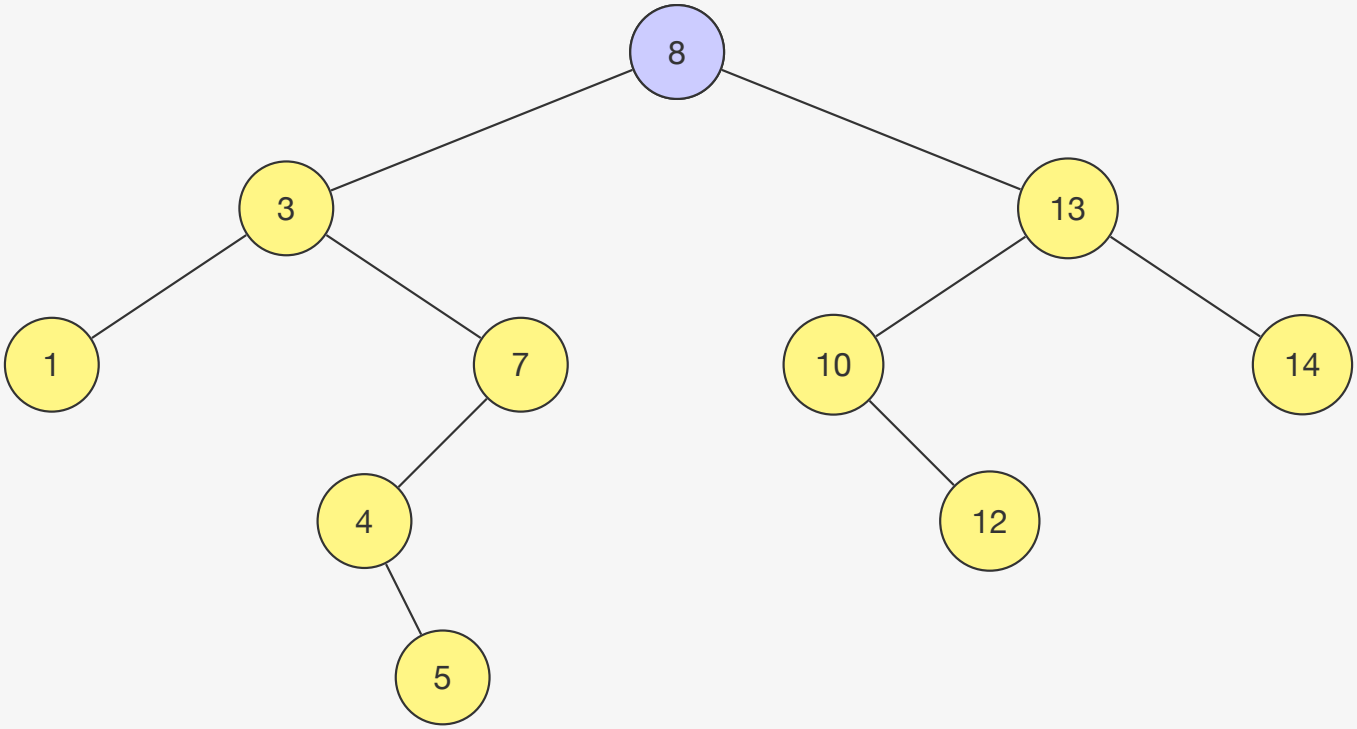


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

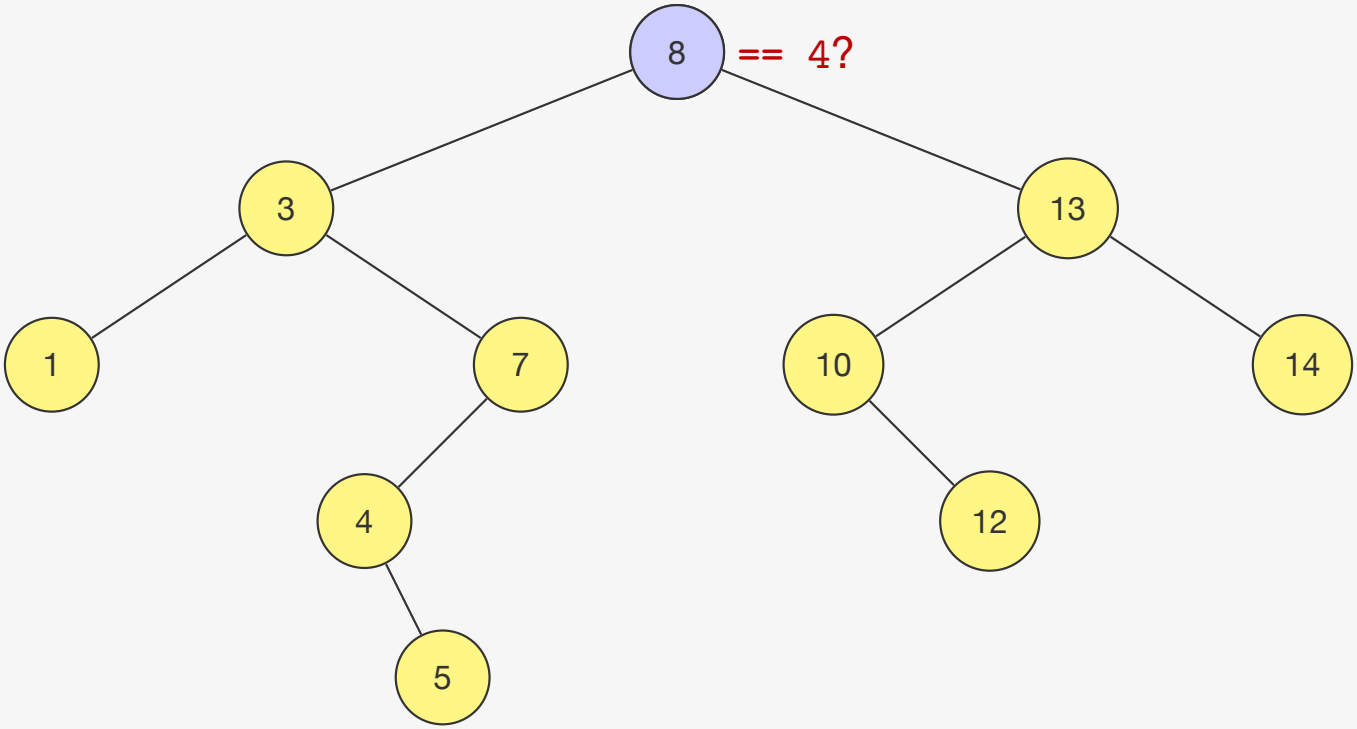


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

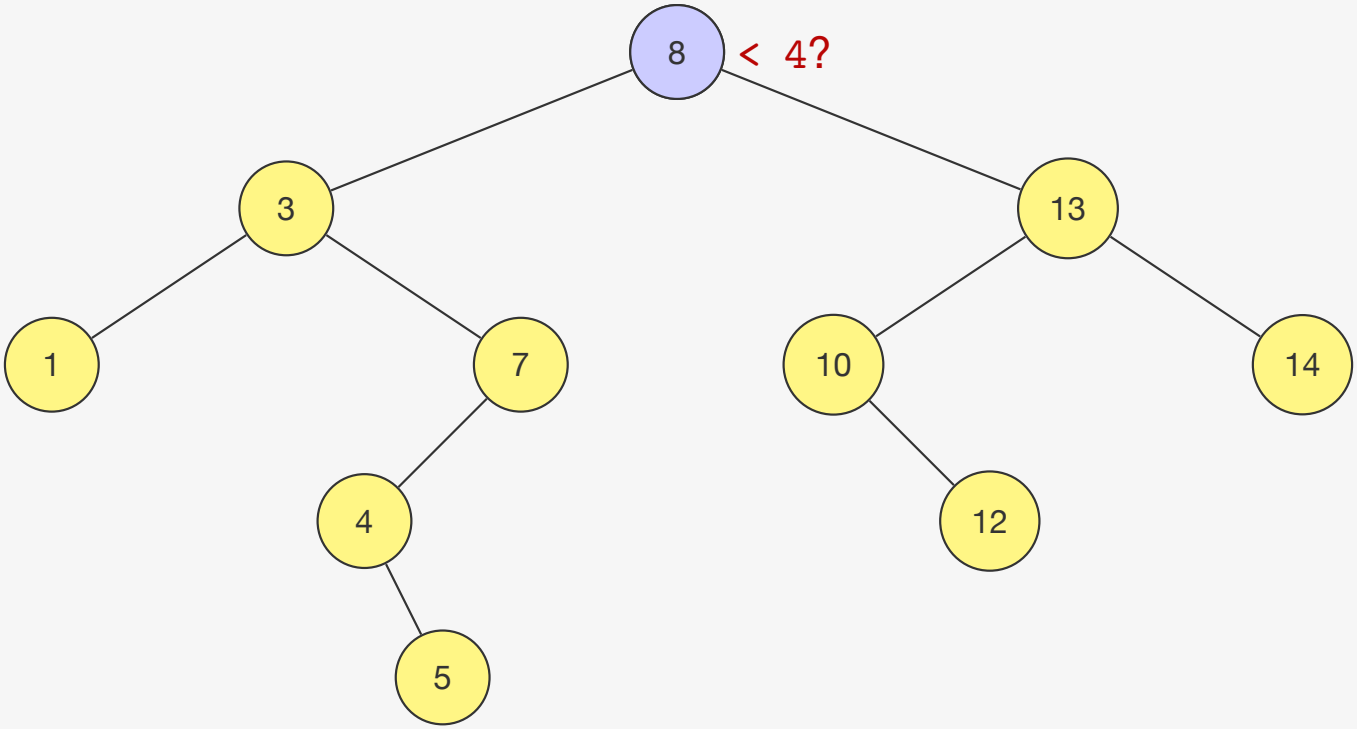


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

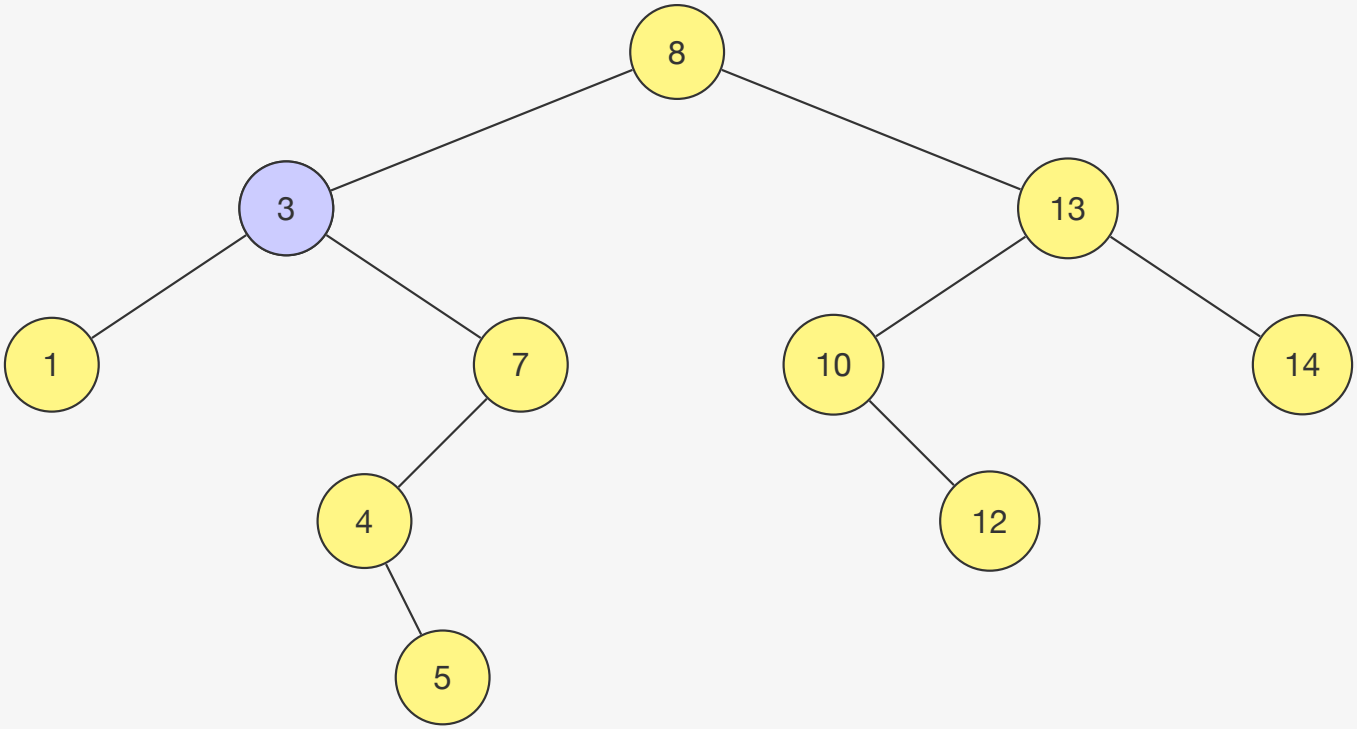


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

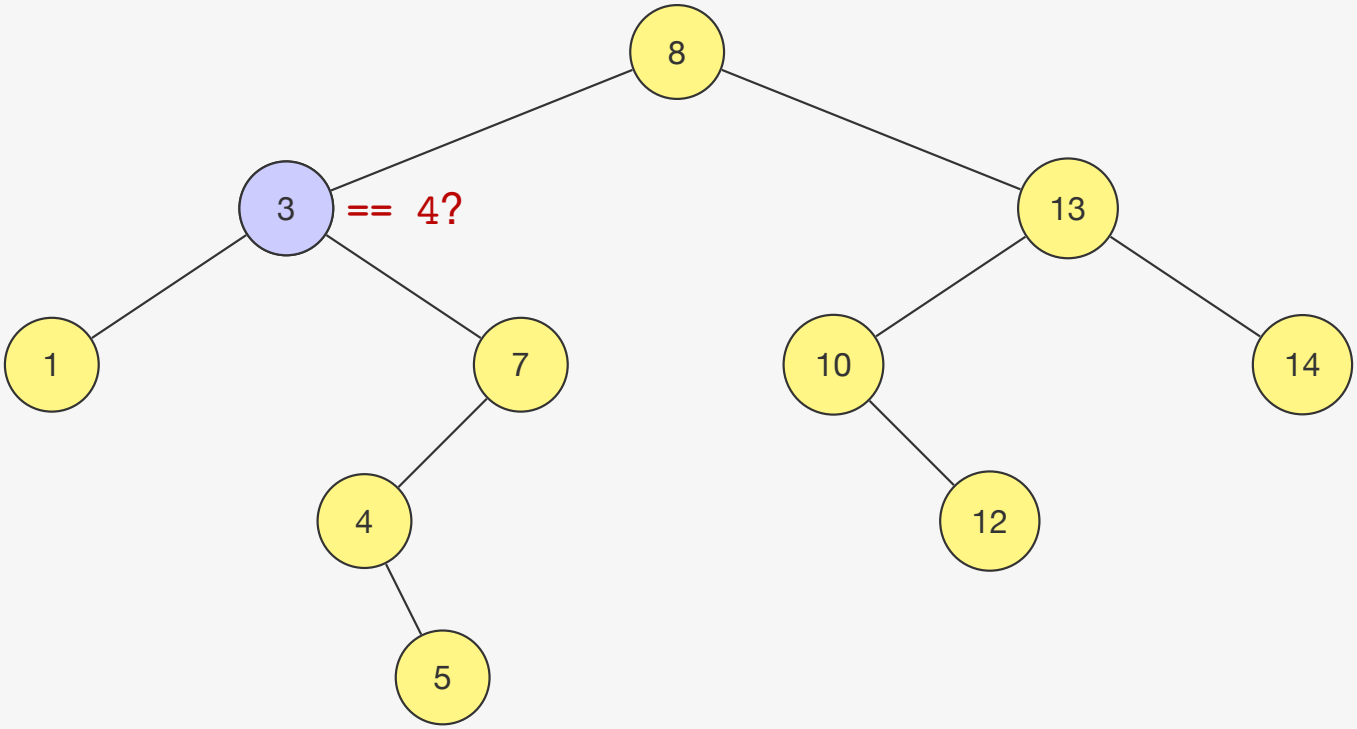


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

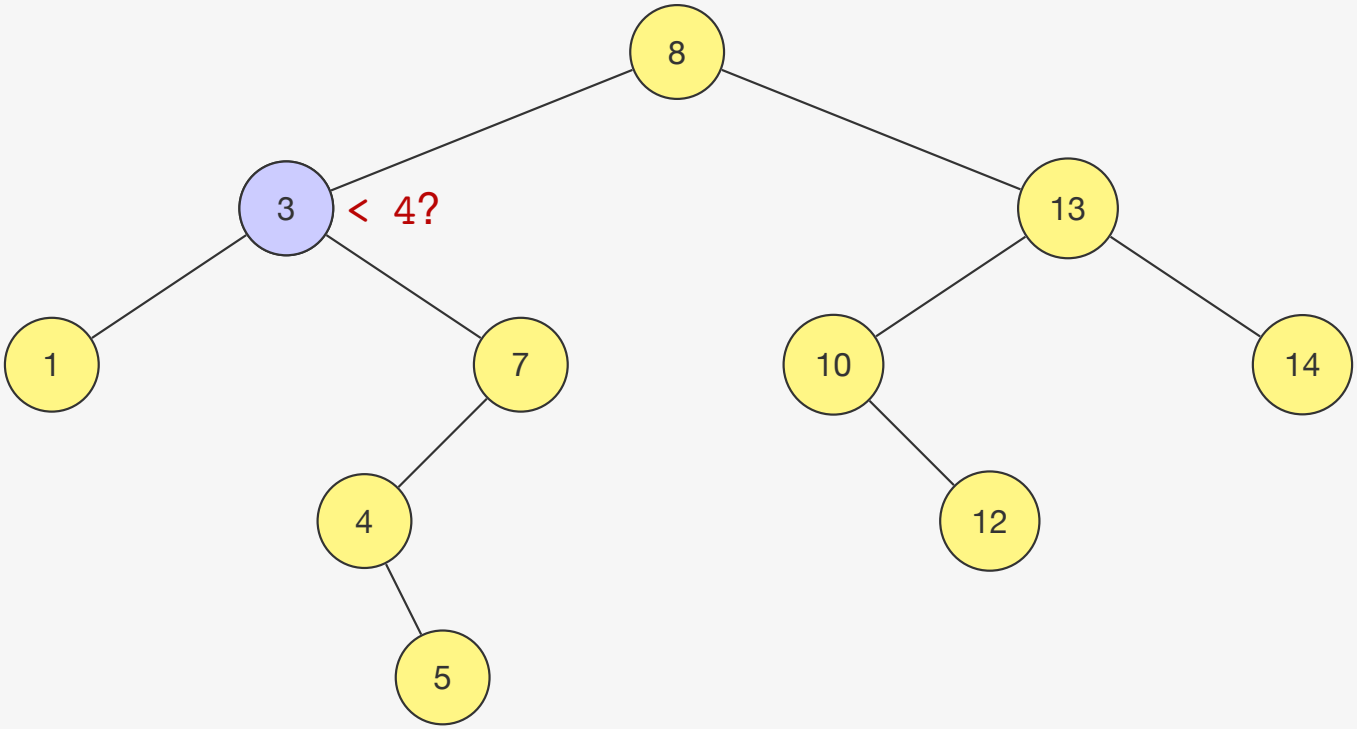


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

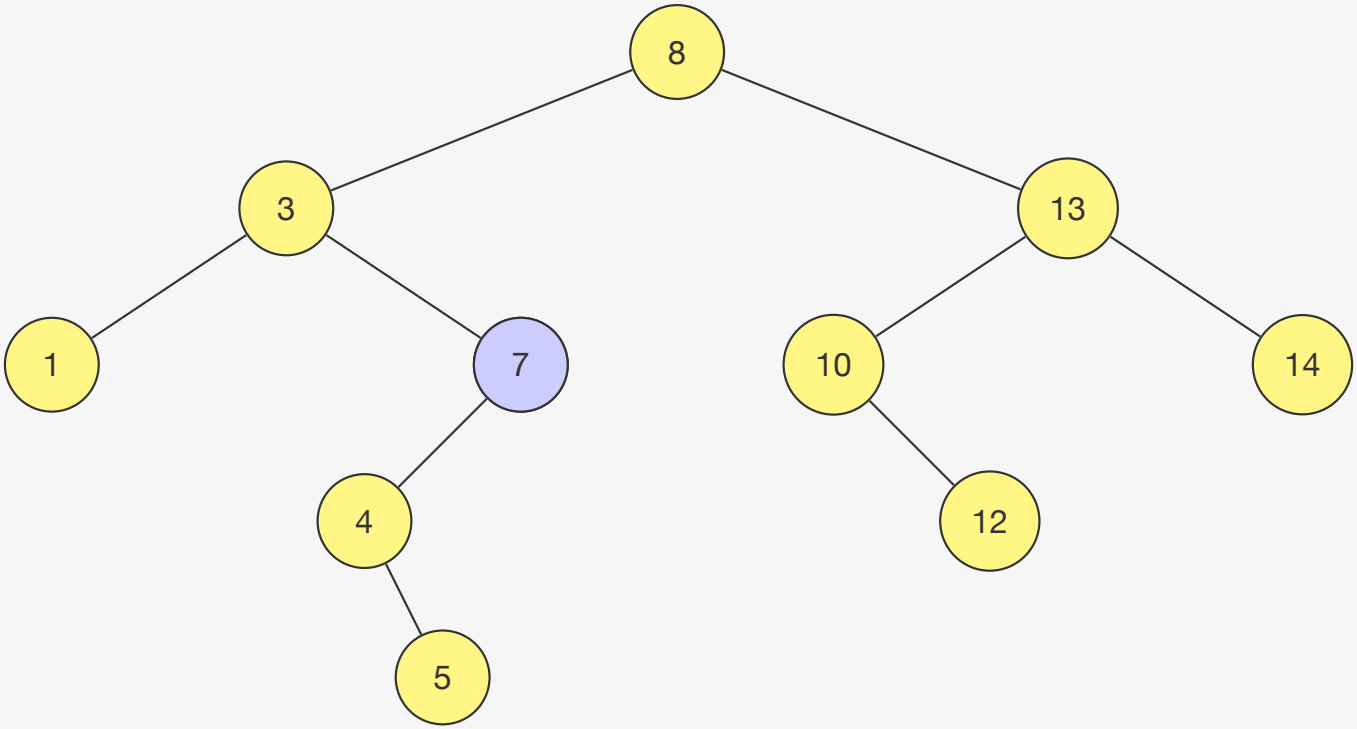


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

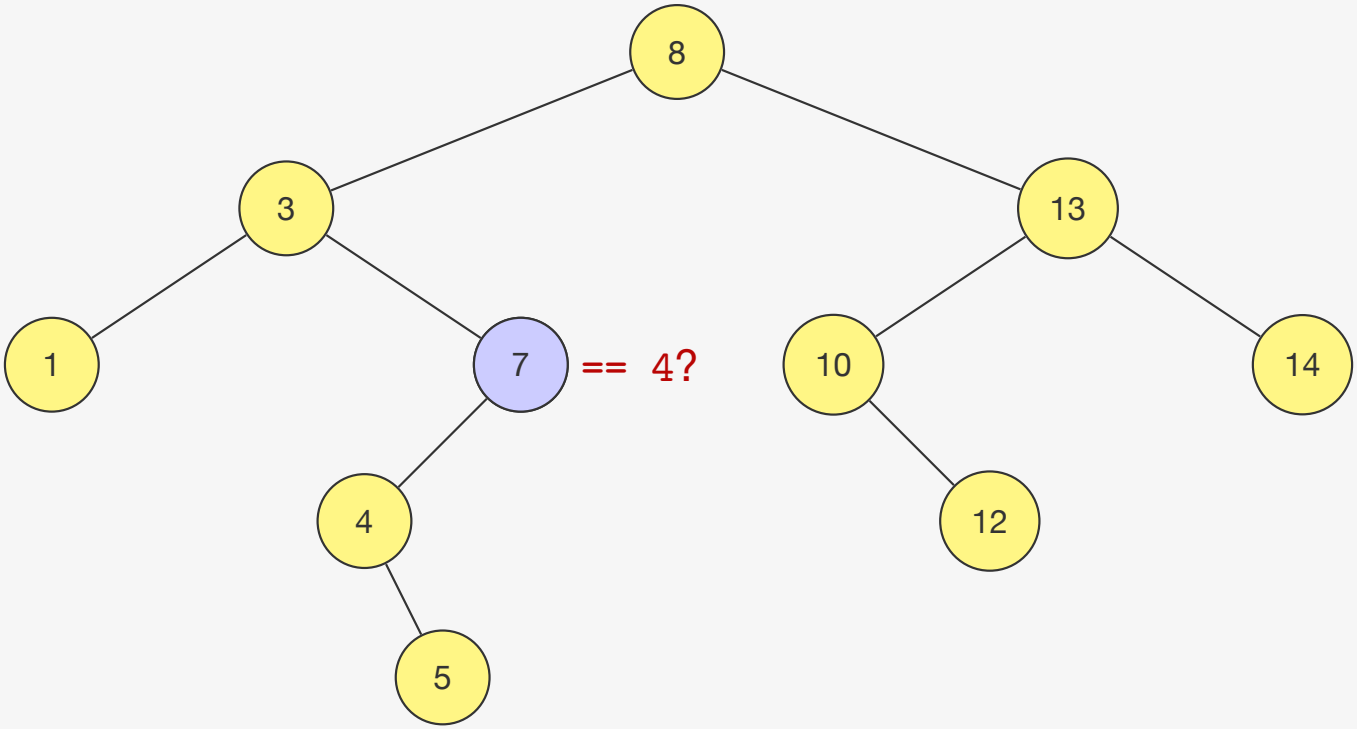


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

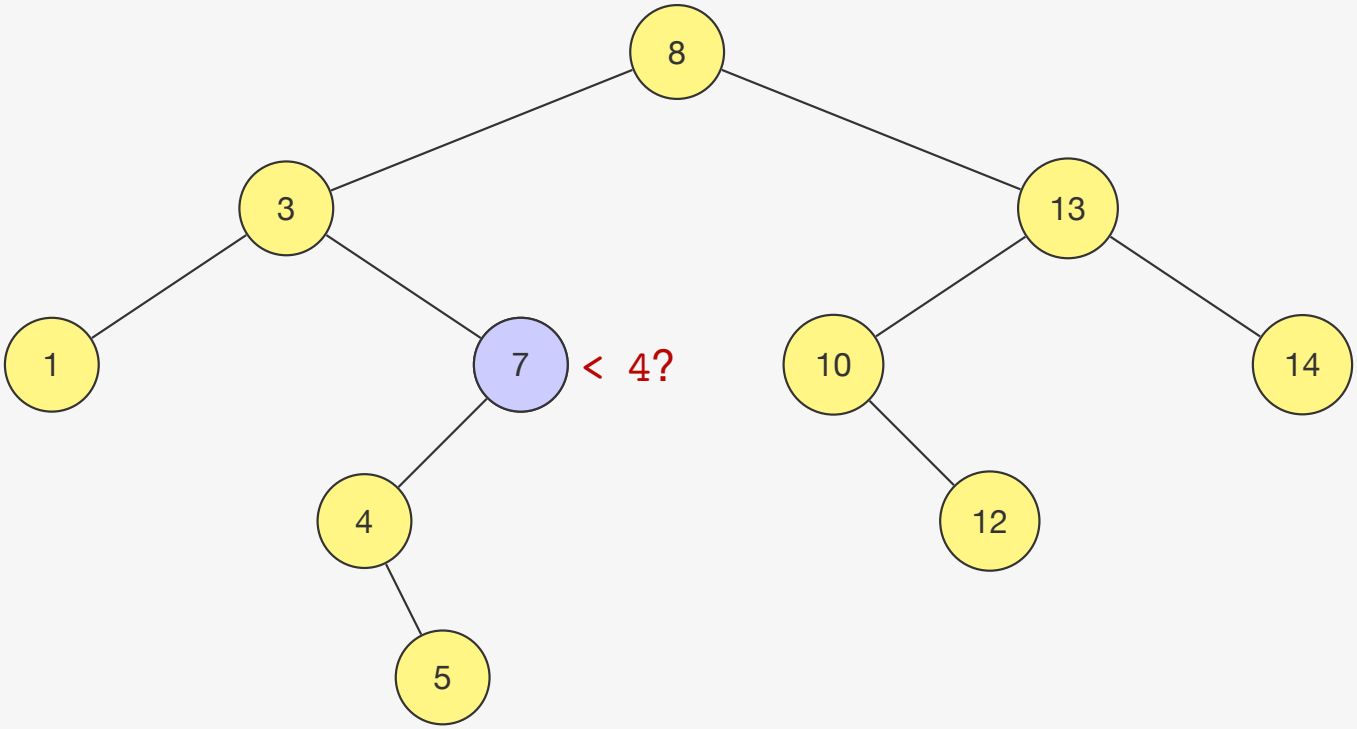


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

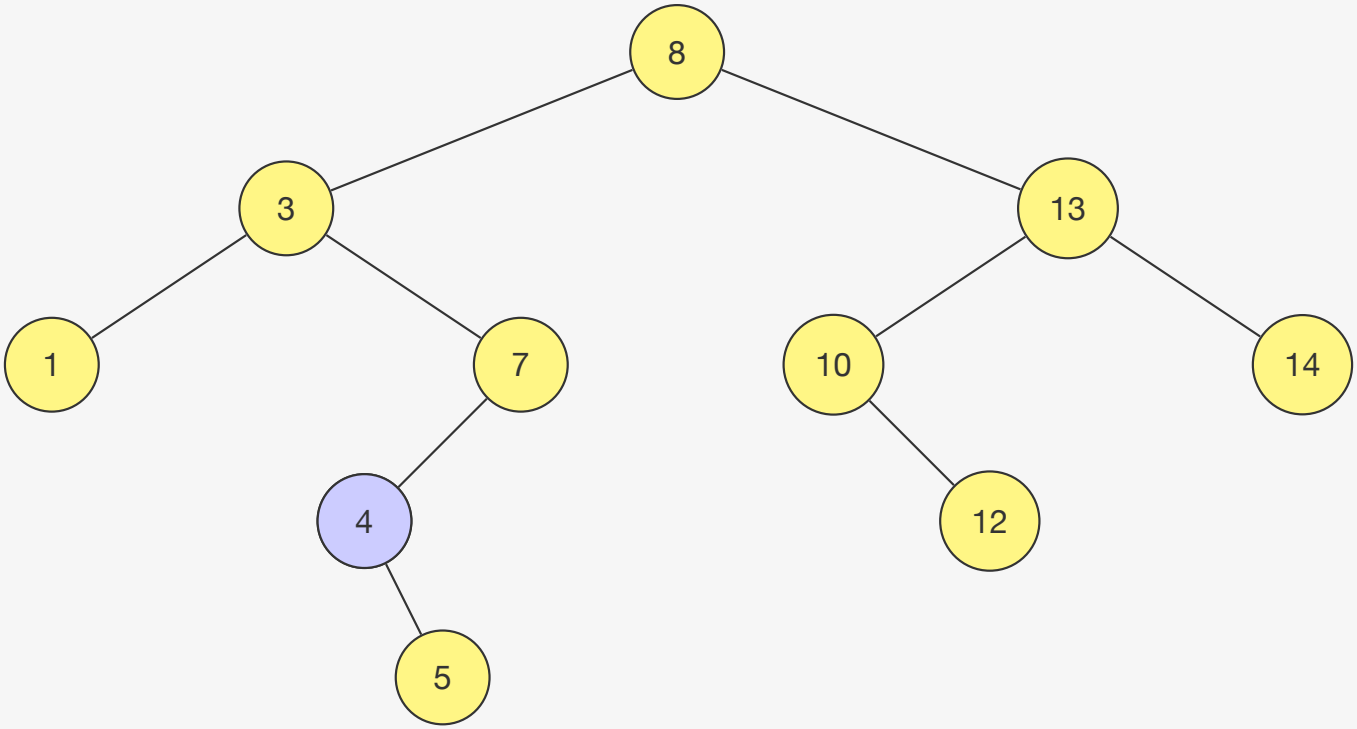


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

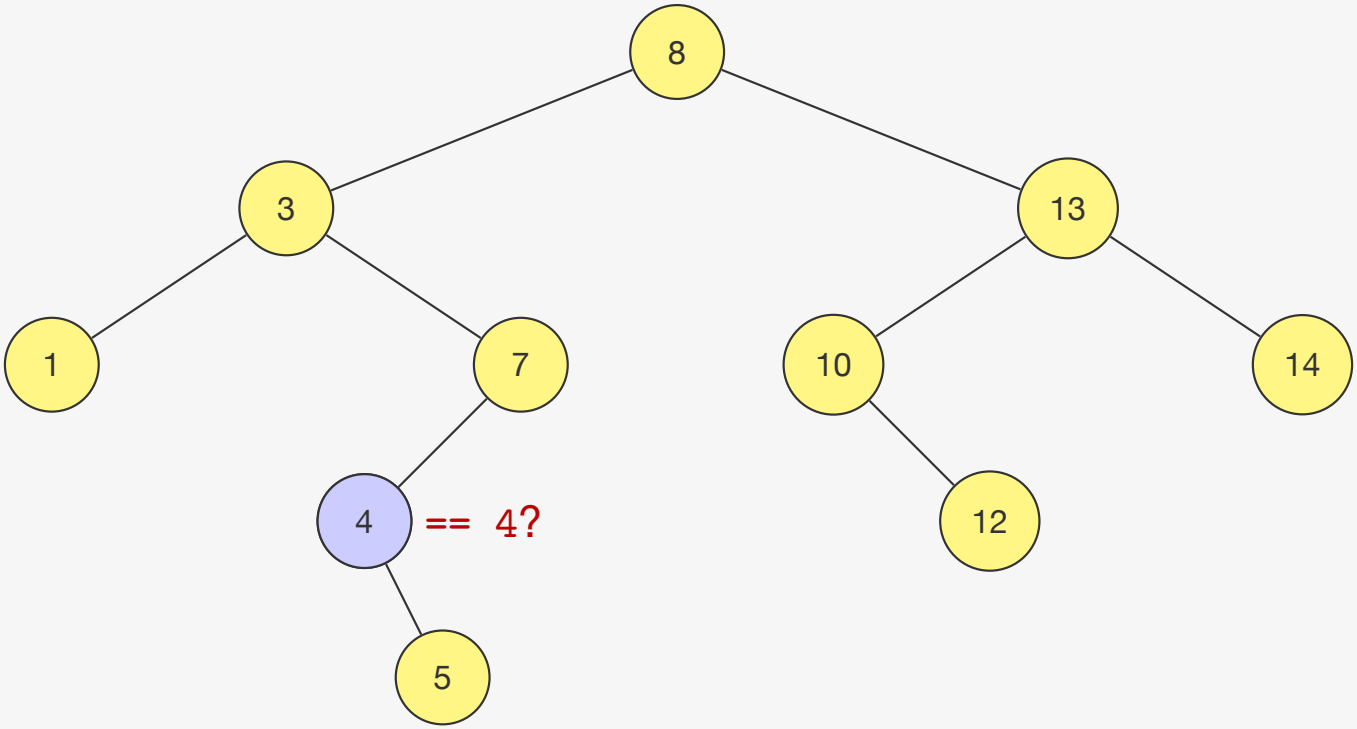


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

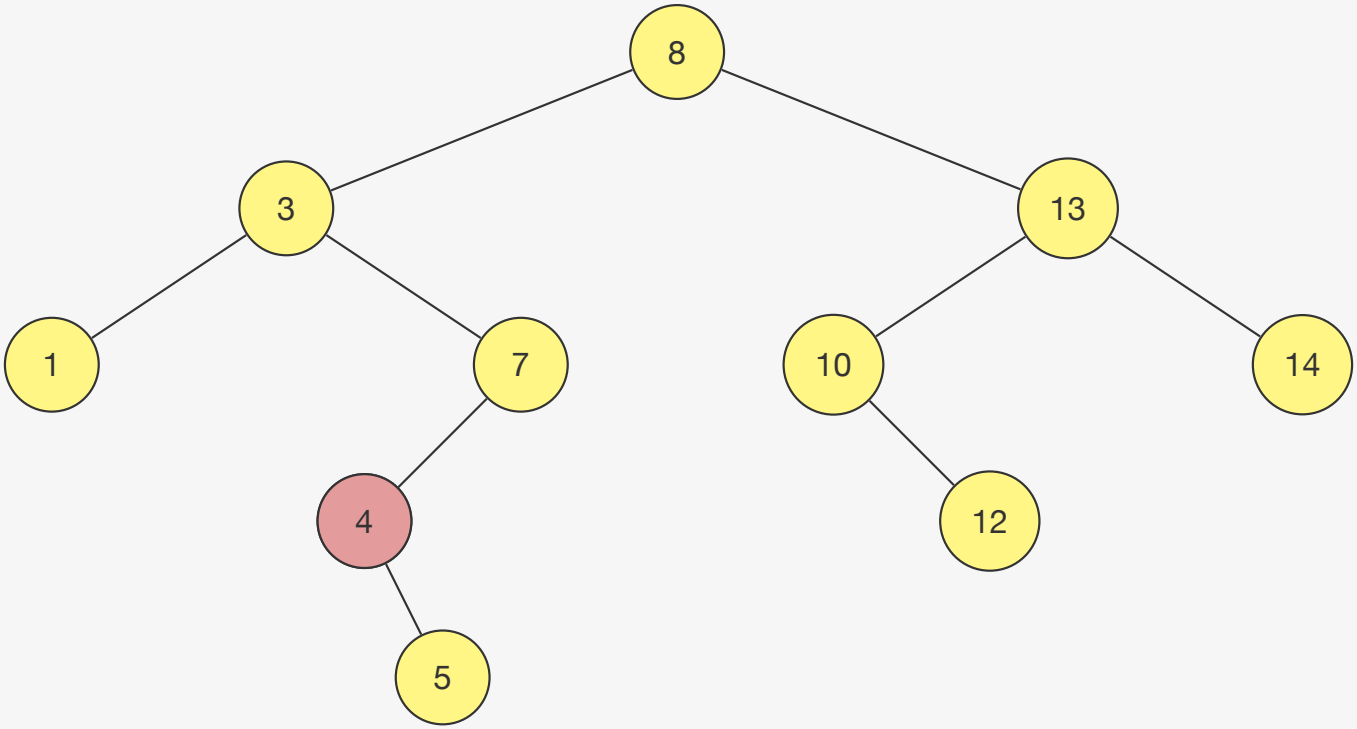


Busca por um valor

A ideia é semelhante àquela da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 4

