MO829
Tópicos em Teoria da Computação
Teoria dos Jogos Algorítmica

Rafael C. S. Schouery
schouery@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

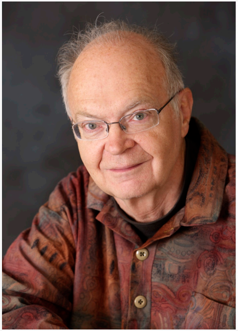
2º semestre/2014

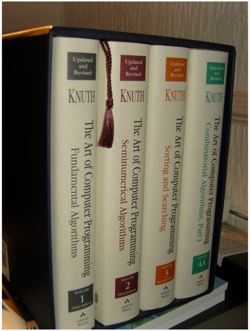
Complexidade computacional para TJA

Recap. de complexidade computacional

No fim de 1960

- Já era popular a análise formal de algoritmos
- Popularizado pelo trabalho de Don Knuth (The Art of Computer Programming, 68, 69, 73)





Recap. de complexidade computacional

Mas alguns cientistas estavam intrigados:

- Vários problemas podiam ser resolvidos rapidamente: ordenação, caminho mínimo, etc
- Mas havia outros problemas para os quais não se conhecia algoritmos rápidos

Algoritmo rápido, ou eficiente:

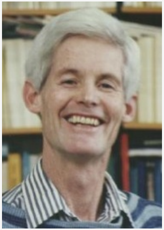
- com complexidade de tempo $O(n^k)$ para alguma constante k (polinomial)

Um algoritmo $O(n^{100})$ não é necessariamente rápido na prática

Recap. de complexidade computacional

Será que poderemos achar algoritmos rápidos para vários problemas práticos que pertencem a uma classe especial chamada NP?

- Cook em 1971 e Levin em 1973 (independentemente) nos deram uma pista

Recap. de complexidade computacional

Cook em 1971 mostrou:

- Todos os problemas da classe NP podem ser reduzidos em tempo polinomial para o problema de Satifatibilidade Booleana (SAT)
- Ou seja, se tivermos um algoritmo polinomial para o SAT teremos um algoritmo polinomial para todos os problemas em NP
- Este é o primeiro problema NP-Completo

Recap. de complexidade computacional

Em 1972 Richard Karp mostrou como reduzir em tempo polinomial o SAT para outros 21 problemas importantes

Até hoje ninguém conseguiu encontrar um algoritmo polinomial para qualquer um dos problemas em NP-Completo

Conjectura: $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$?

Recap. de complexidade computacional

Muitas vezes problemas NP-completos são casos particulares ou podem ser reduzidos facilmente para outros de carater mais prático, conhecidos como NP-difíceis

Exemplos:

- Problema do Caixeiro Viajante
- Escalonamento de Funcionários em Turnos de Trabalho
- Escalonamento de Tarefas em Computadores
- Vários e vários outros problemas práticos...

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

- um com m estratégias, outro com n
- $2mn$ números são necessários para representar tal jogo

Jogo com n jogadores, cada um com s estratégias:

- ns^n números são necessários para representar tal jogo

A própria representação de um jogo é exponencial

- É fácil criar algoritmos polinomiais em ns^n
- Mas ainda podem ser exponenciais em n

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem
- Não poluir custa 3
- Cada país paga 1 por cada país poluente

Podemos representar esse jogo utilizando $n2^n$ números

Ou então, representar de maneira sucinta:

- O custo de um jogador depende de quantos jogadores poluem
- Ao invés de depender de quais jogadores poluem
- Podemos representar esse jogo com $n + 1$ números

Jogos com representações sucintas

- Jogos esparsos
  - Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos gráficos
  - A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
  - ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos simétricos
  - Todos os jogadores são idênticos
  - A utilidade depende de quantos (ao invés de quais) jogadores jogam cada uma das estratégias
  - Podemos representar com $s\binom{n+s-1}{s-1}$ números
- Jogos anônimos
  - Os jogadores não distinguem os outros jogadores
  - Podemos representar com $ns\binom{n+s-1}{s-1}$ números
- Entre outros...

Estrutura de um equilíbrio misto

Suporte de um vetor: conjunto dos índices das entradas não nulas

- Ex: $(0, -1, 0, 2)$ tem como suporte $\{2, 4\}$

Teorema: Uma estratégia mista é uma resposta ótima se e somente todas as estratégias puras no seu suporte são respostas ótimas

Prova: Note que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_i(\sigma)] &= \sum_{s \in S} \sigma(s) u_i(s) = \sum_{s_i \in S_i} \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma(s) u_i(s) \\ &= \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i) \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma(s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i) \mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]\end{aligned}$$

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}, então todo $s_{i'}$ no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}:

- Caso contrário, poderíamos:
  - zerar $\sigma(s_{i'})$ e
  - para uma resposta pura ótima s_{i^*} para σ_{-i}, poderíamos aumentar $\sigma(s_{i^*})$ (em $\sigma(s_{i'})$)
  - Com isso, aumentaríamos a utilidade

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se todo $s_{i'}$ no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}, então σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

- Se $s_{i'}$ e s_{i^*} são ambas respostas ótimas para σ_{-i}, então $\mathbb{E}[u_i(s_{i'}, \sigma_{-i})] = \mathbb{E}[u_i(s_{i^*}, \sigma_{-i})]$
- Todo termo não nulo de $\sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$ tem o mesmo valor e é igual a $\sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_{i'}, \sigma_{-i})]$
- Assim, $\sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})] = \mathbb{E}[u_i(s_{i'}, \sigma_{-i})]$

Jogos de soma zero

Em um jogo de soma zero com n jogadores, para qualquer resultado $s \in S$ temos que

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(s) = 0$$

Trata-se de um conceito muito comum em economia

Exemplos: Par-ou-Ímpar, Pedra-Papel-Tesoura, Xadrez, Poker, etc...

Jogos de soma