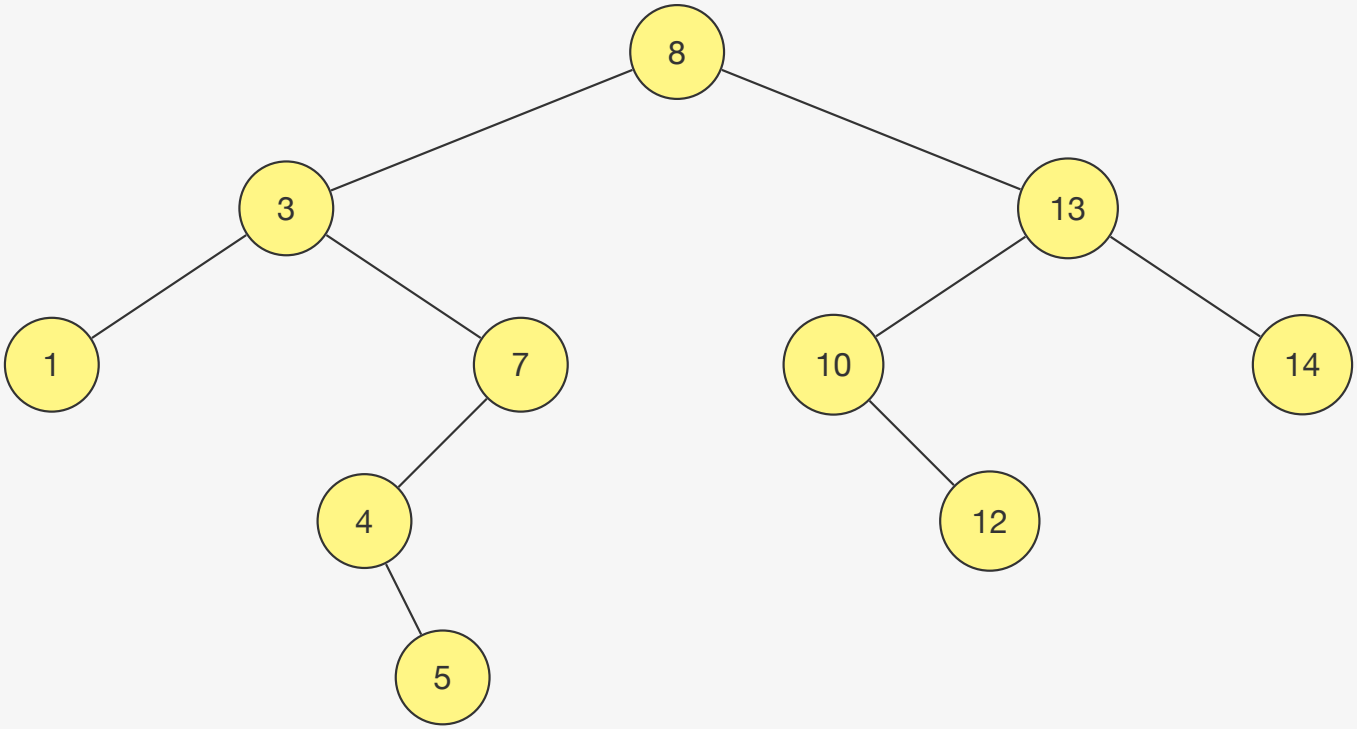


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

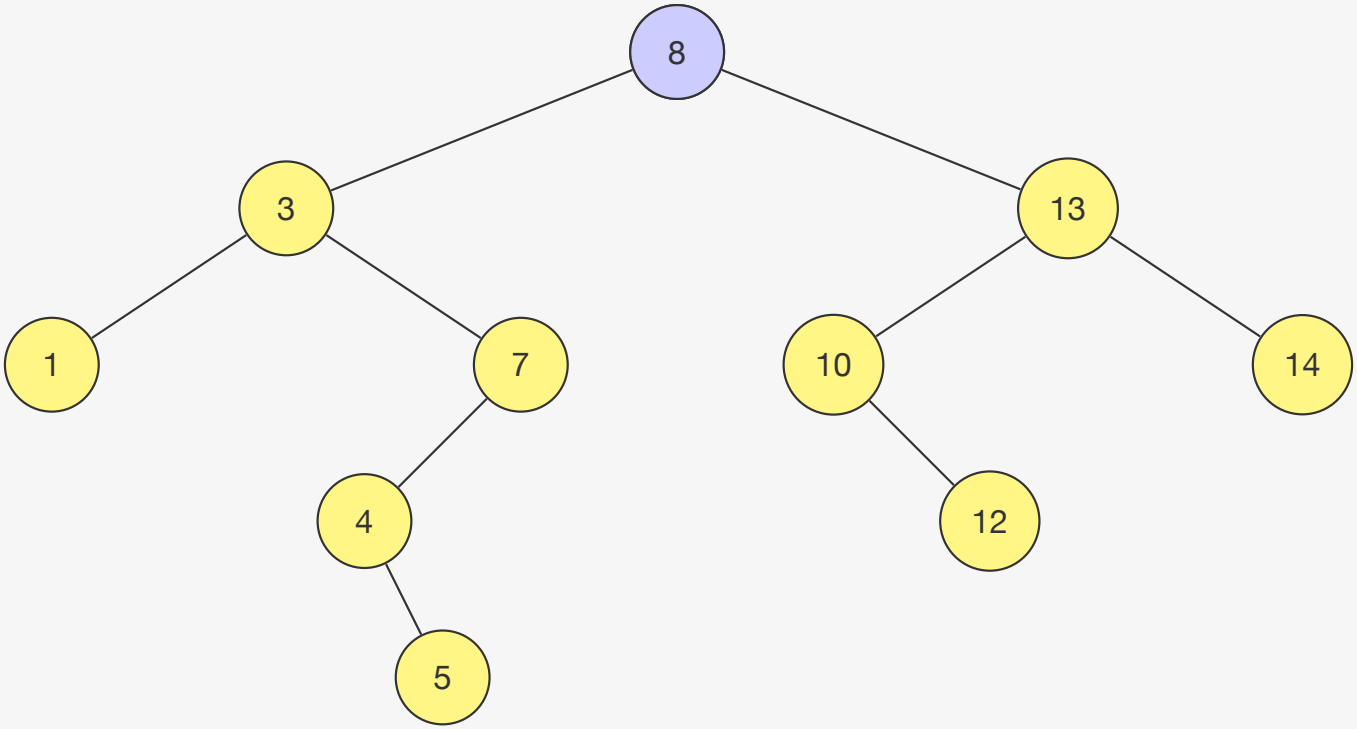


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

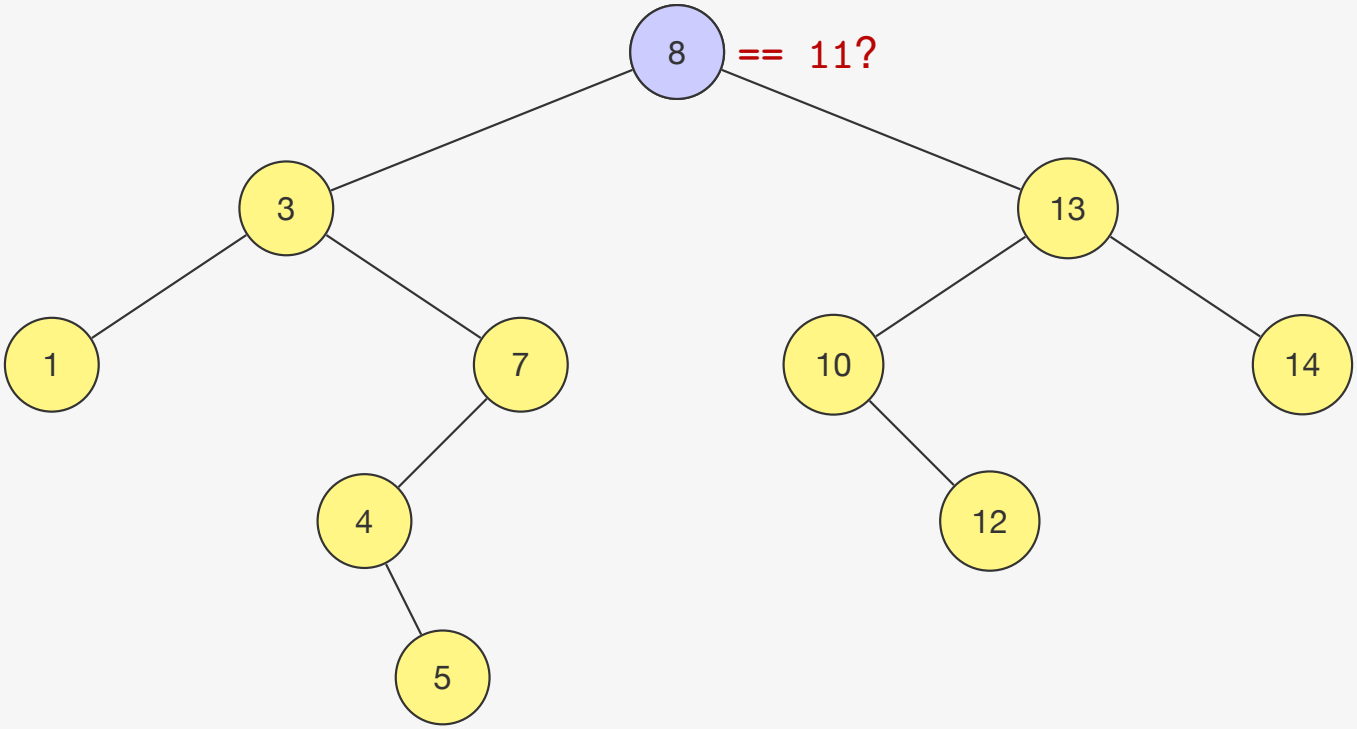


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

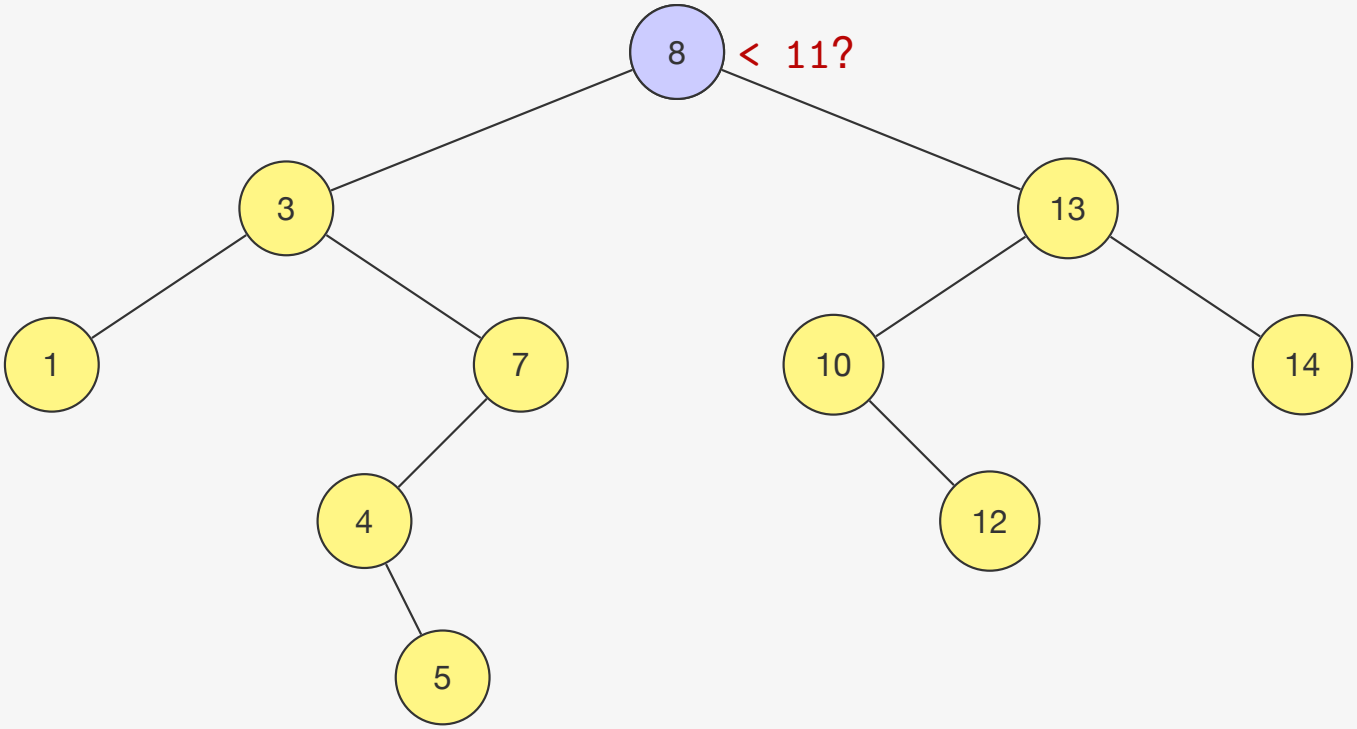


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

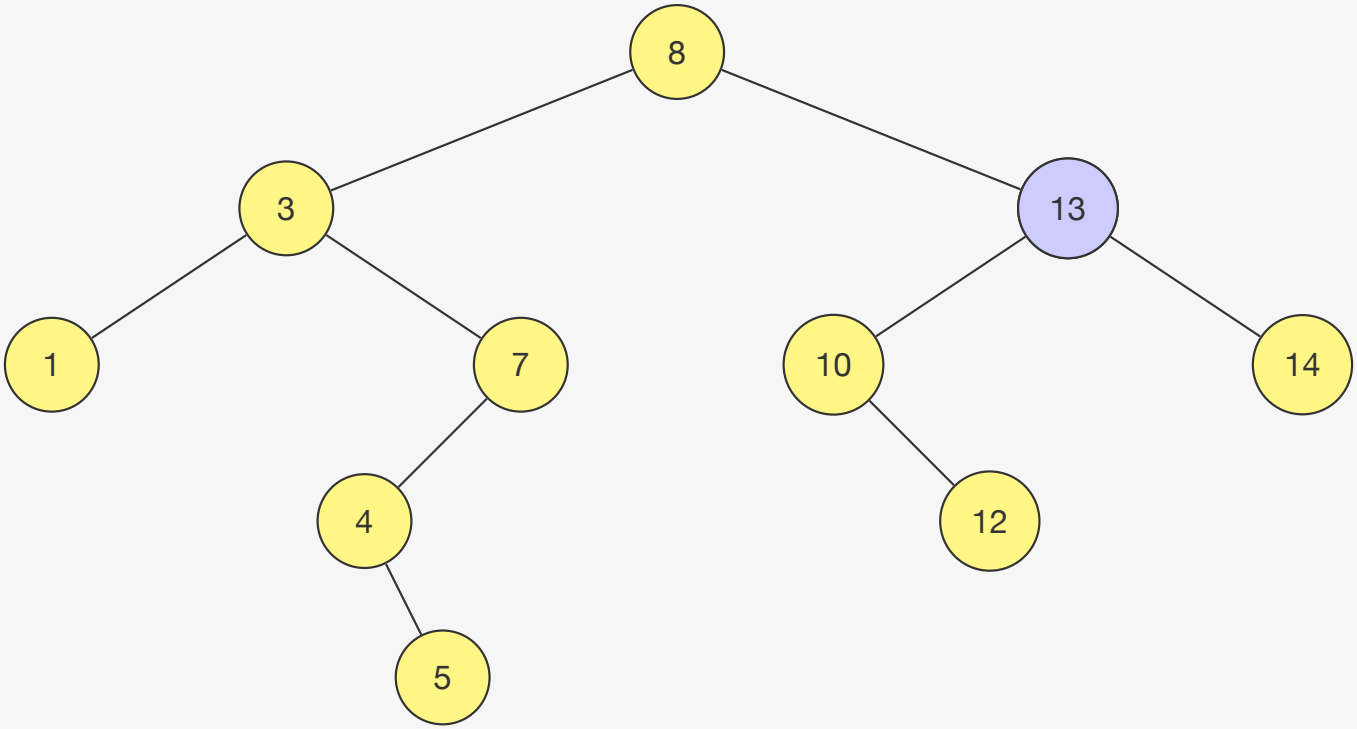


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

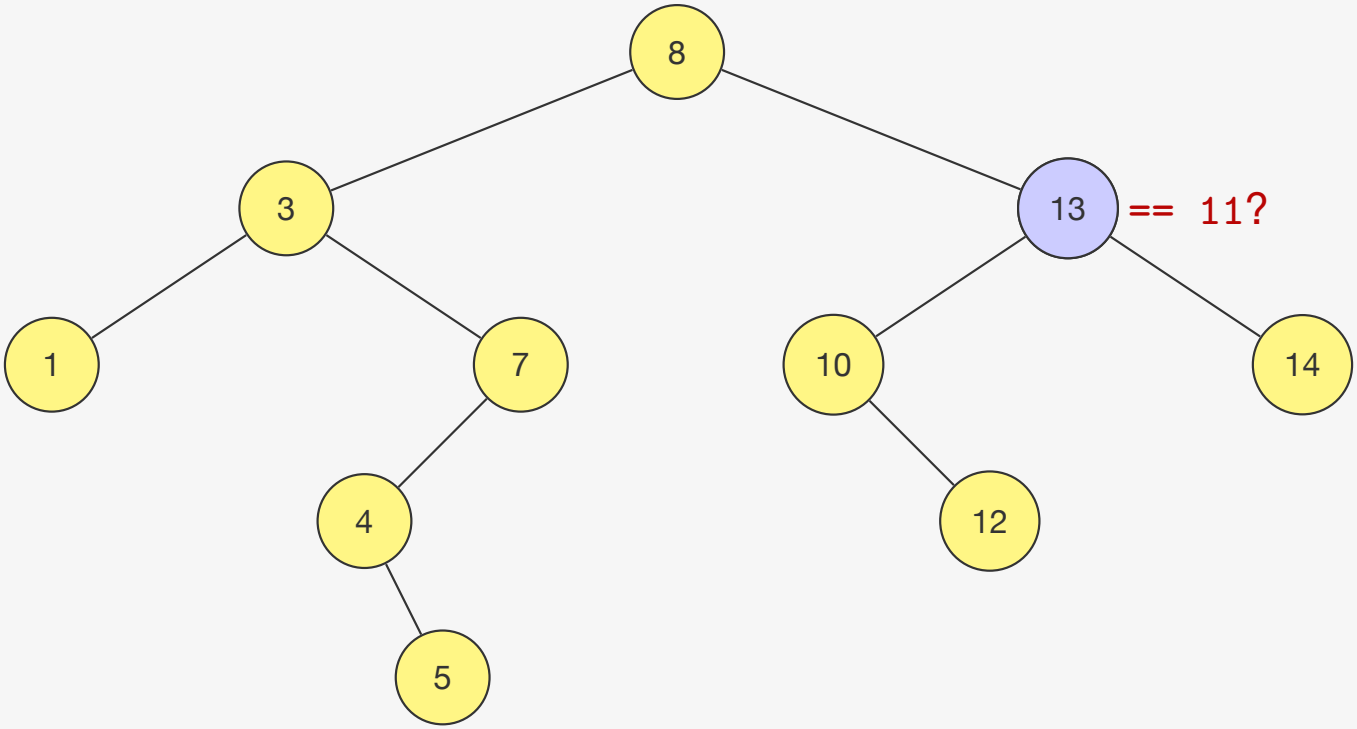


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

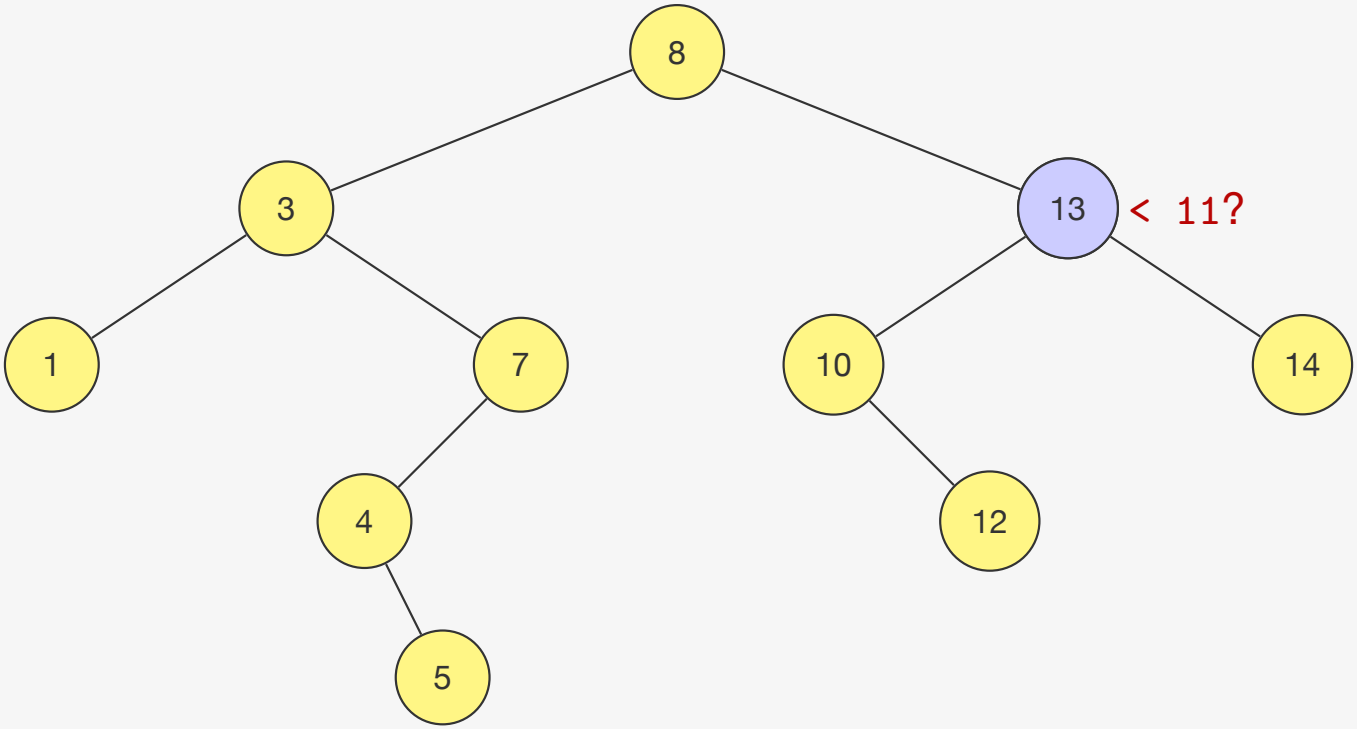


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

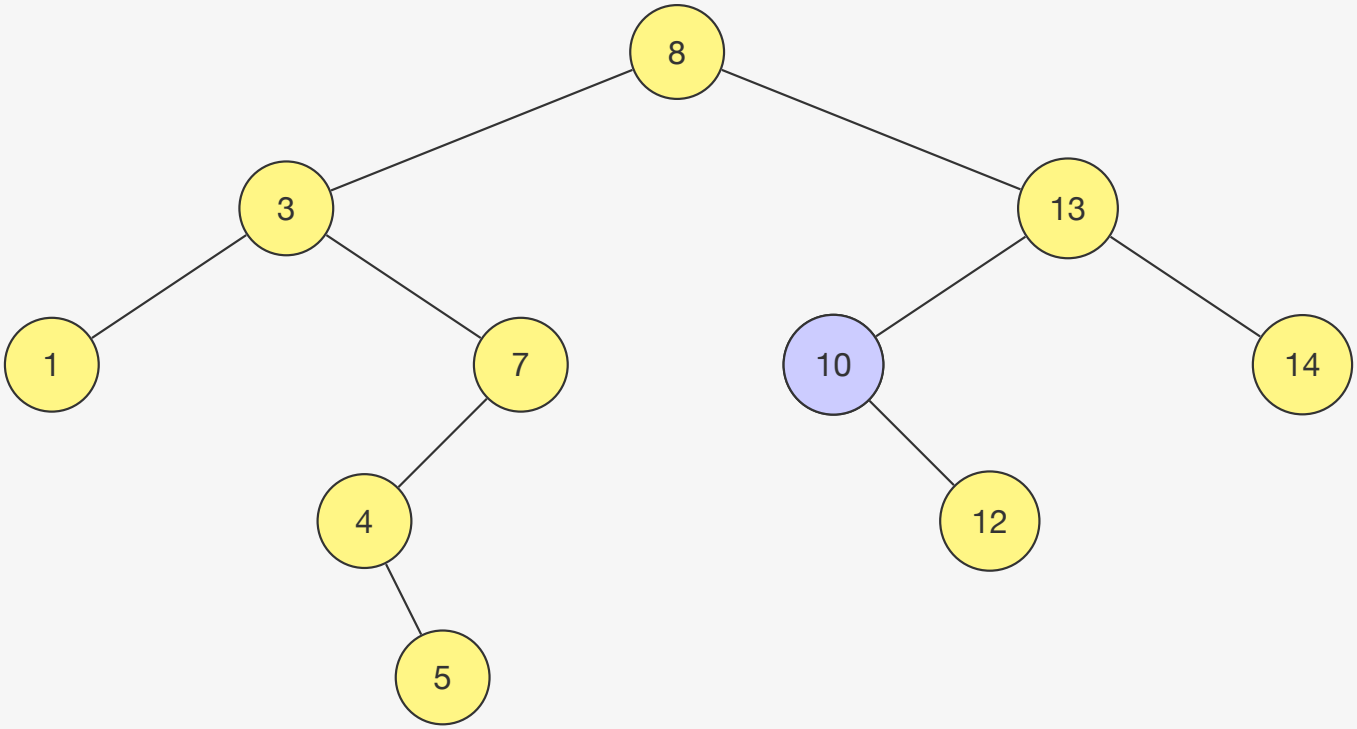


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

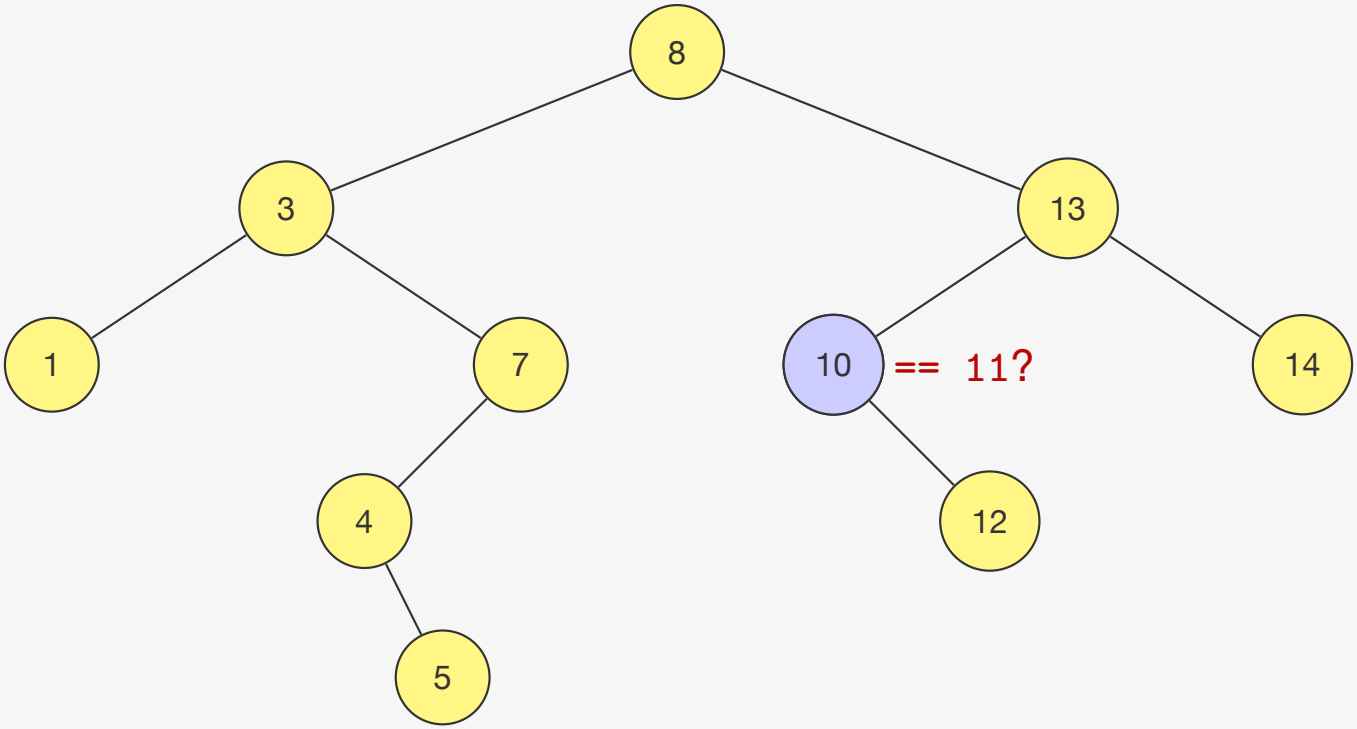


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

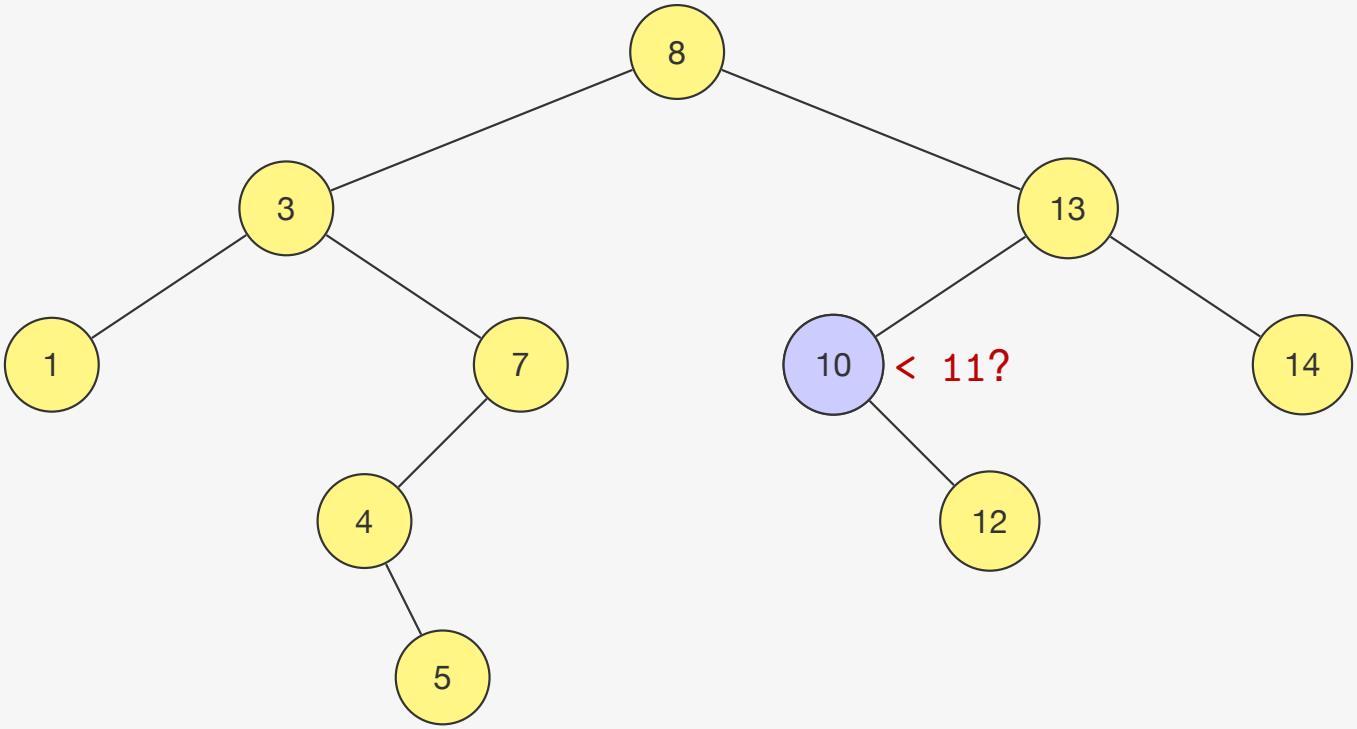


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

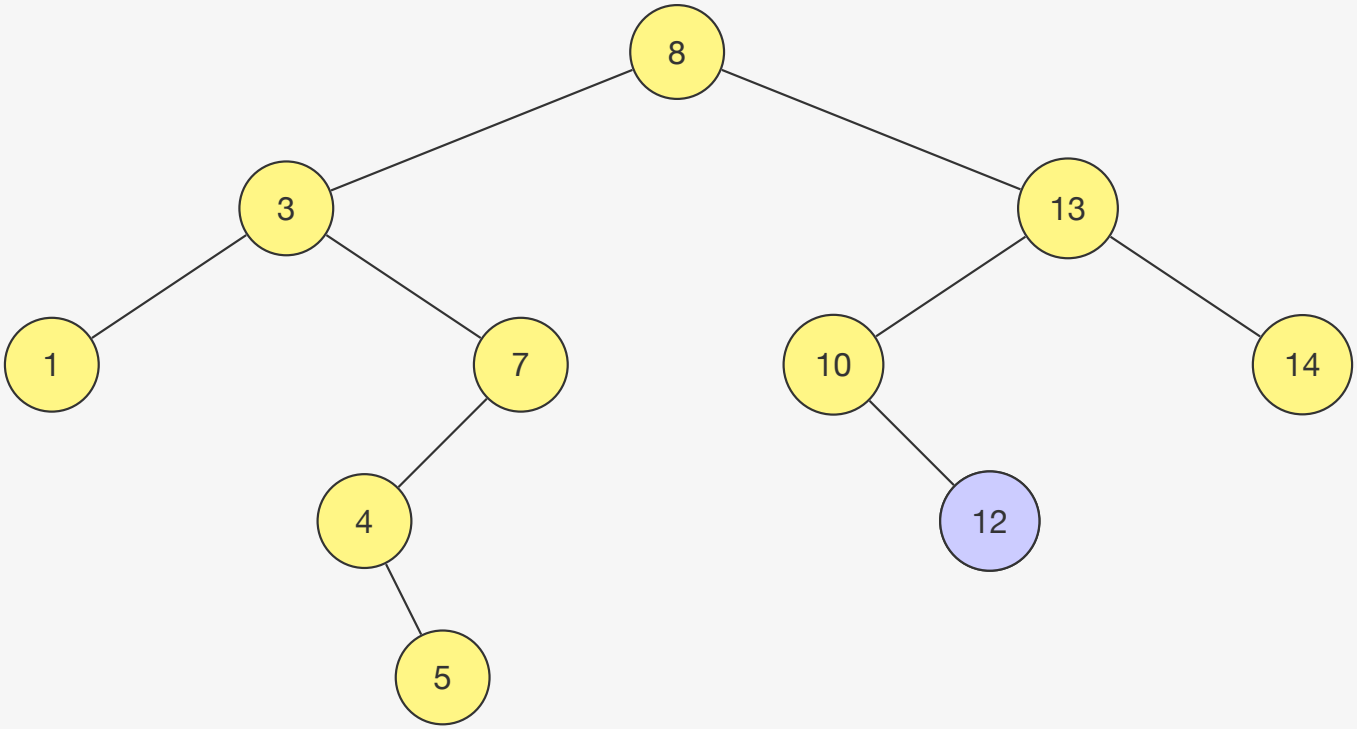


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

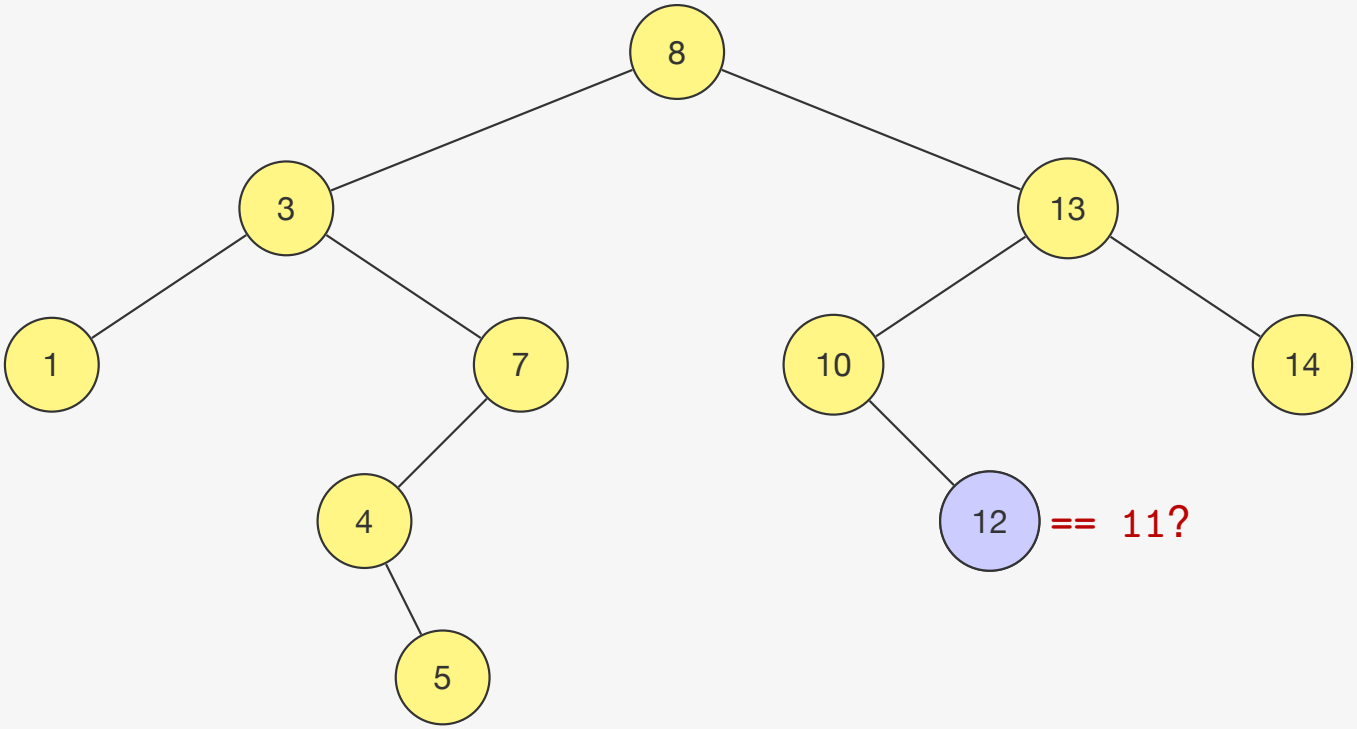


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

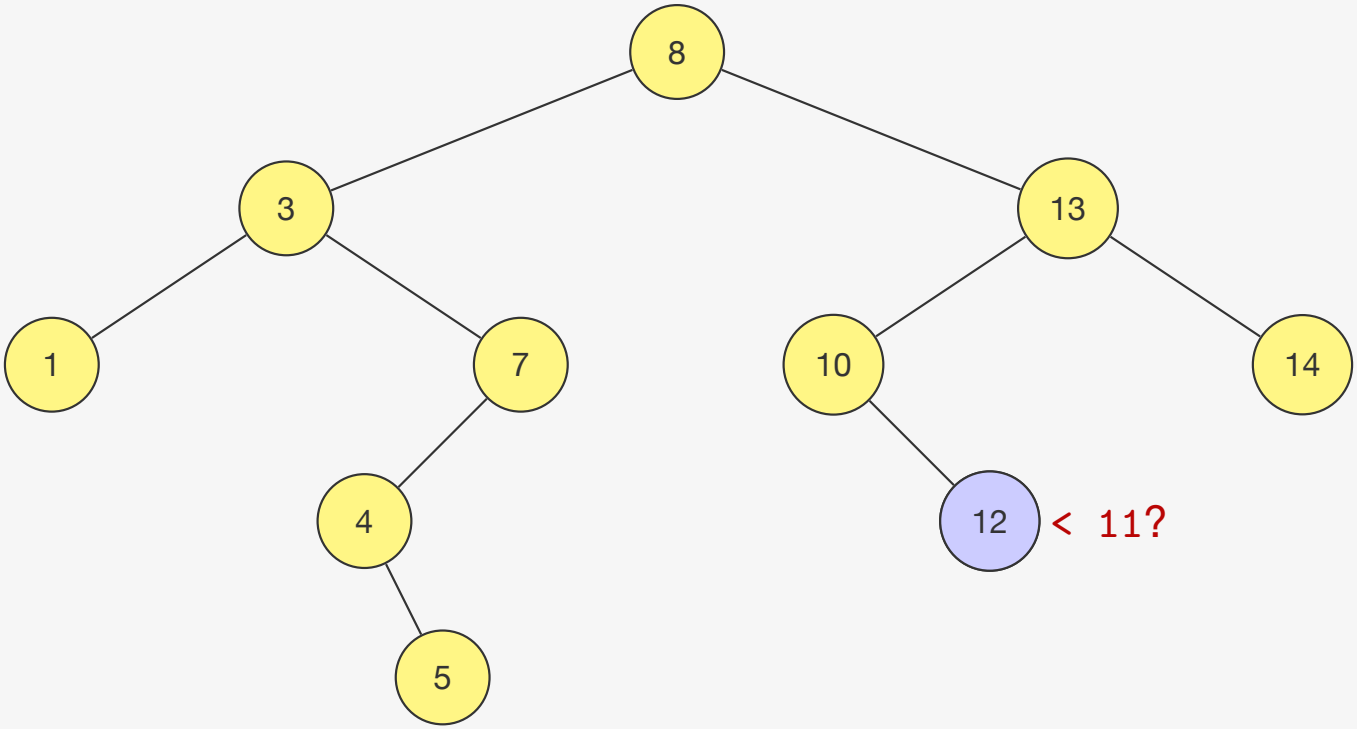


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11

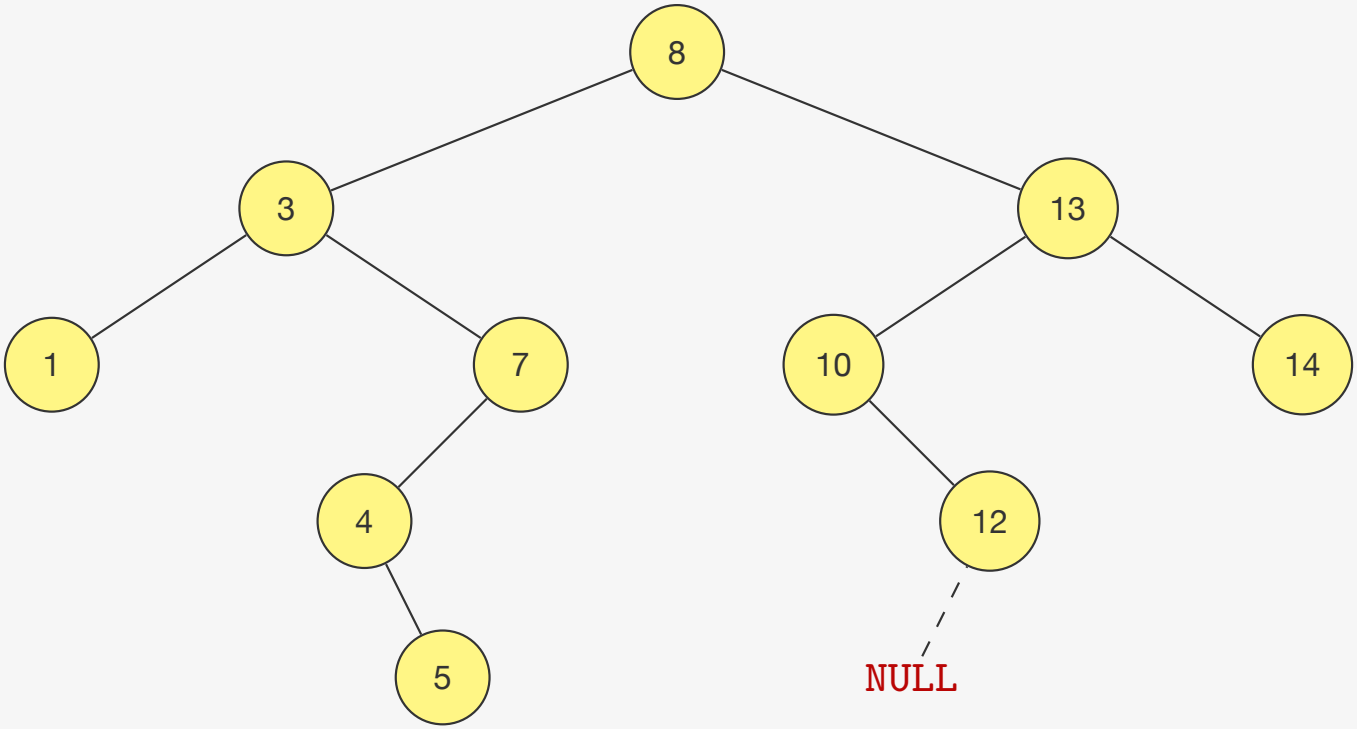


Busca por um valor

A ideia é semelhante a da busca binária:

- Ou o valor a ser buscado está na raiz da árvore
- Ou é menor do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore esquerda
- Ou é maior do que o valor da raiz
  - Se estiver na árvore, está na subárvore direita

Ex: Buscando por 11



Busca

Versão recursiva:

```
1 p_no buscar(p_no raiz, int chave) {
```

Busca

Versão recursiva:

```
1 p_no buscar(p_no raiz, int chave) {
2   if (raiz == NULL || chave == raiz->chave)
3     return raiz;
```

Busca

Versão recursiva:

```
1 p_no buscar(p_no raiz, int chave) {
2   if (raiz == NULL || chave == raiz->chave)
3     return raiz;
4   if (chave < raiz->chave)
5     return buscar(raiz->esq, chave);
```

Busca

Versão recursiva:

```
1 p_no buscar(p_no raiz, int chave) {
2   if (raiz == NULL || chave == raiz->chave)
3     return raiz;
4   if (chave < raiz->chave)
5     return buscar(raiz->esq, chave);
6   else
7     return buscar(raiz->dir, chave);
8 }
```

Busca

Versão recursiva:

```
1 p_no buscar(p_no raiz, int chave) {
2   if (raiz == NULL || chave == raiz->chave)
3     return raiz;
4   if (chave < raiz->chave)
5     return buscar(raiz->esq, chave);
6   else
7     return buscar(raiz->dir, chave);
8 }
```

Versão iterativa:

```
1 p_no buscar_iterativo(p_no raiz, int chave) {
2   while (raiz != NULL && chave != raiz->chave)
3     if (chave < raiz->chave)
4       raiz = raiz->esq;
5     else
6       raiz = raiz->dir;
7   return raiz;
8 }
```

Eficiência da busca

Qual é o tempo da busca?

Eficiência da busca

Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

Eficiência da busca

Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

Ex: 31 nós

Eficiência da busca

Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

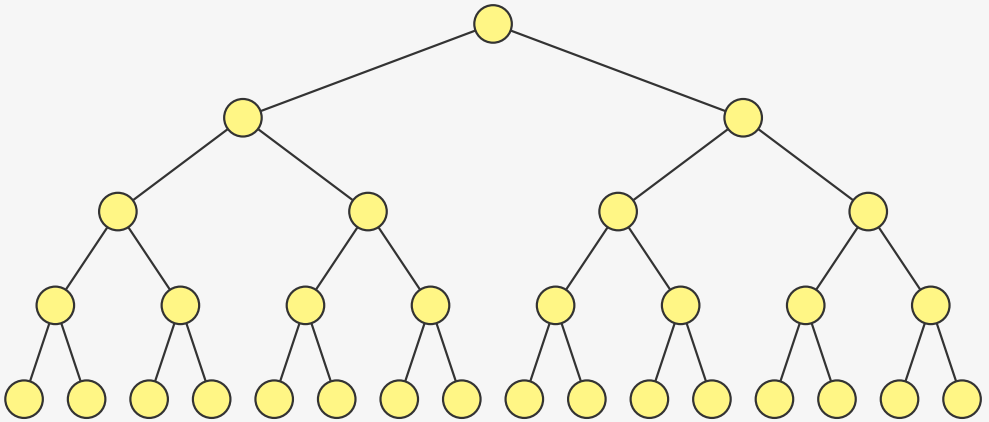
Ex: 31 nós

Eficiência da busca

Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

Ex: 31 nós



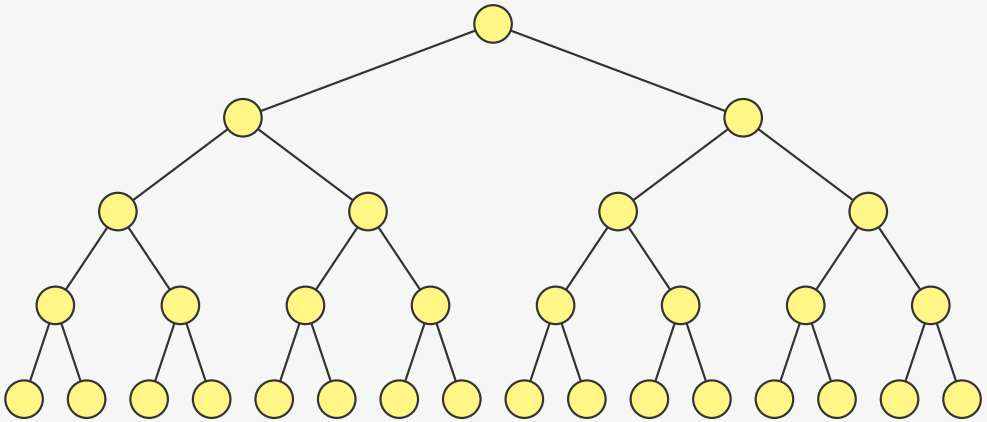
Melhor árvore: $\mathrm{O}(\lg n)$

Eficiência da busca

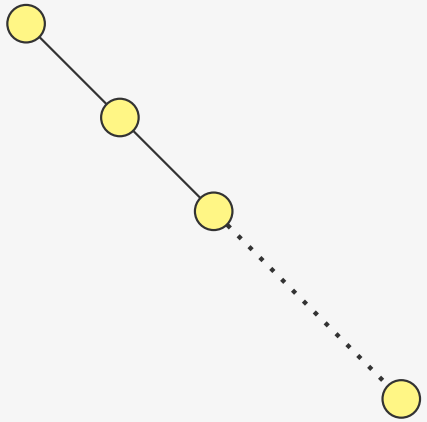
Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

Ex: 31 nós



Melhor árvore: $\mathrm{O}(\lg n)$



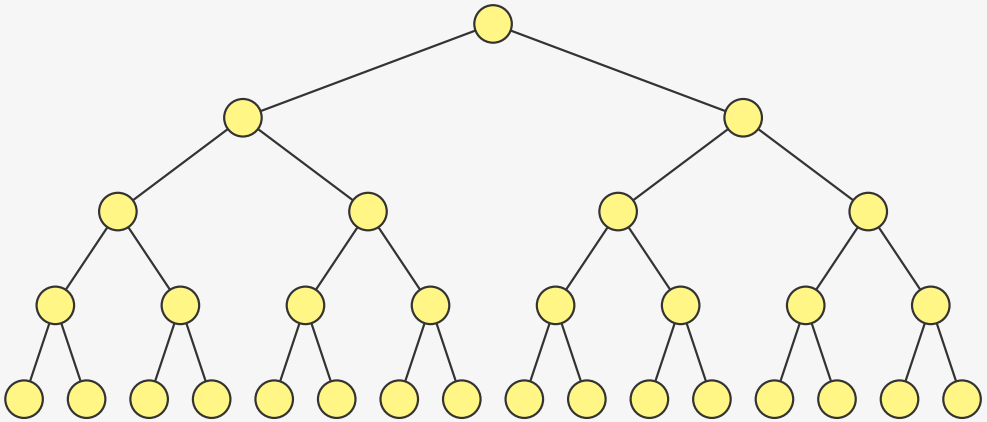
Pior árvore: $\mathrm{O}(n)$

Eficiência da busca

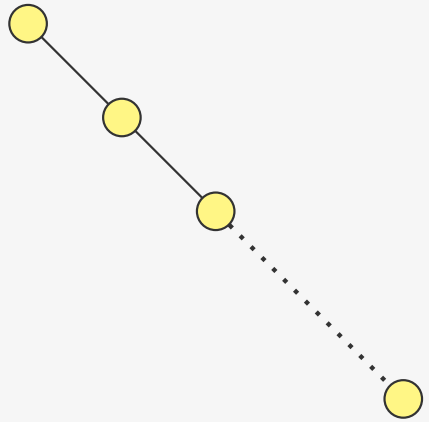
Qual é o tempo da busca?

- depende da forma da árvore...

Ex: 31 nós



Melhor árvore: $\mathrm{O}(\lg n)$



Pior árvore: $\mathrm{O}(n)$

Caso médio: em uma árvore com n elementos adicionados em ordem aleatória a busca demora (em média) $\mathrm{O}(\lg n)$

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

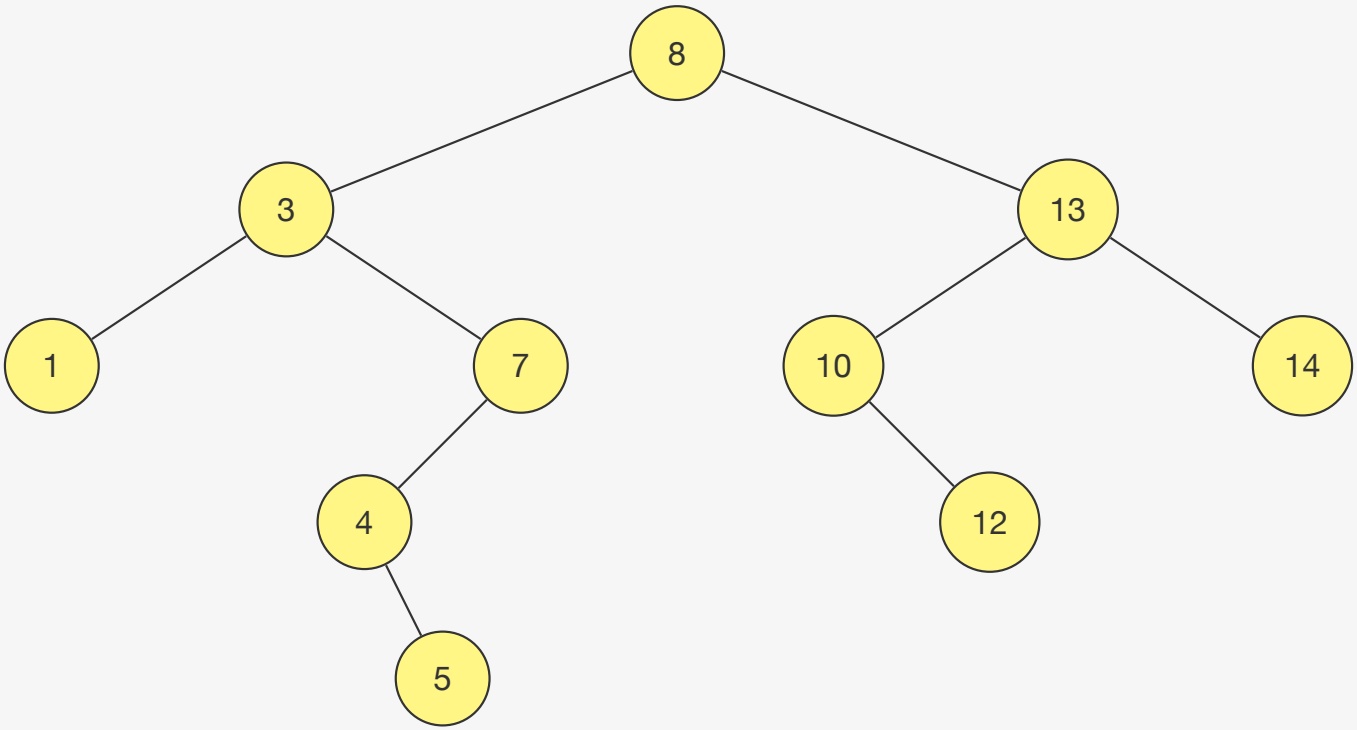
Ex: Inserindo 11

Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

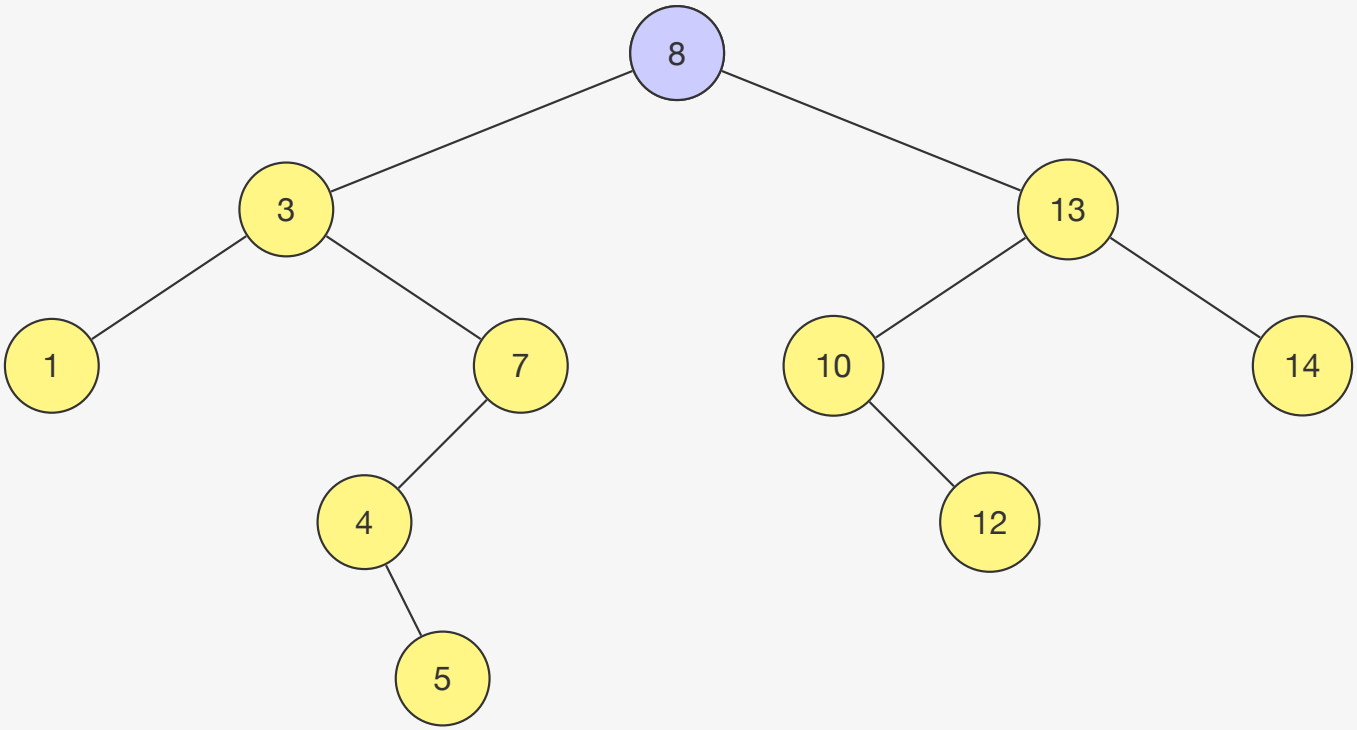


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

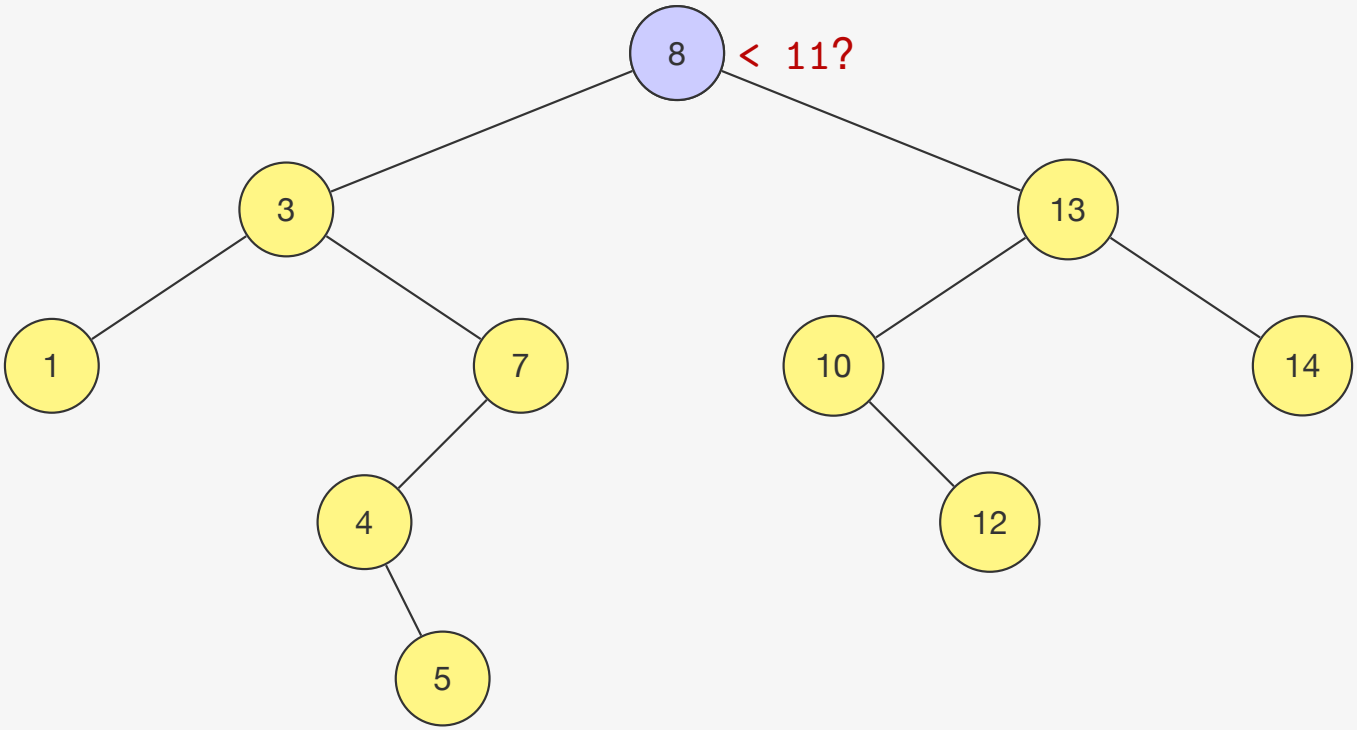


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

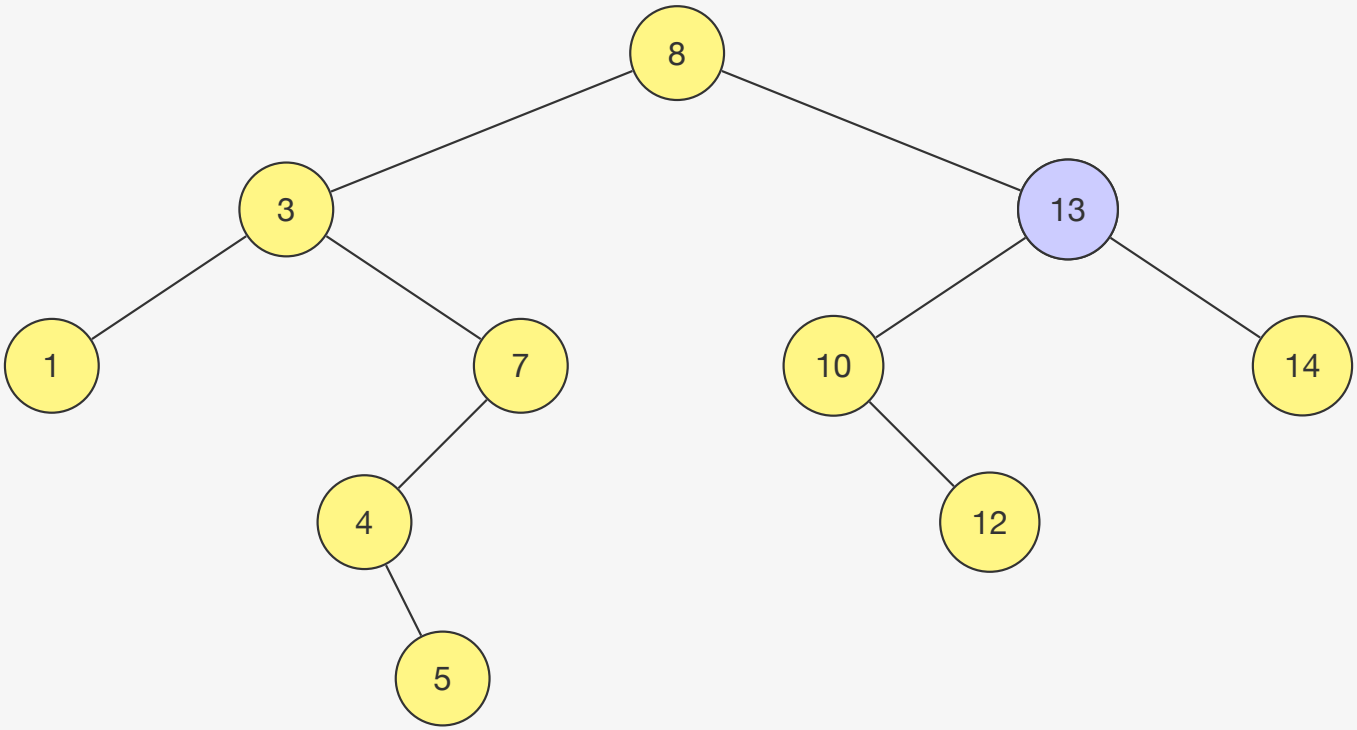


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

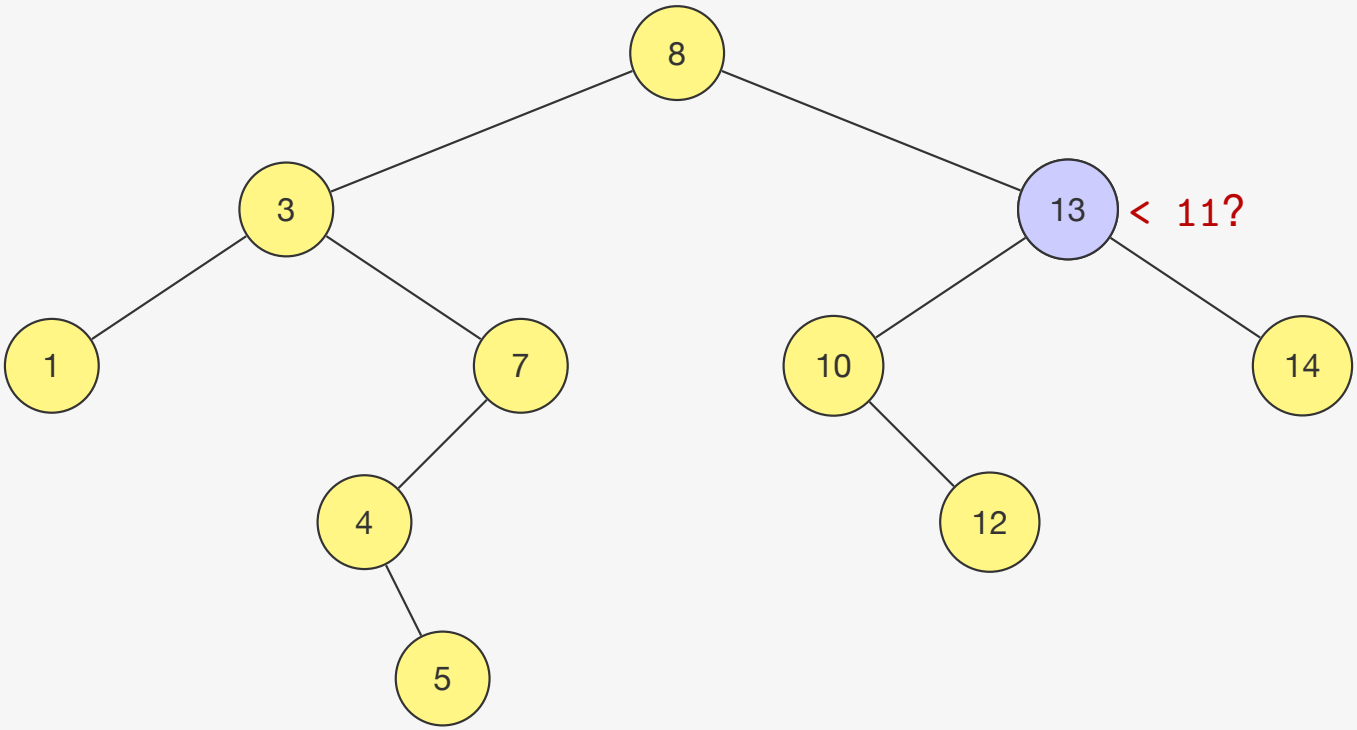


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

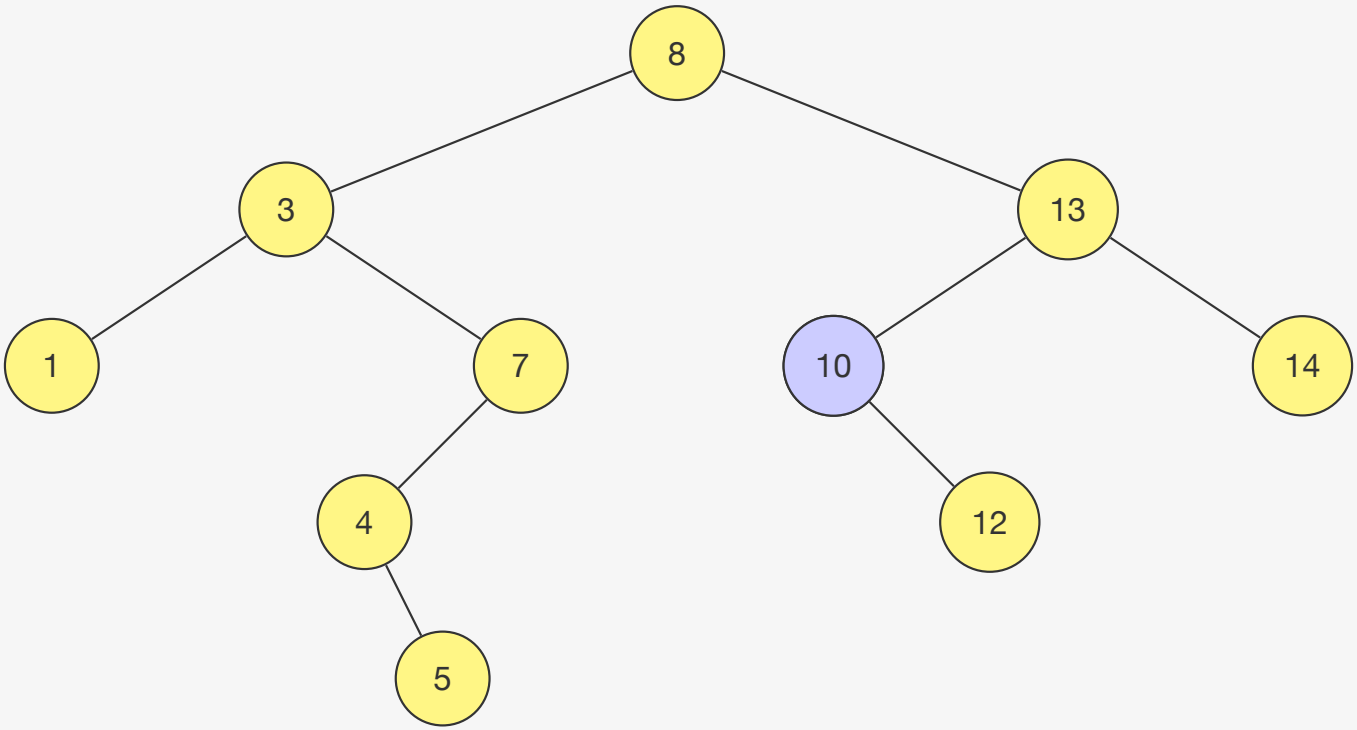


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

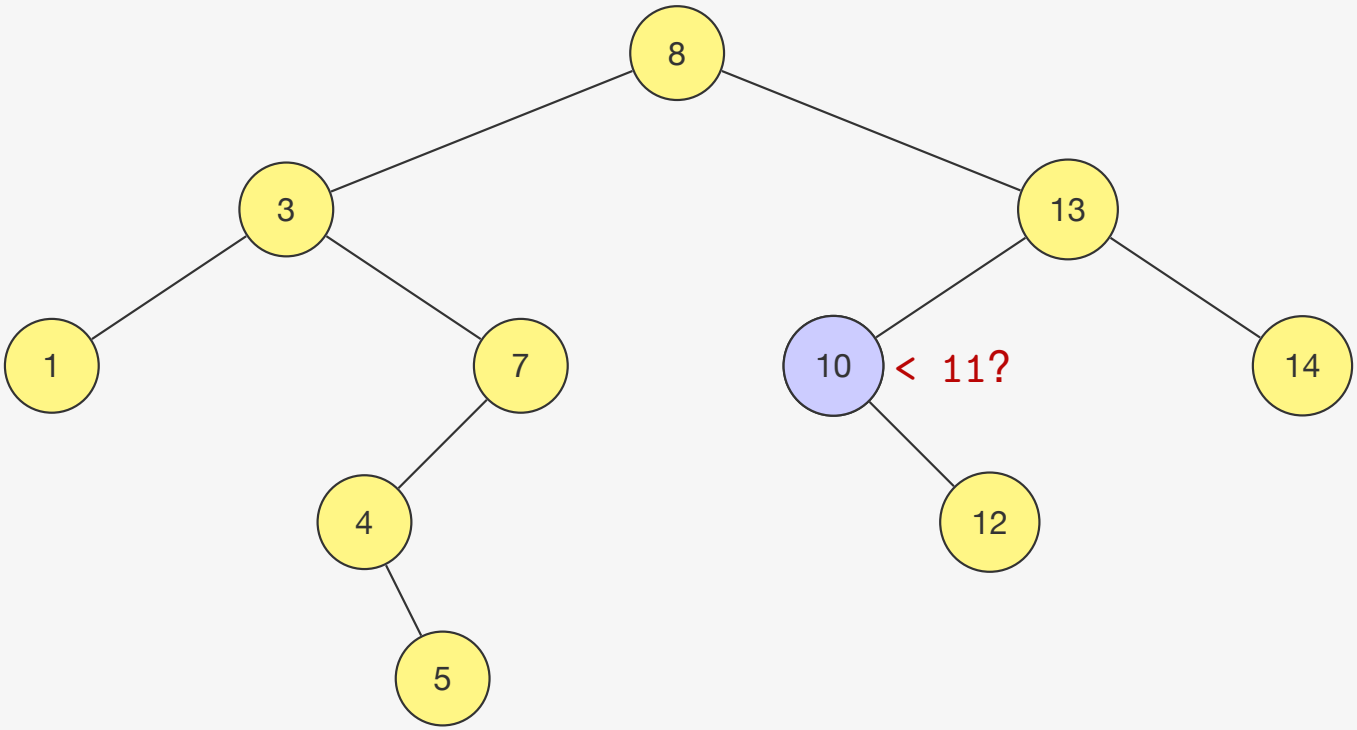


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

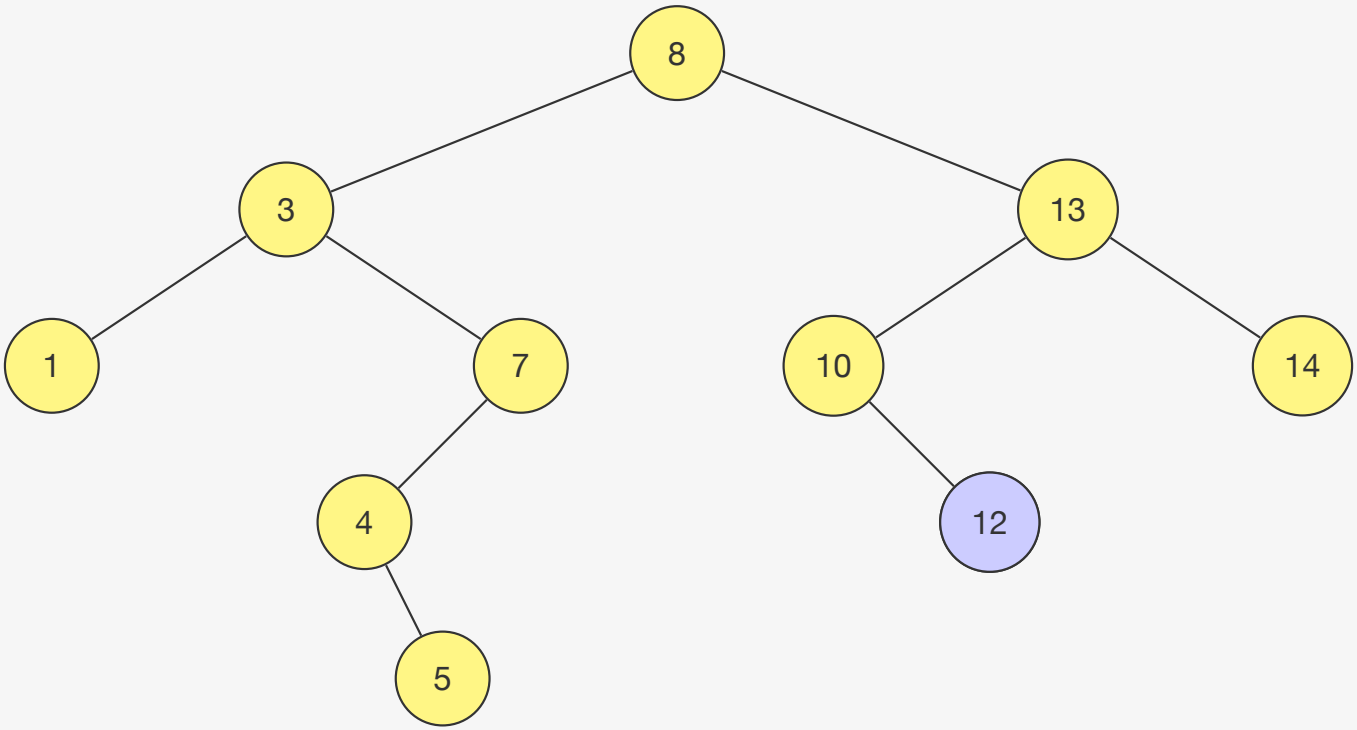


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

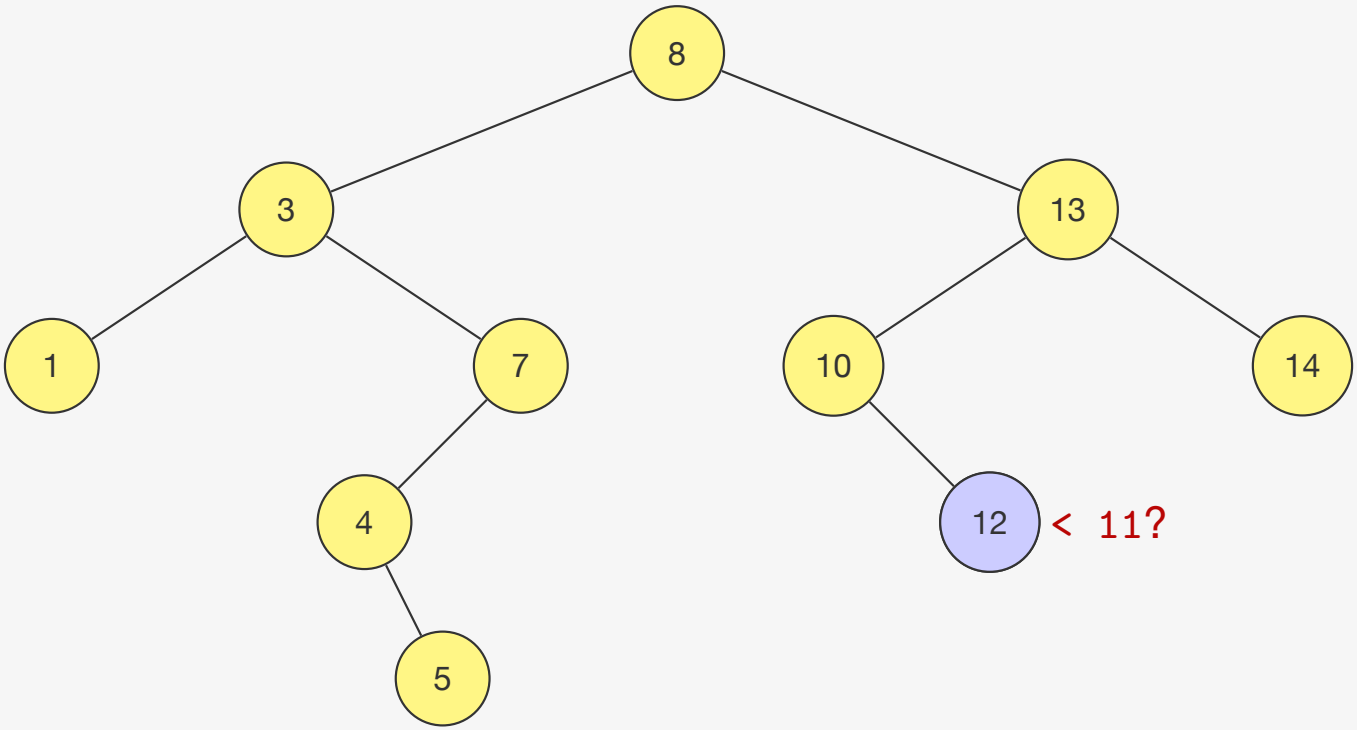


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

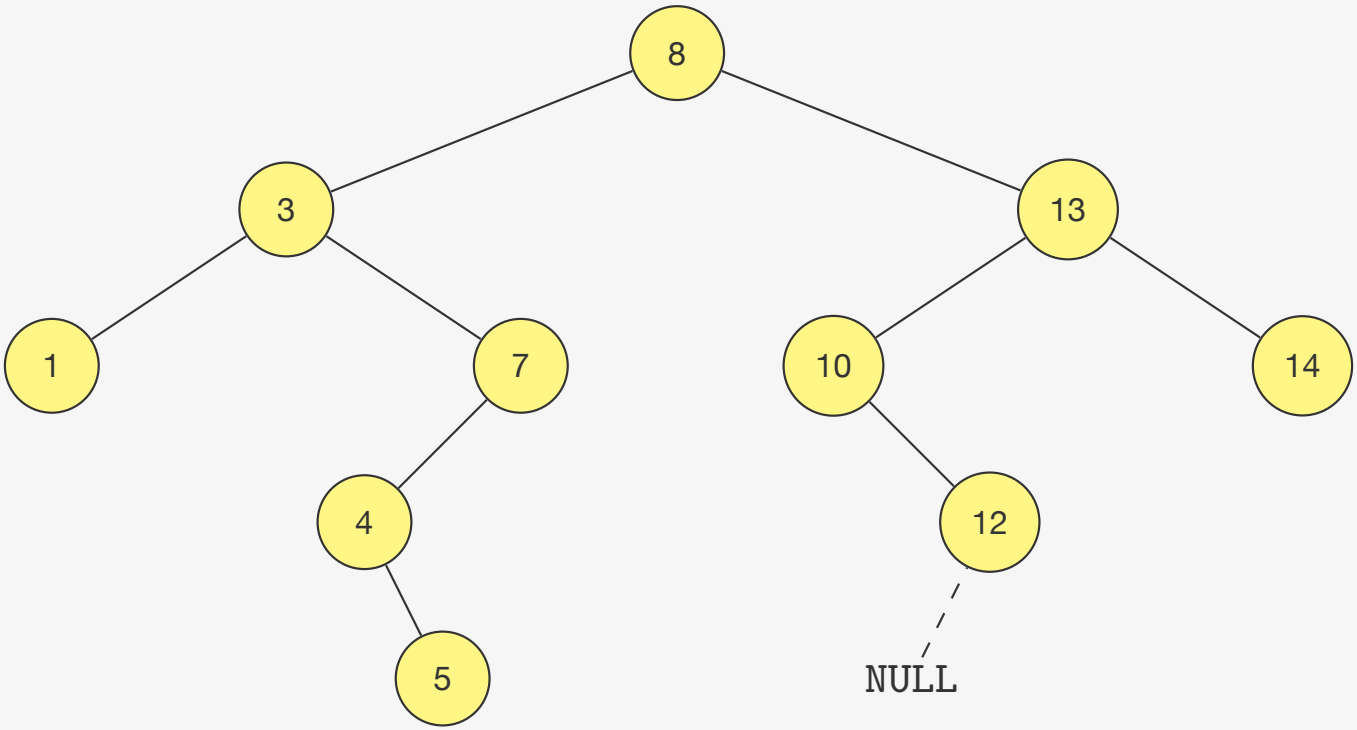


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11

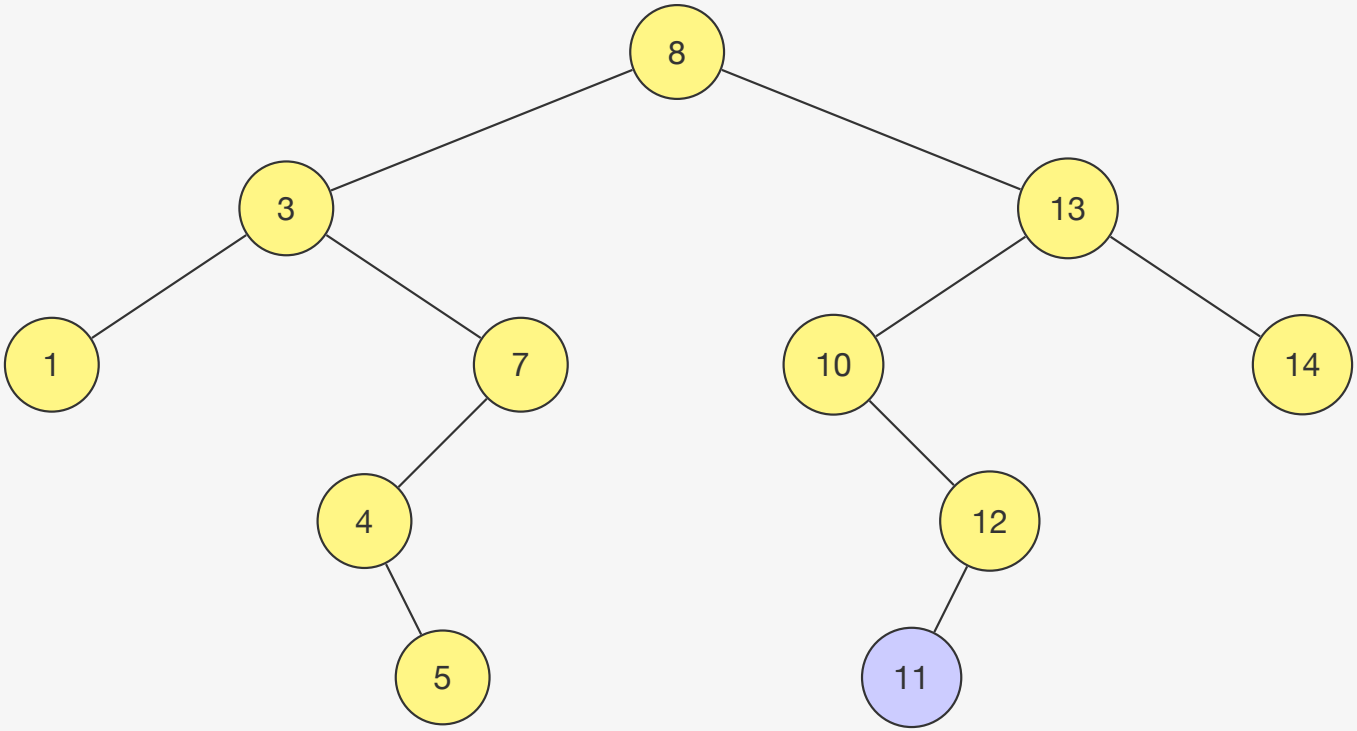


Inserindo um valor

Precisamos determinar onde inserir o valor:

- fazemos uma busca pelo valor
- e colocamos ele na posição onde deveria estar

Ex: Inserindo 11



Inserção - implementação

O algoritmo insere na árvore recursivamente

Inserção - implementação

O algoritmo insere na árvore recursivamente

- devolve um ponteiro para a raiz da “nova” árvore

Inserção - implementação

O algoritmo insere na árvore recursivamente

- devolve um ponteiro para a raiz da “nova” árvore
- assim como fizemos com listas ligadas

Inserção - implementação

O algoritmo insere na árvore recursivamente

- devolve um ponteiro para a raiz da “nova” árvore
- assim como fizemos com listas ligadas

```
1 p_no inserir(p_no raiz, int chave) {
```

Inserção - implementação

O algoritmo insere na árvore recursivamente

- devolve um ponteiro para a raiz da “nova” árvore
- assim como fizemos com listas ligadas

```
1 p_no inserir(p_no raiz, int chave) {
2   p_no novo;
3   if (raiz == NULL) {
4     novo = malloc(sizeof(No));
5     novo->esq = novo->dir = NULL;
6     novo->chave = chave;
7     return novo;
8   }
```

Inserção - implementação

O algoritmo insere na árvore recursivamente

- devolve um ponteiro para a raiz da “nova” árvore
- assim como fizemos com listas ligadas

```
1  p_no inserir(p_no raiz, int chave) {
2    p_no novo;
3    if (raiz == NULL) {
4      novo = malloc(sizeof(No));
5      novo->esq = novo->dir = NULL;
6      novo->chave = chave;
7      return novo;
8    }
9    if (chave < raiz->chave)
10     raiz->esq = inserir(raiz->esq, chave);
11   else
12     raiz->dir = inserir(raiz->dir, chave);
13   return raiz;
14 }
```

Inserção - implementação

O algoritmo insere na árvore recursivamente

- devolve um ponteiro para a raiz da “nova” árvore
- assim como fizemos com listas ligadas

```
1  p_no inserir(p_no raiz, int chave) {
2    p_no novo;
3    if (raiz == NULL) {
4      novo = malloc(sizeof(No));
5      novo->esq = novo->dir = NULL;
6      novo->chave = chave;
7      return novo;
8    }
9    if (chave < raiz->chave)
10     raiz->esq = inserir(raiz->esq, chave);
11   else
12     raiz->dir = inserir(raiz->dir, chave);
13   return raiz;
14 }
```

Inserção - implementação

O algoritmo insere na árvore recursivamente

- devolve um ponteiro para a raiz da “nova” árvore
- assim como fizemos com listas ligadas

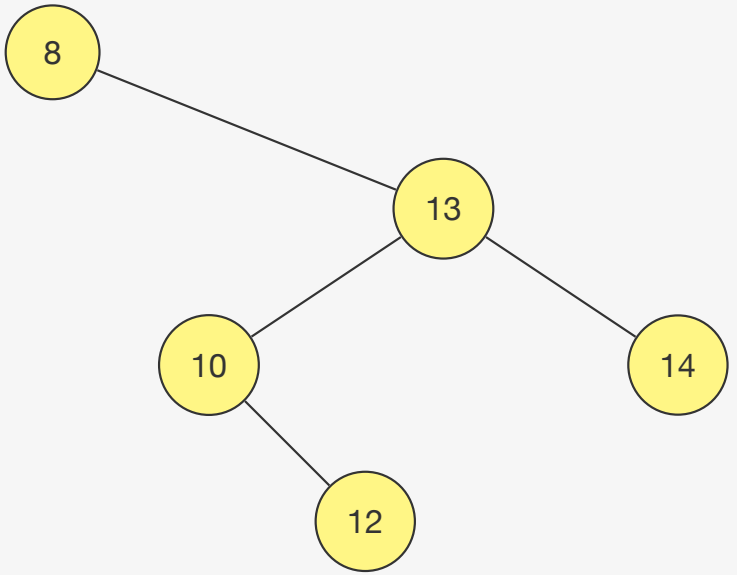
```
1  p_no inserir(p_no raiz, int chave) {
2    p_no novo;
3    if (raiz == NULL) {
4      novo = malloc(sizeof(No));
5      novo->esq = novo->dir = NULL;
6      novo->chave = chave;
7      return novo;
8    }
9    if (chave < raiz->chave)
10     raiz->esq = inserir(raiz->esq, chave);
11   else
12     raiz->dir = inserir(raiz->dir, chave);
13   return raiz;
14 }
```

Mínimo da Árvore

Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?

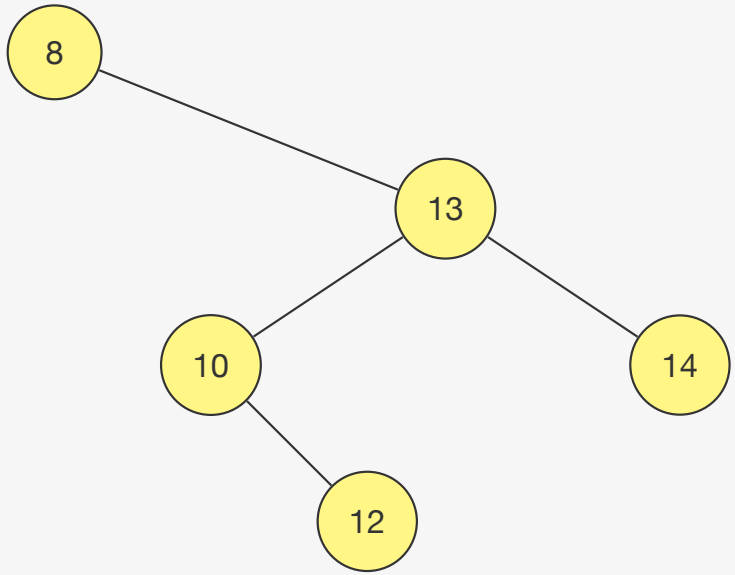
Mínimo da Árvore

Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?



Mínimo da Árvore

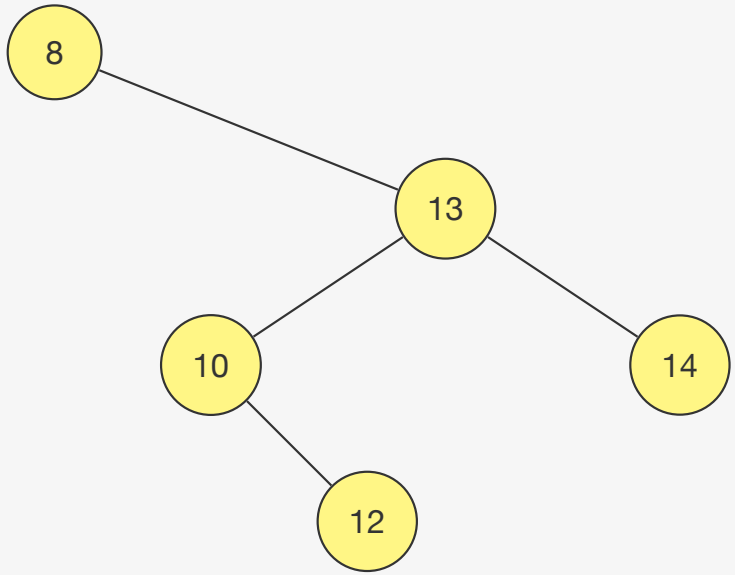
Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?



Quem é o mínimo para essa árvore?

Mínimo da Árvore

Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?



Quem é o mínimo para essa árvore?

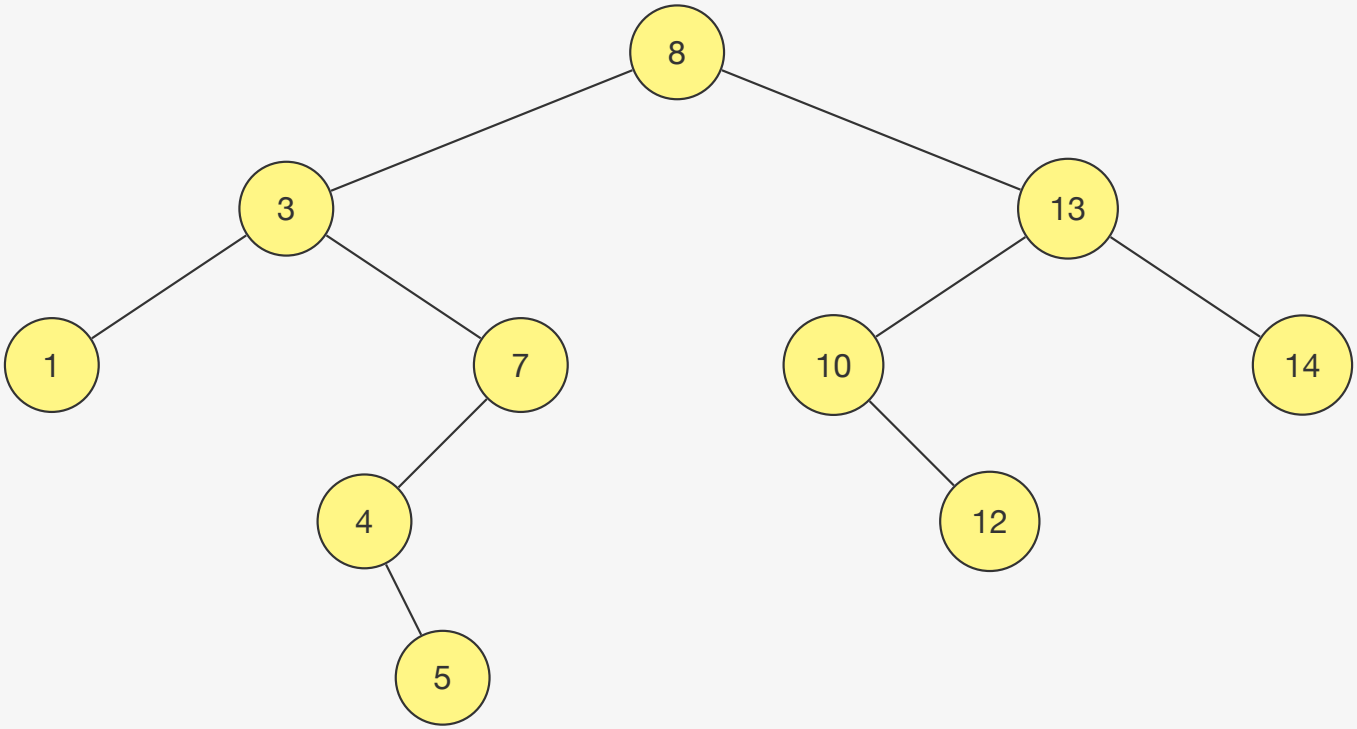
- É a própria raiz

Mínimo da Árvore

Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?

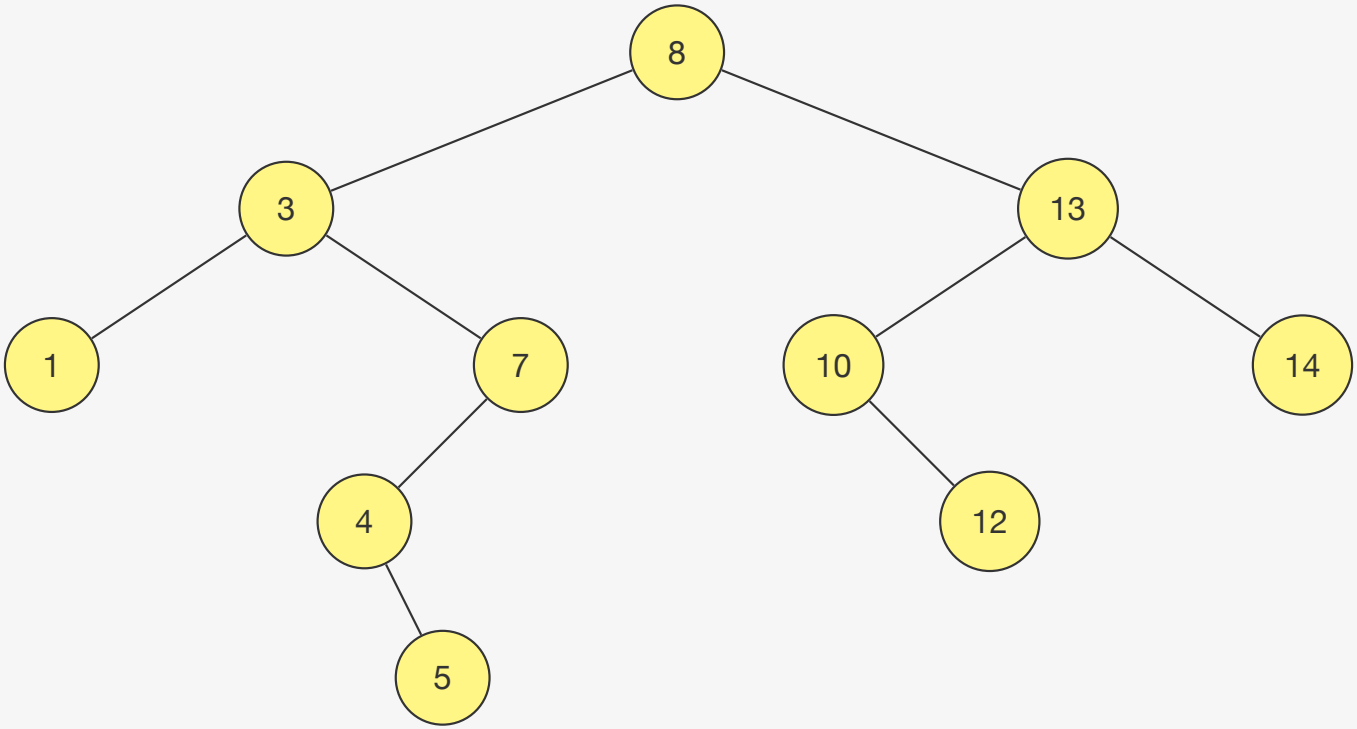
Mínimo da Árvore

Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?



Mínimo da Árvore

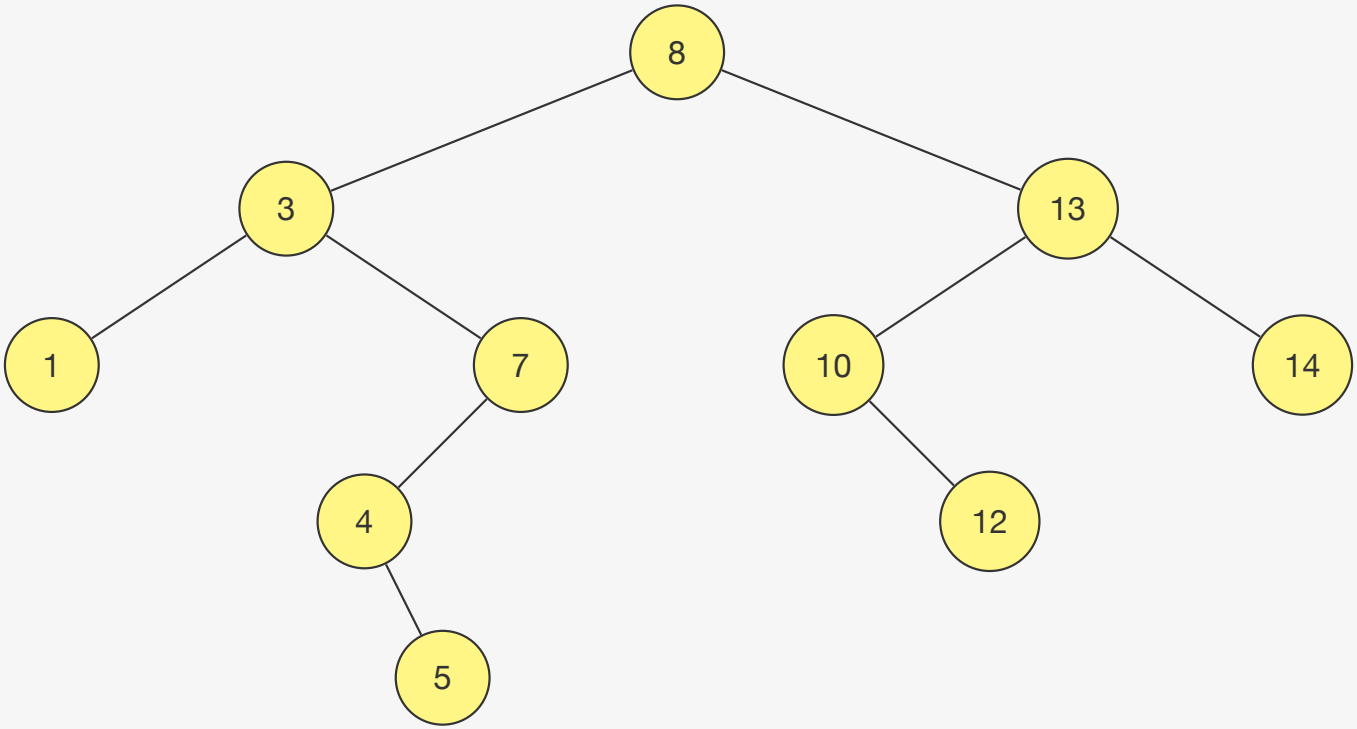
Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?



Quem é o mínimo para essa árvore?

Mínimo da Árvore

Onde está o nó com a menor chave de uma árvore?



Quem é o mínimo para essa árvore?

- É o mínimo da subárvore esquerda

Mínimo - Implementações

Versão recursiva:

```
1 p_no minimo(p_no raiz) {
2   if (raiz == NULL || raiz->esq == NULL)
3     return raiz;
4   return minimo(raiz->esq);
5 }
```

Mínimo - Implementações

Versão recursiva:

```
1 p_no minimo(p_no raiz) {
2   if (raiz == NULL || raiz->esq == NULL)
3     return raiz;
4   return minimo(raiz->esq);
5 }
```

Versão iterativa:

```
1 p_no minimo_iterativo(p_no raiz) {
2   while (raiz != NULL && raiz->esq != NULL)
3     raiz = raiz->esq;
4   return raiz;
5 }
```

Mínimo - Implementações

Versão recursiva:

```
1 p_no minimo(p_no raiz) {
2   if (raiz == NULL || raiz->esq == NULL)
3     return raiz;
4   return minimo(raiz->esq);
5 }
```

Versão iterativa:

```
1 p_no minimo_iterativo(p_no raiz) {
2   while (raiz != NULL && raiz->esq != NULL)
3     raiz = raiz->esq;
4   return raiz;
5 }
```

Para encontrar o máximo, basta fazer a operação simétrica

Mínimo - Implementações

Versão recursiva:

```
1 p_no minimo(p_no raiz) {
2   if (raiz == NULL || raiz->esq == NULL)
3     return raiz;
4   return minimo(raiz->esq);
5 }
```

Versão iterativa:

```
1 p_no minimo_iterativo(p_no raiz) {
2   while (raiz != NULL && raiz->esq != NULL)
3     raiz = raiz->esq;
4   return raiz;
5 }
```

Para encontrar o máximo, basta fazer a operação simétrica

- Se a subárvore direita existir, é o seu máximo

Mínimo - Implementações

Versão recursiva:

```
1 p_no minimo(p_no raiz) {
2   if (raiz == NULL || raiz->esq == NULL)
3     return raiz;
4   return minimo(raiz->esq);
5 }
```

Versão iterativa:

```
1 p_no minimo_iterativo(p_no raiz) {
2   while (raiz != NULL && raiz->esq != NULL)
3     raiz = raiz->esq;
4   return raiz;
5 }
```

Para encontrar o máximo, basta fazer a operação simétrica

- Se a subárvore direita existir, é o seu máximo
- Senão, é a própria raiz

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

Sucessor

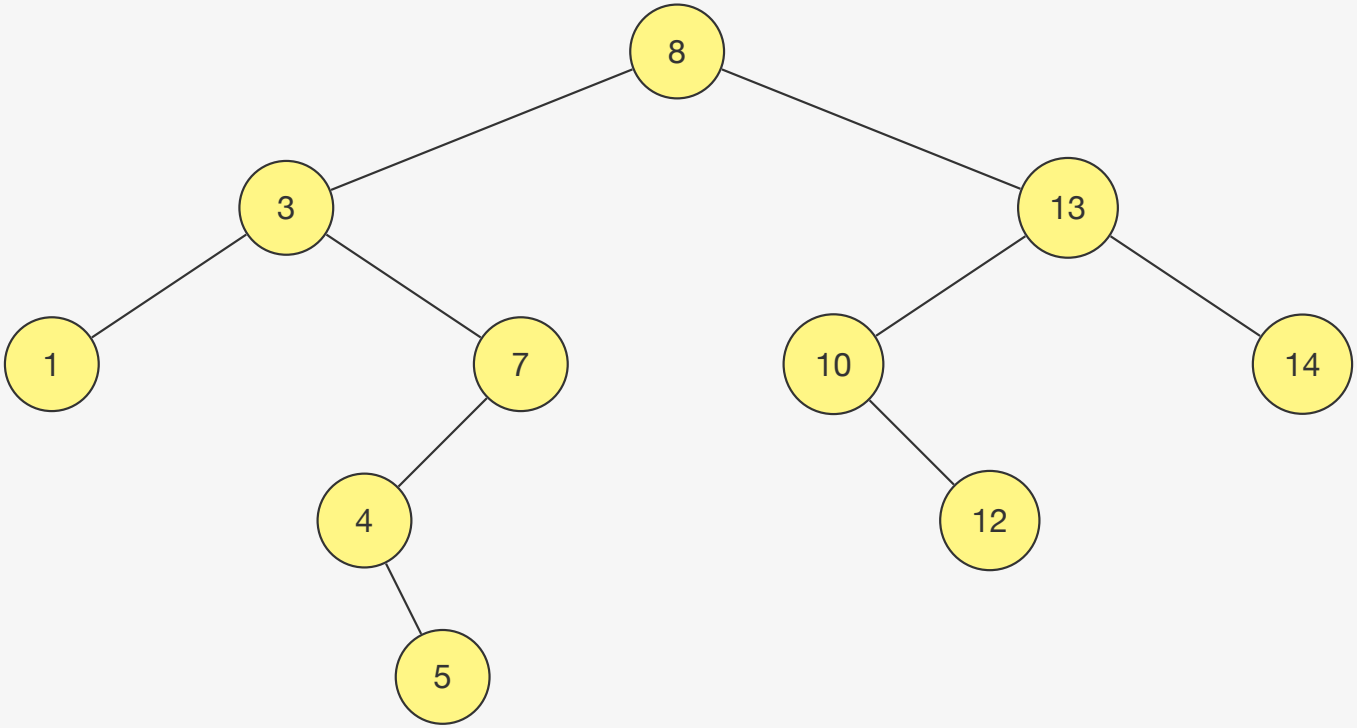
Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

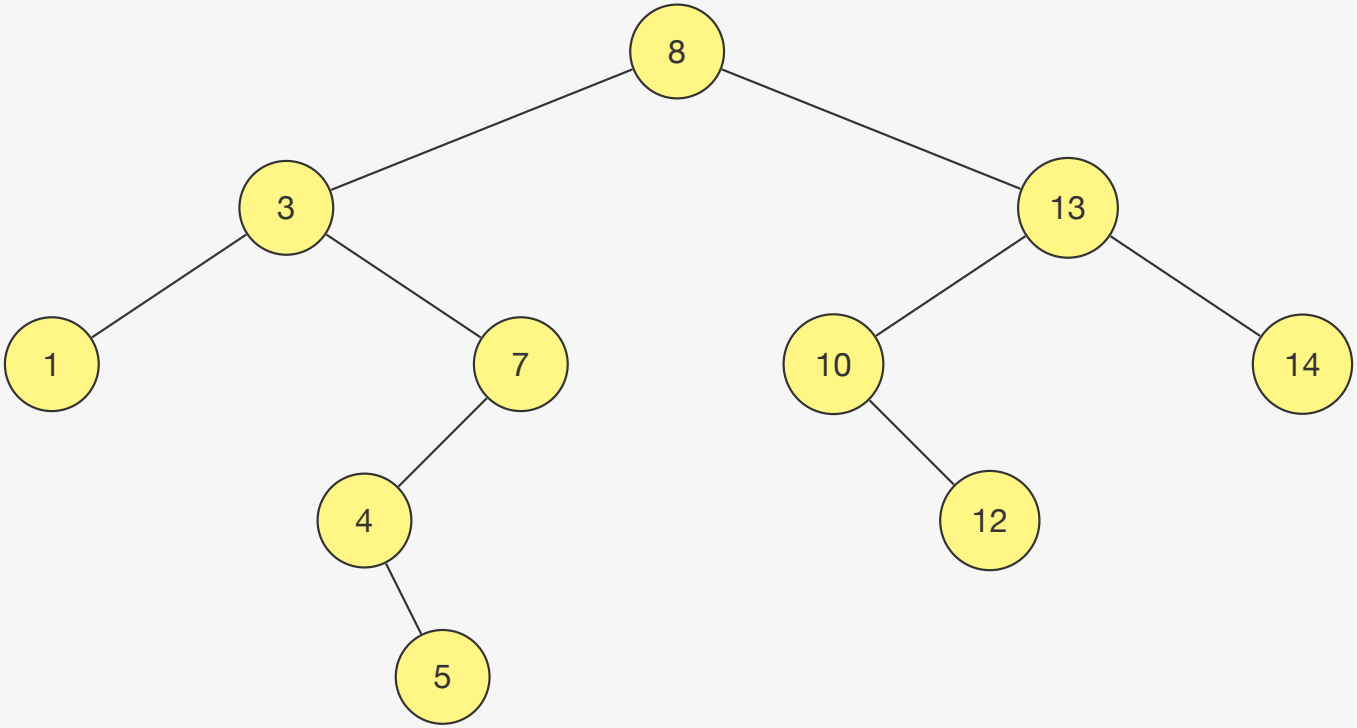
- O sucessor é o próximo nó na ordenação



Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação

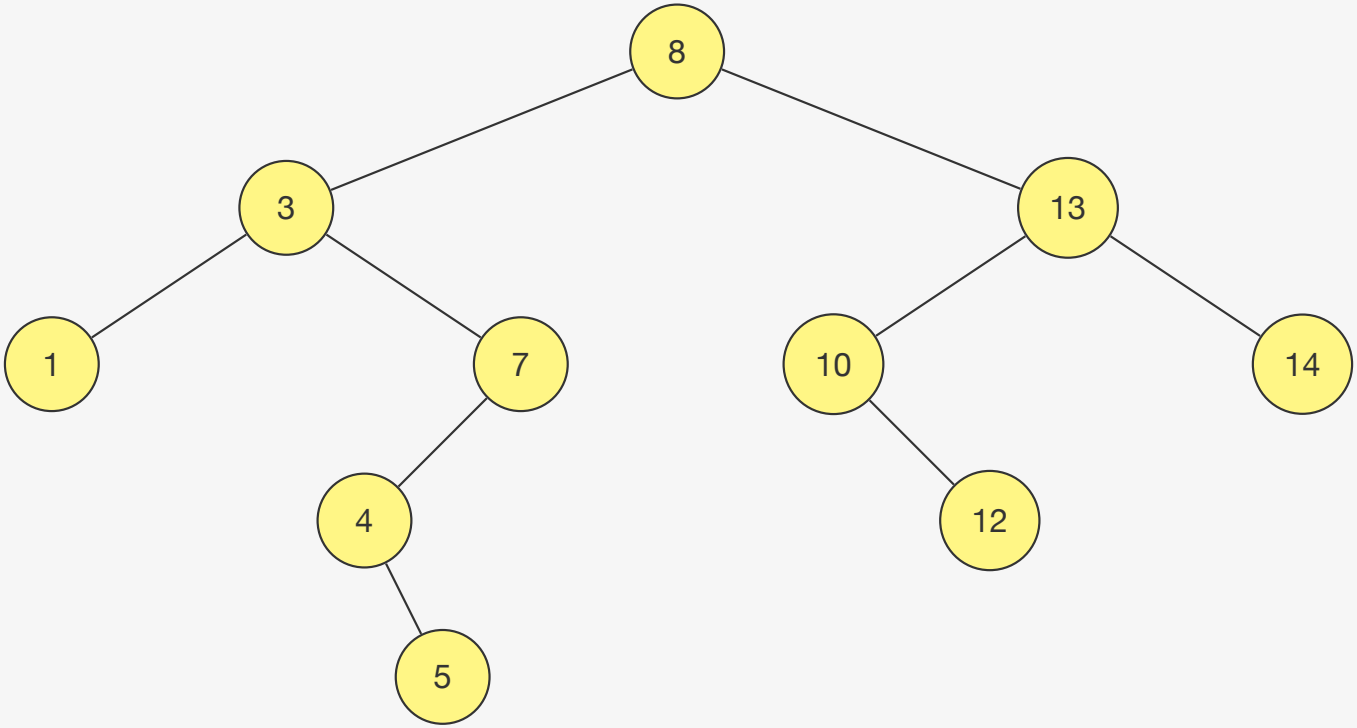


Quem é o sucessor de 3?

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação



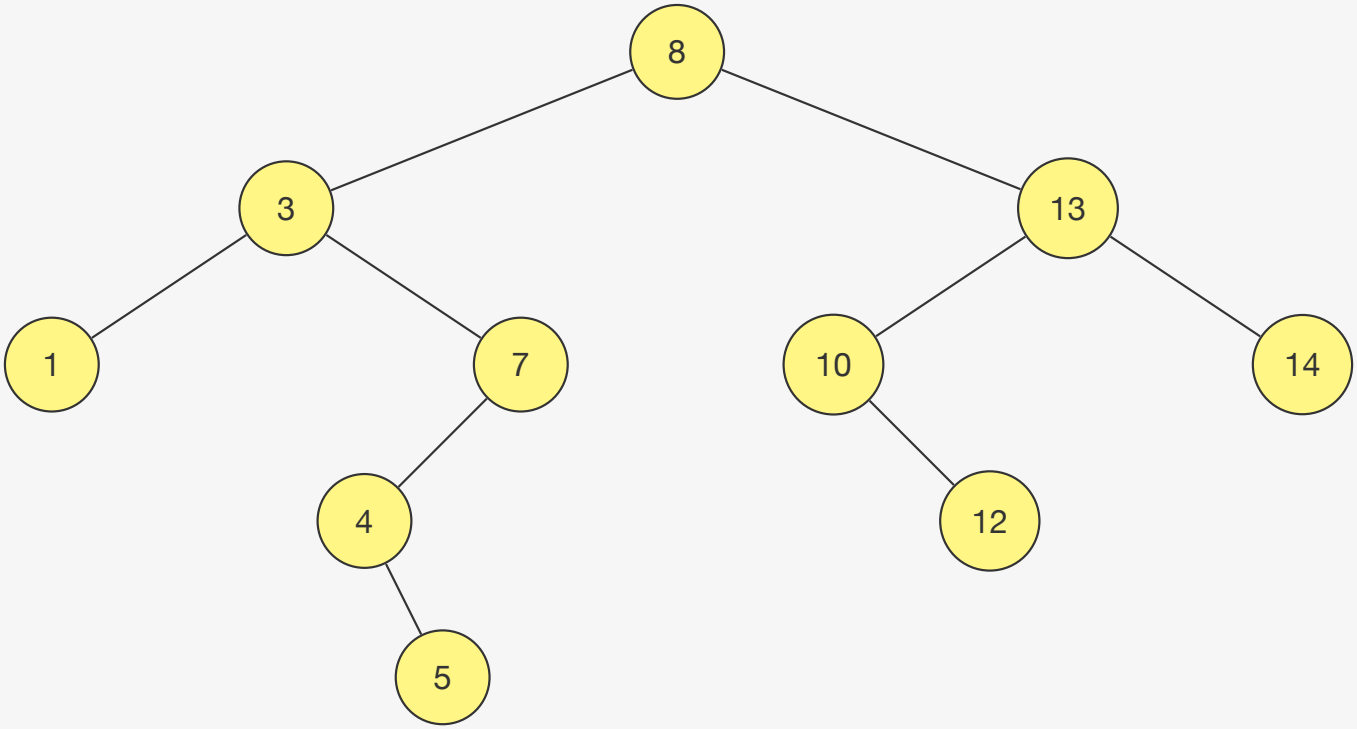
Quem é o sucessor de 3?

- É o mínimo da sua subárvore direita de 3

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

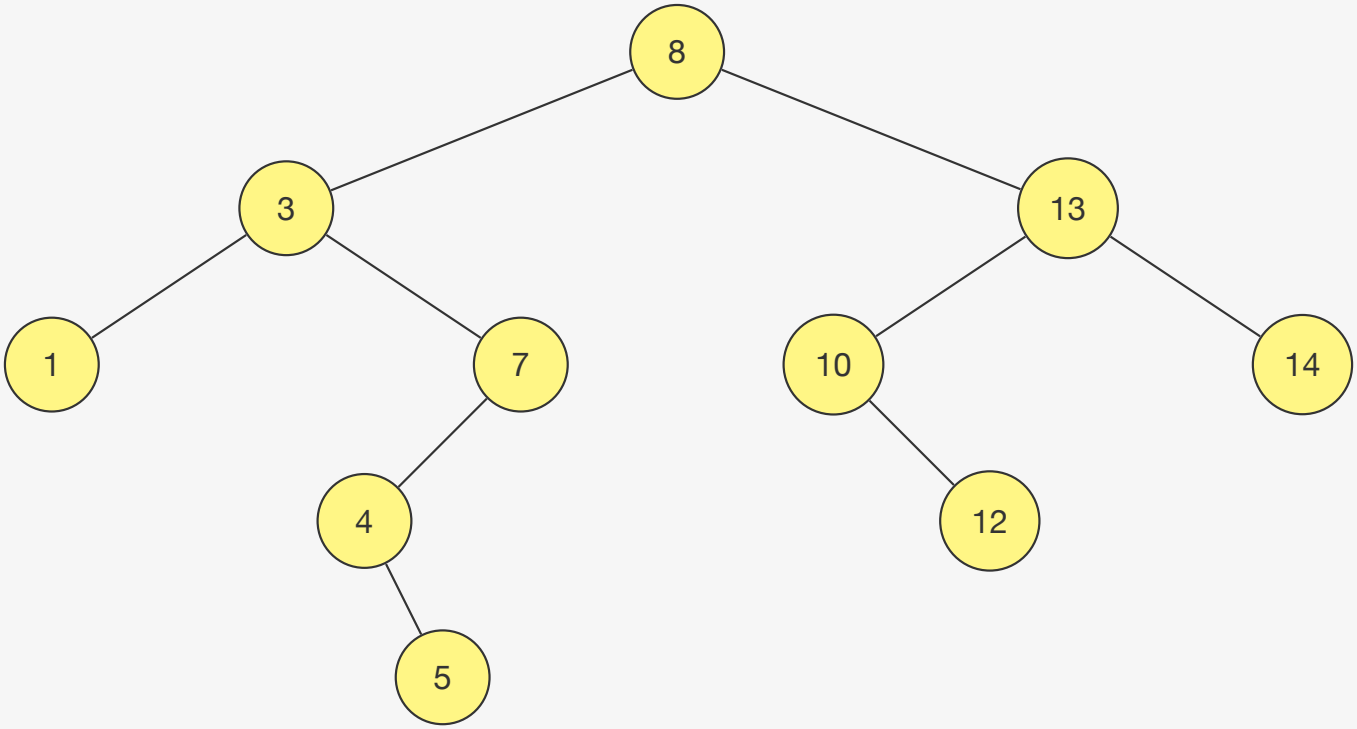
- O sucessor é o próximo nó na ordenação



Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação

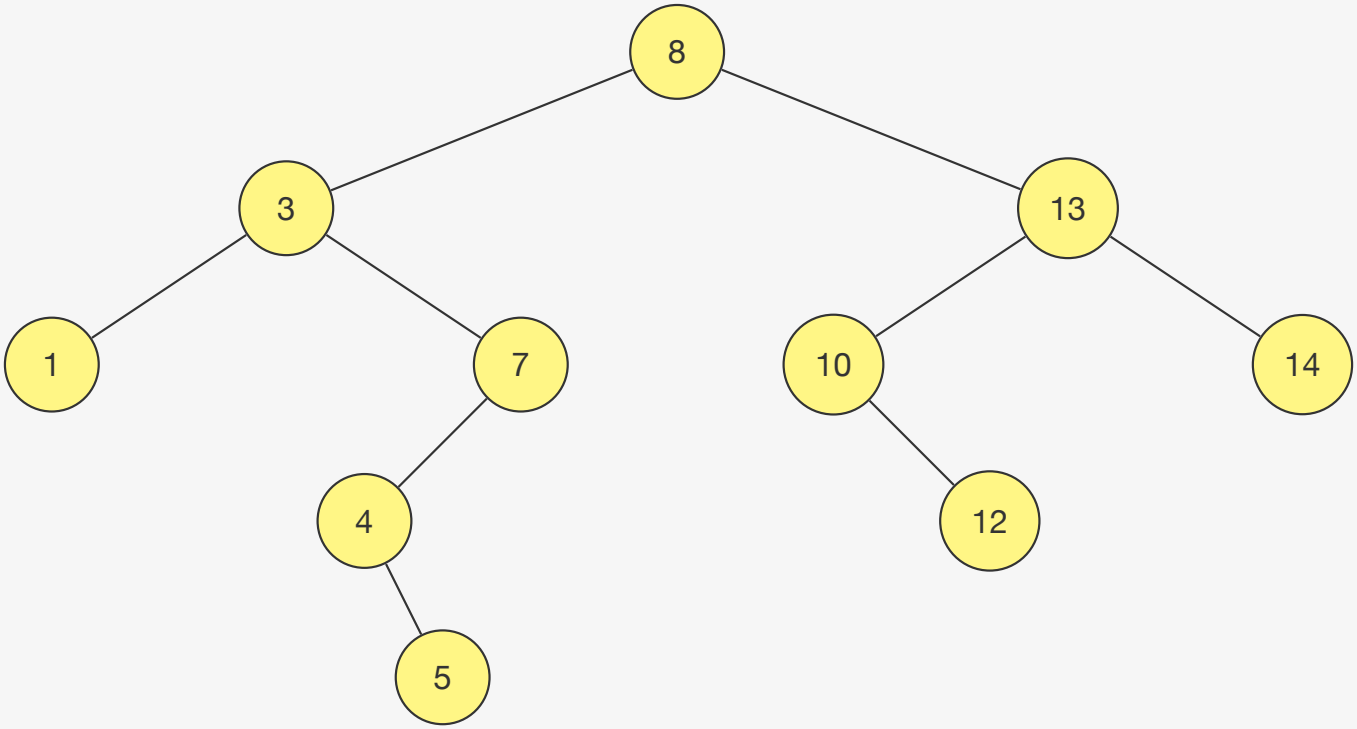


Quem é o sucessor de 7?

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação



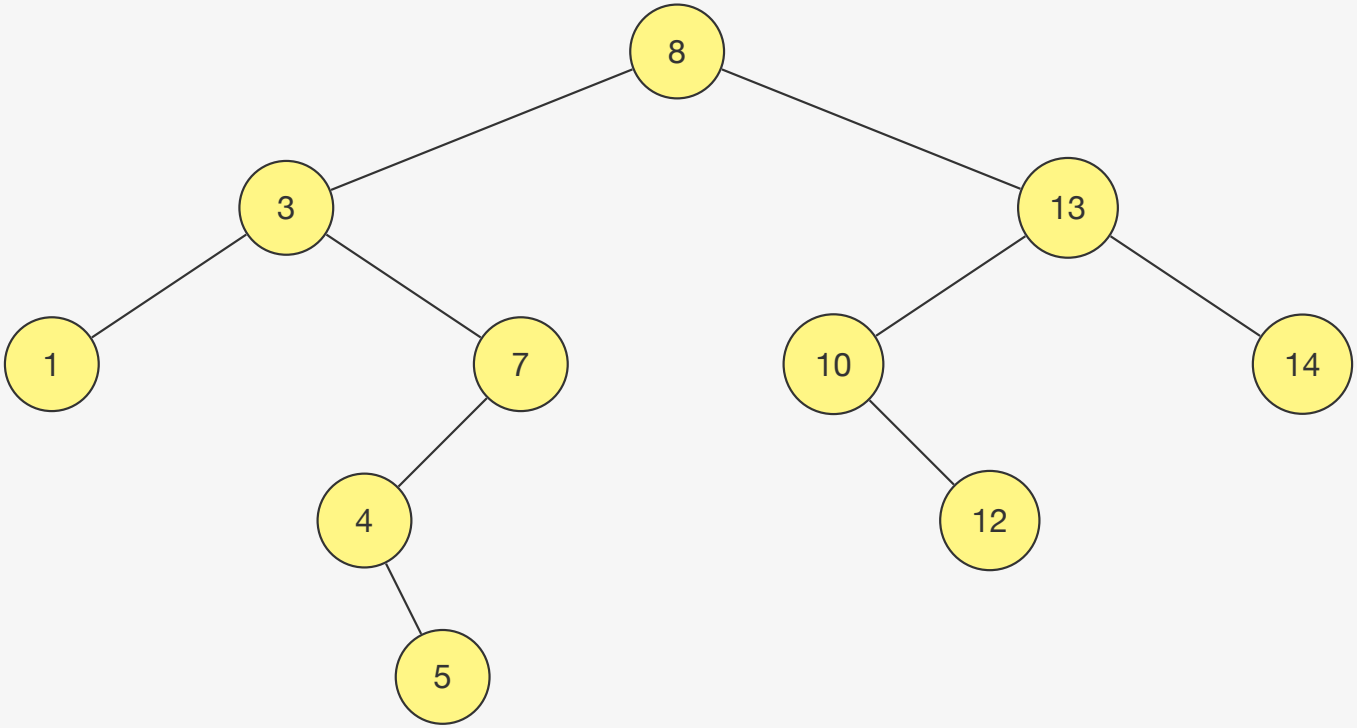
Quem é o sucessor de 7?

- É primeiro ancestral a direita

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

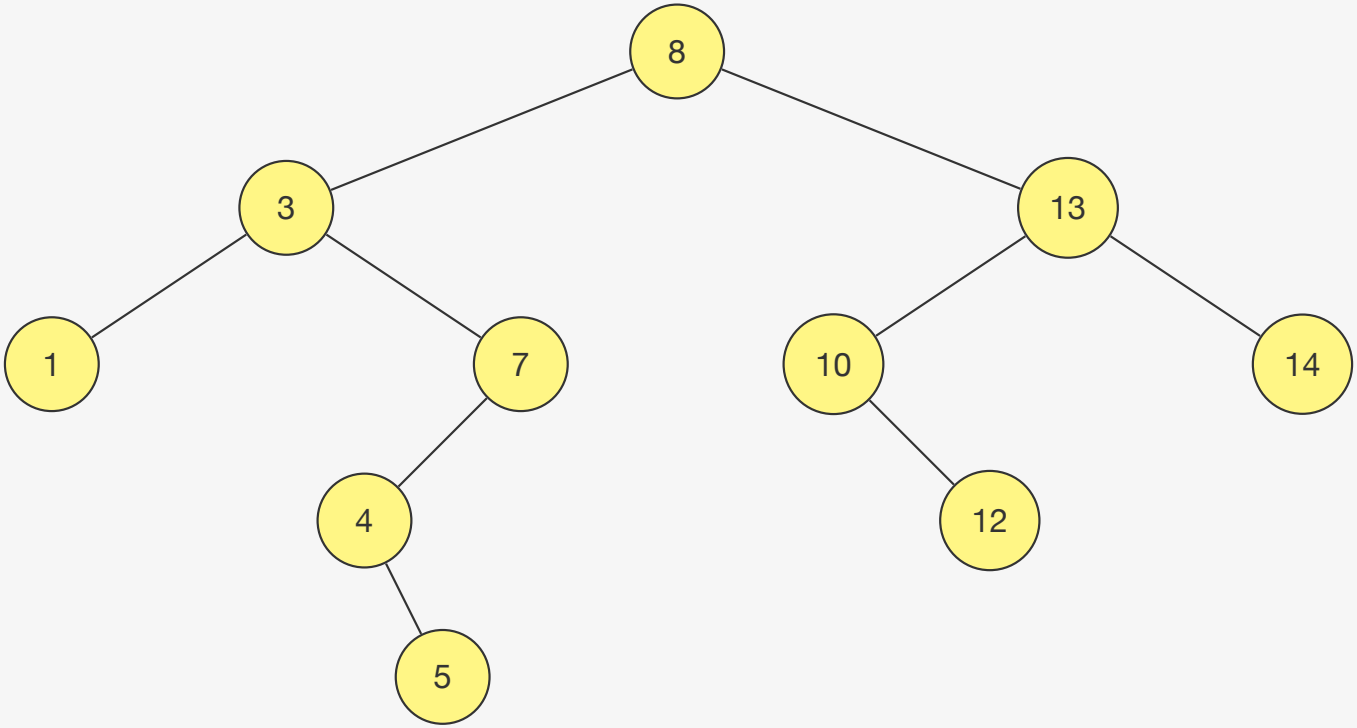
- O sucessor é o próximo nó na ordenação



Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação

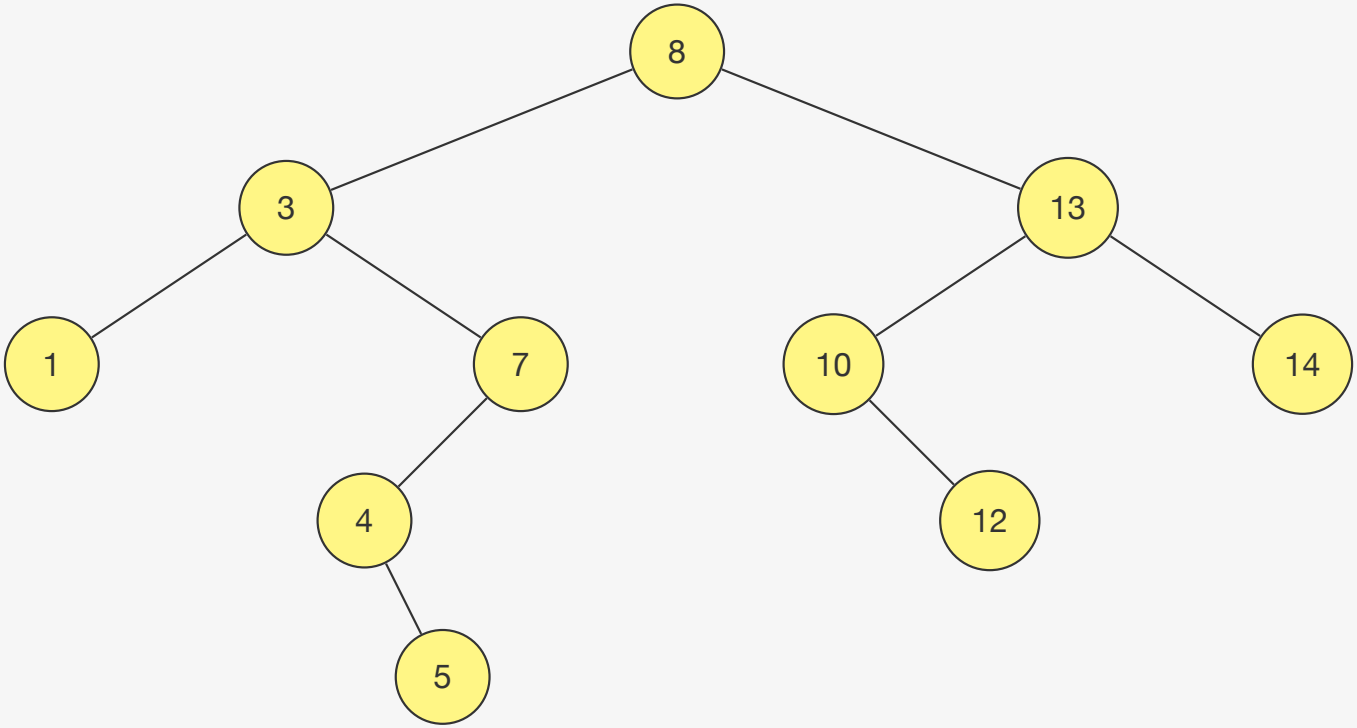


Quem é o sucessor de 14?

Sucessor

Dado um nó da árvore, onde está o seu sucessor?

- O sucessor é o próximo nó na ordenação



Quem é o sucessor de 14?

- não tem sucessor...

Sucessor - Implementação

```
1 p_no sucessor(p_no x) {
2   if (x->dir != NULL)
3     return minimo(x->dir);
4   else
5     return ancestral_a_direita(x);
6 }
```

Sucessor - Implementação

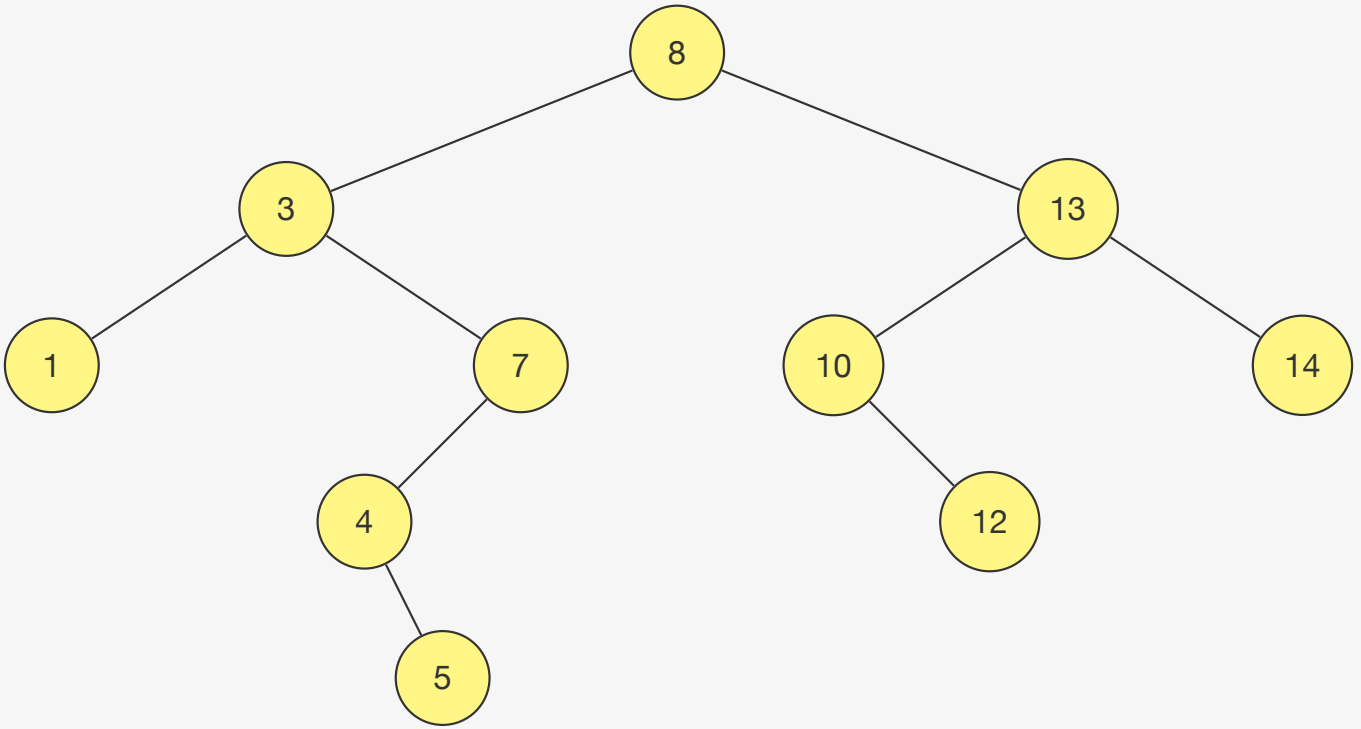
```
1 p_no sucessor(p_no x) {
2   if (x->dir != NULL)
3     return minimo(x->dir);
4   else
5     return ancestral_a_direita(x);
6 }
```

```
1 p_no ancestral_a_direita(p_no x) {
2   if (x == NULL)
3     return NULL;
4   if (x->pai == NULL || x->pai->esq == x)
5     return x->pai;
6   else
7     return ancestral_a_direita(x->pai);
8 }
```

A implementação da função `antecessor` é simétrica

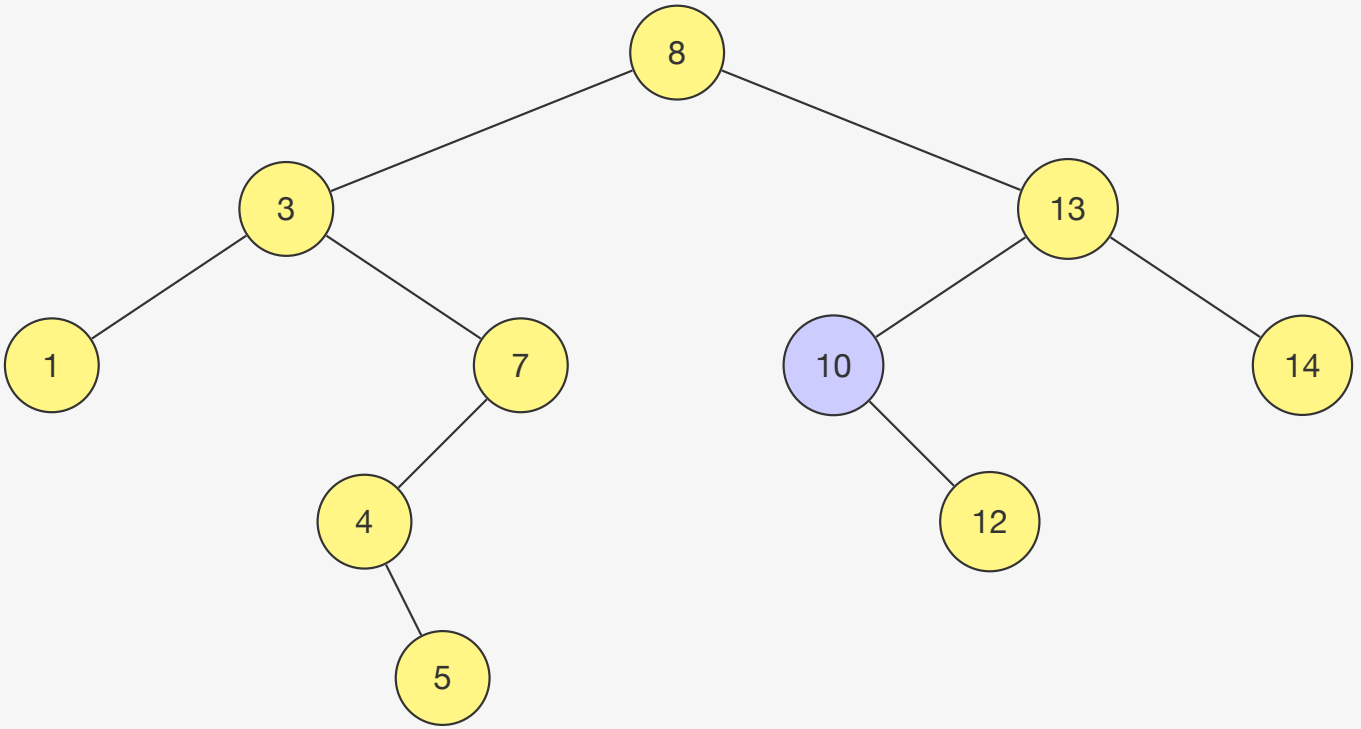
Remoção

Ex: removendo 10



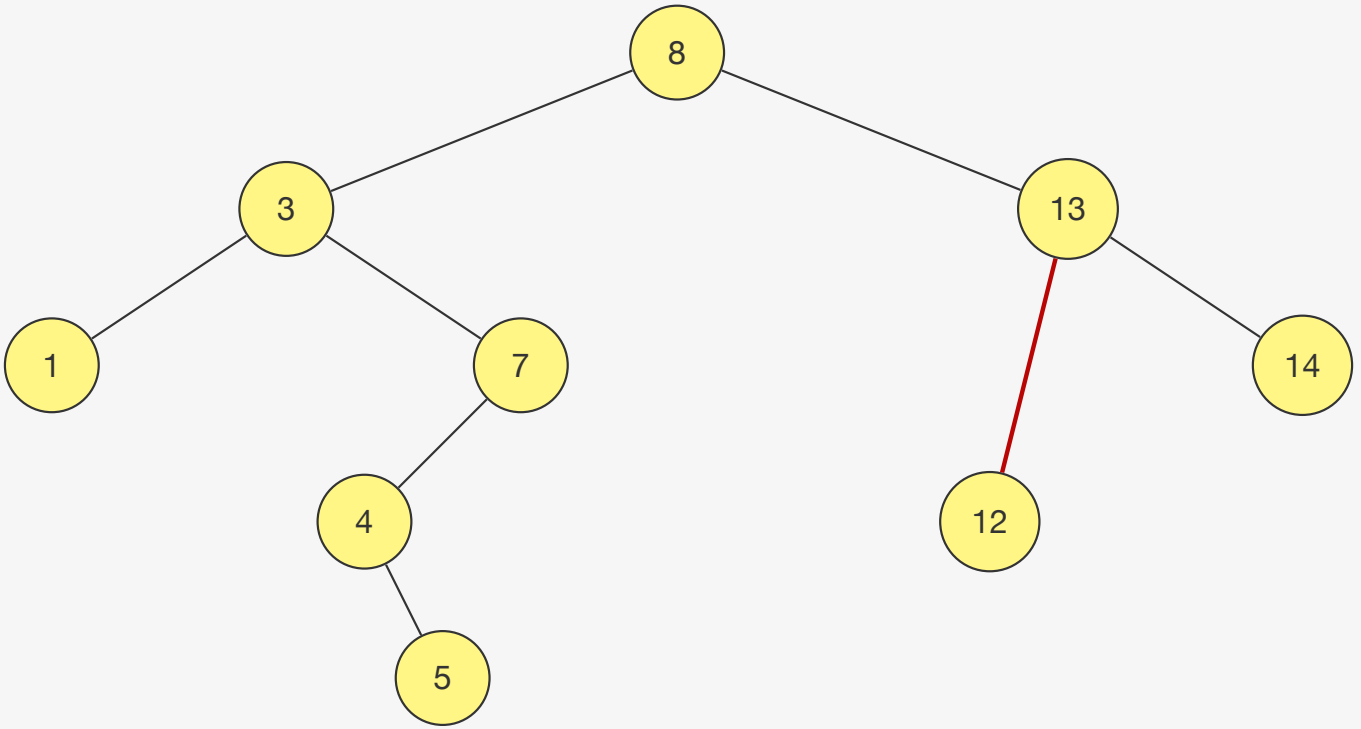
Remoção

Ex: removendo 10



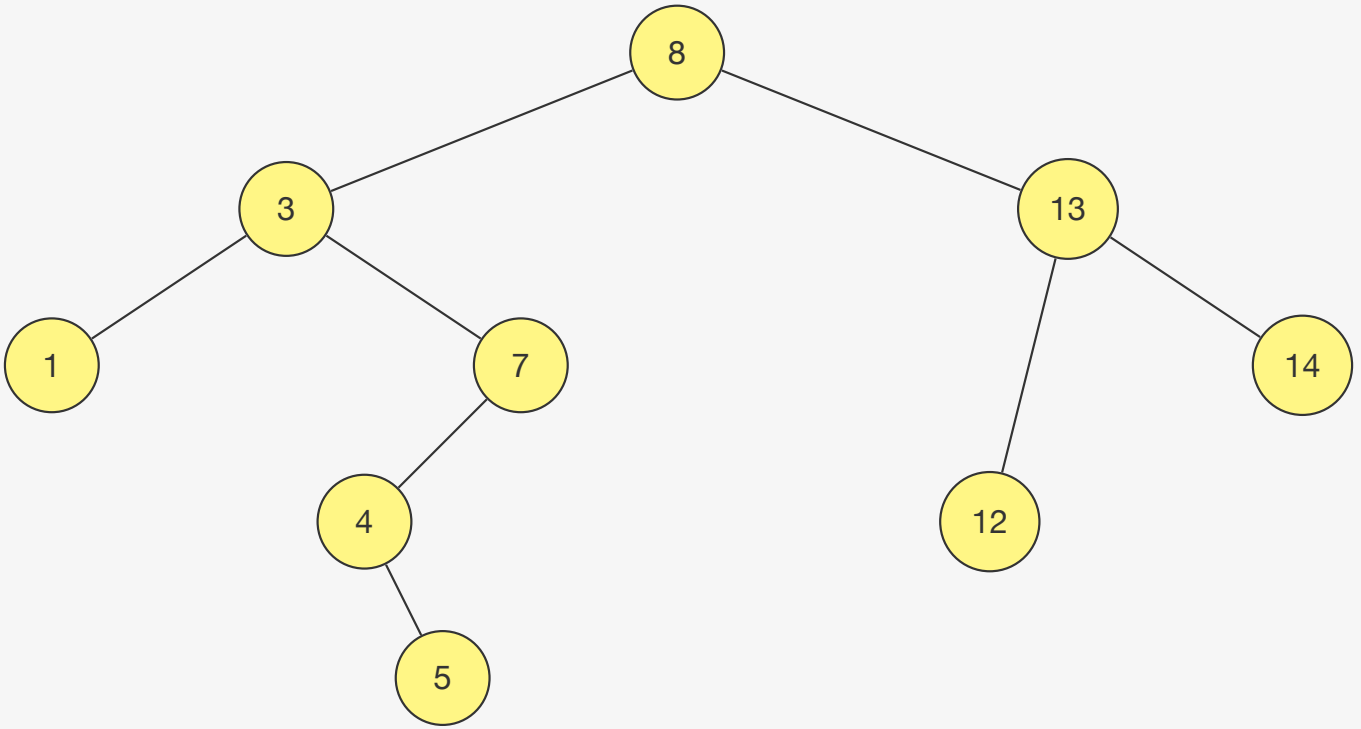
Remoção

Ex: removendo 10



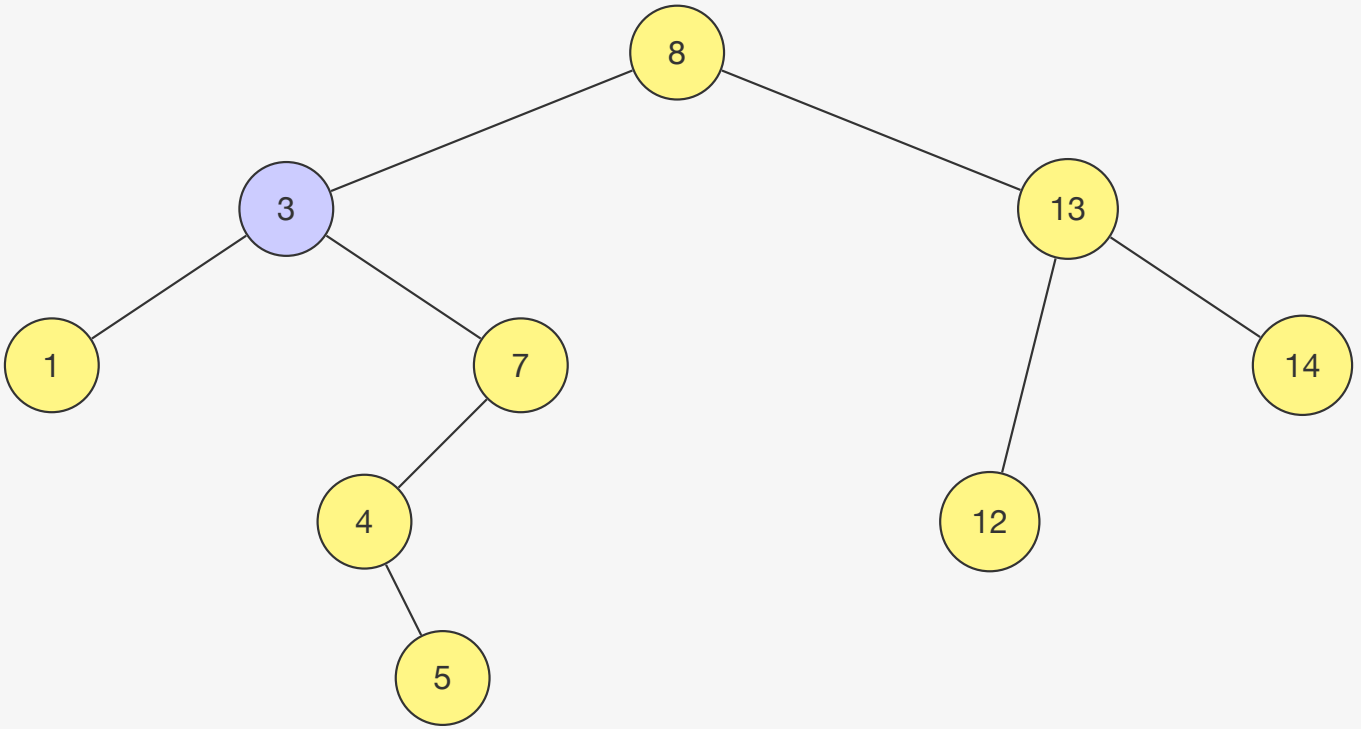
Remoção

Ex: removendo 3



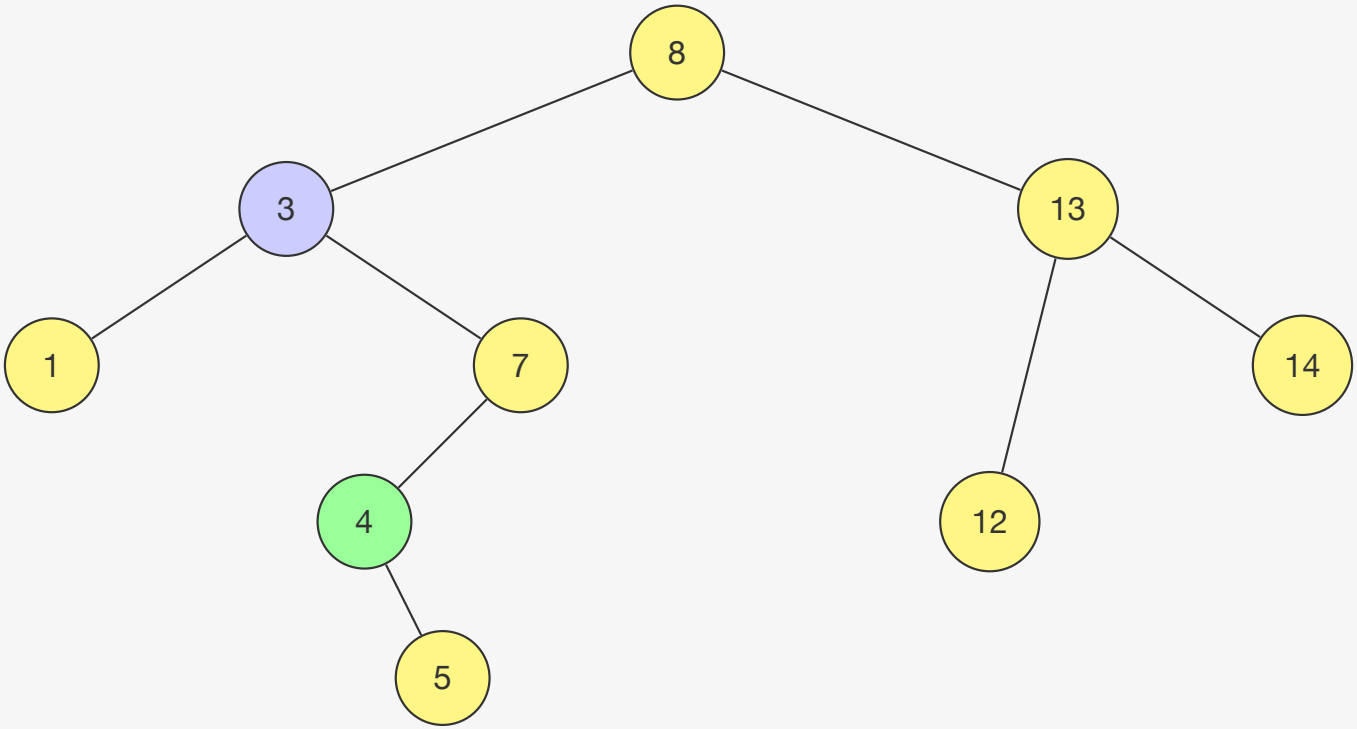
Remoção

Ex: removendo 3



Remoção

Ex: removendo 3

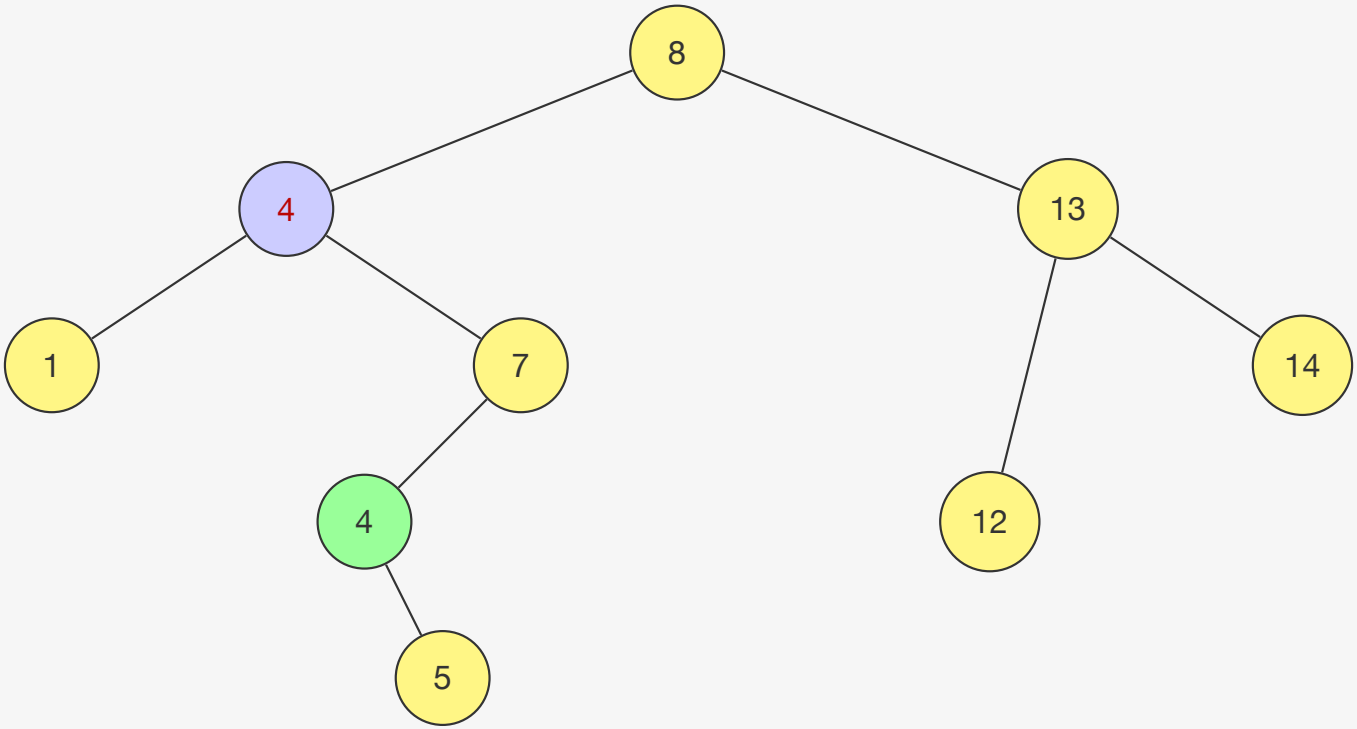


Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

Remoção

Ex: removendo 3

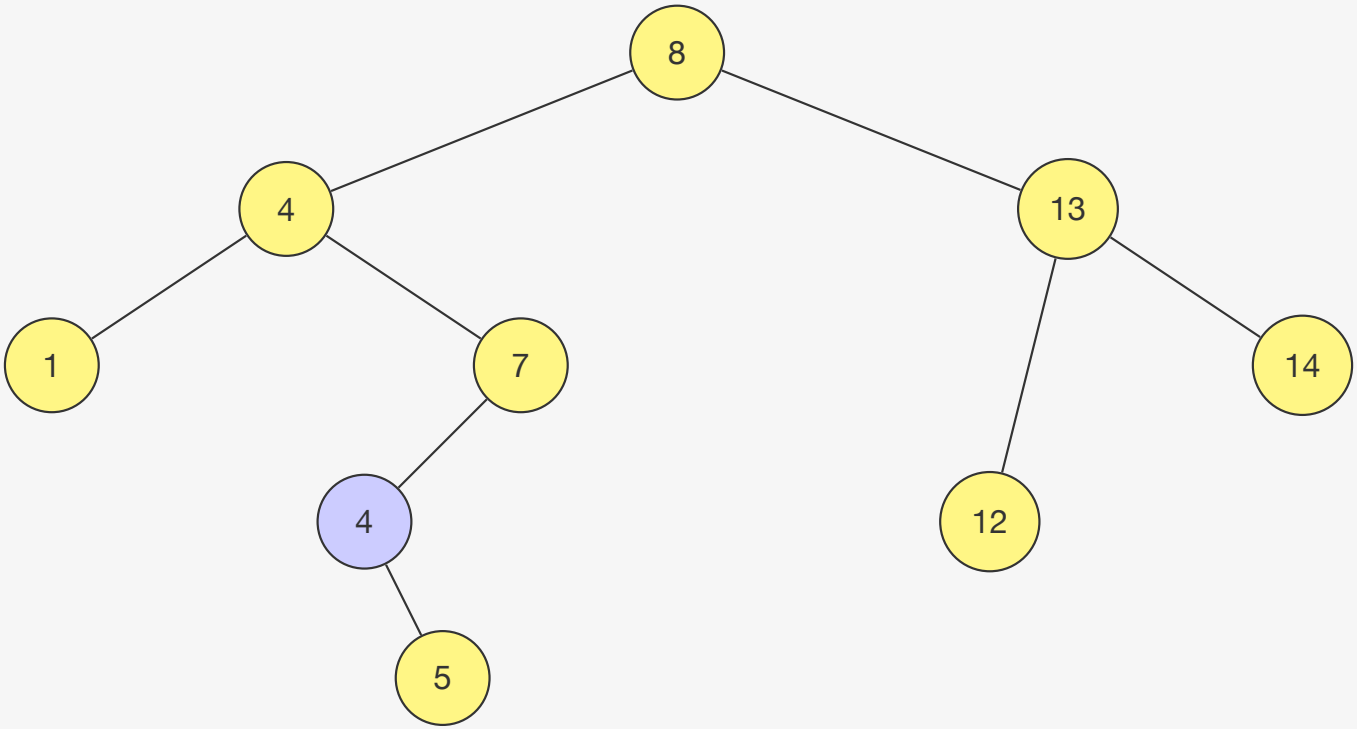


Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

Remoção

Ex: removendo 3



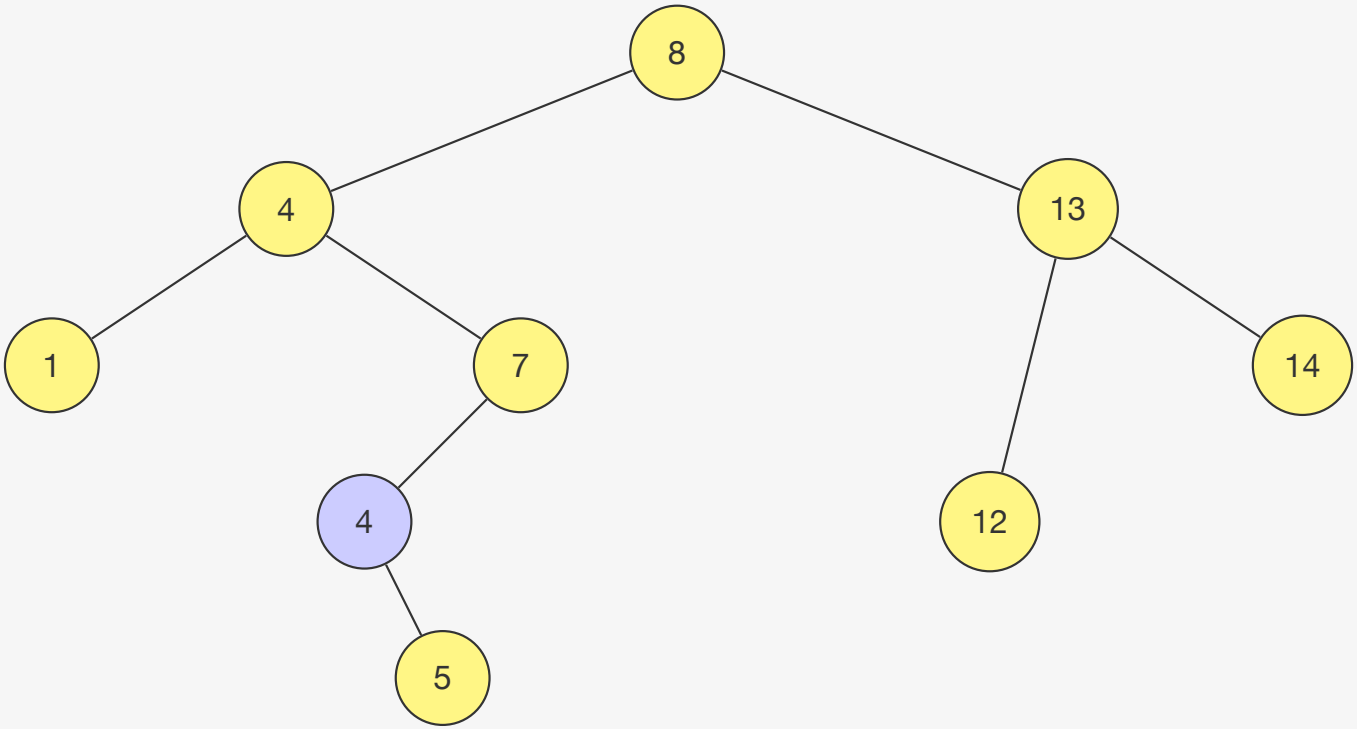
Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

E agora removemos o sucessor

Remoção

Ex: removendo 3



Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

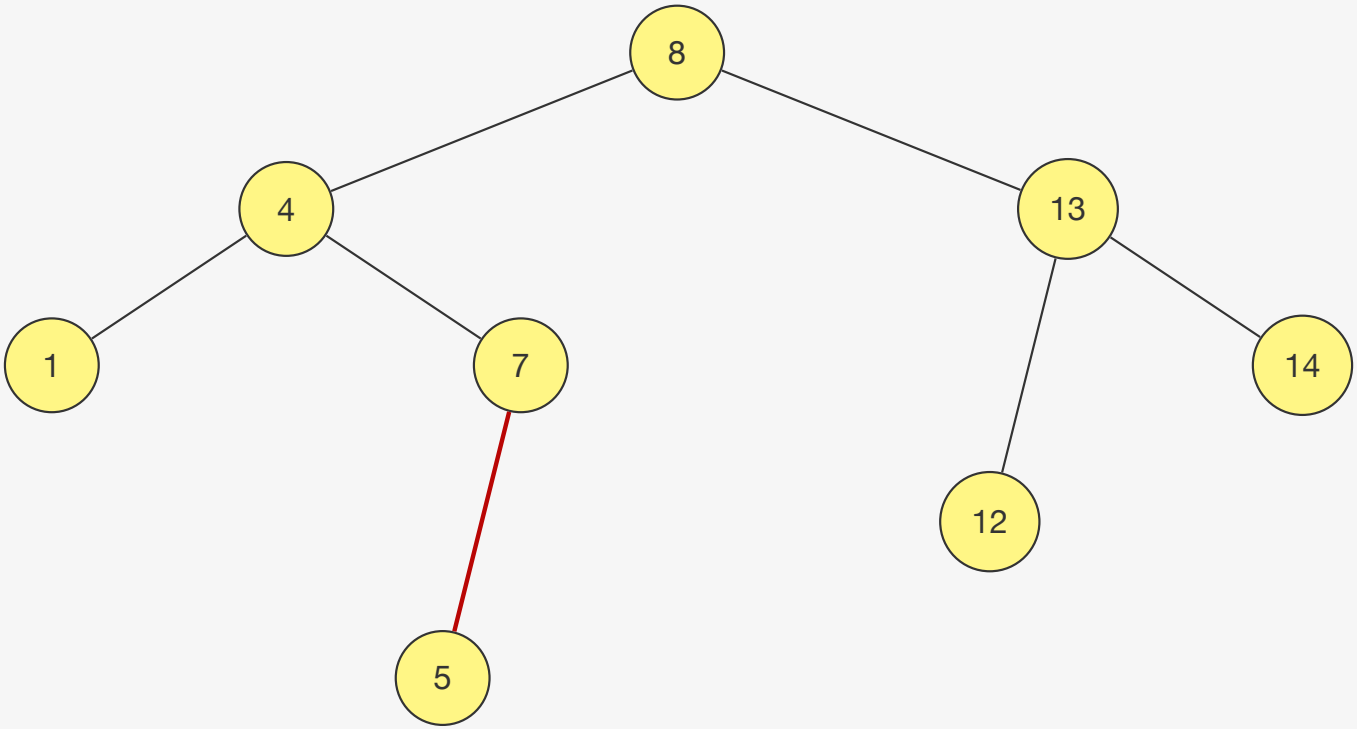
- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

E agora removemos o sucessor

- O sucessor nunca tem filho esquerdo!

Remoção

Ex: removendo 3



Podemos colocar o sucessor de 3 em seu lugar

- Isso mantém a propriedade da árvore binária de busca

E agora removemos o sucessor

- O sucessor nunca tem filho esquerdo!

Remoção - Implementação

Versão sem ponteiro para `pai` e que não libera o nó

```
1 p_no remover_rec(p_no raiz, int chave) {
```

Remoção - Implementação

Versão sem ponteiro para `pai` e que não libera o nó

```
1 p_no remover_rec(p_no raiz, int chave) {
2   if (raiz == NULL)
3     return NULL;
```

Remoção - Implementação

Versão sem ponteiro para `pai` e que não libera o nó

```
1 p_no remover_rec(p_no raiz, int chave) {
2   if (raiz == NULL)
3     return NULL;
4   if (chave < raiz->chave)
5     raiz->esq = remover_rec(raiz->esq, chave);
6   else if (chave > raiz->chave)
7     raiz->dir = remover_rec(raiz->dir, chave);
8   else if (raiz->esq == NULL)
9     return raiz->dir;
```

Remoção - Implementação

Versão sem ponteiro para `pai` e que não libera o nó

```
1  p_no remover_rec(p_no raiz, int chave) {
2    if (raiz == NULL)
3      return NULL;
4    if (chave < raiz->chave)
5      raiz->esq = remover_rec(raiz->esq, chave);
6    else if (chave > raiz->chave)
7      raiz->dir = remover_rec(raiz->dir, chave);
8    else if (raiz->esq == NULL)
9      return raiz->dir;
10   else if (raiz->dir == NULL)
11     return raiz->esq;
```

Remoção - Implementação

Versão sem ponteiro para `pai` e que não libera o nó

```
1  p_no remover_rec(p_no raiz, int chave) {
2    if (raiz == NULL)
3      return NULL;
4    if (chave < raiz->chave)
5      raiz->esq = remover_rec(raiz->esq, chave);
6    else if (chave > raiz->chave)
7      raiz->dir = remover_rec(raiz->dir, chave);
8    else if (raiz->esq == NULL)
9      return raiz->dir;
10   else if (raiz->dir == NULL)
11     return raiz->esq;
12   else
13     remover_sucessor(raiz);
14   return raiz;
15 }
```

Remoção - Implementação

```
1 void remover_sucessor(p_no raiz) {
```

Remoção - Implementação

```
1 void remover_sucessor(p_no raiz) {
2   p_no t = raiz->dir;/*será o mínimo da subárvore direita*/
3   p_no pai = raiz,/*será o pai de t*/
4   while (t->esq != NULL) {
5     pai = t;
6     t = t->esq;
7   }
```

Remoção - Implementação

```
1 void remover_sucessor(p_no raiz) {
2   p_no t = raiz->dir;/*será o mínimo da subárvore direita*/
3   p_no pai = raiz,/*será o pai de t*/
4   while (t->esq != NULL) {
5     pai = t;
6     t = t->esq;
7   }
8   if (pai->esq == t)
9     pai->esq = t->dir;
```

Remoção - Implementação

```
1  void remover_sucessor(p_no raiz) {
2    p_no t = raiz->dir;/*será o mínimo da subárvore direita*/
3    p_no pai = raiz,/*será o pai de t*/
4    while (t->esq != NULL) {
5      pai = t;
6      t = t->esq;
7    }
8    if (pai->esq == t)
9      pai->esq = t->dir;
10   else
11     pai->dir = t->dir;
12   raiz->chave = t->chave;
13 }
```

Exercício

Faça uma função que imprime as chaves de uma ABB em ordem crescente

Exercício

Faça uma implementação da função `sucessor` que não usa o ponteiro `pai`

- Dica: você precisará da raiz da árvore pois não pode subir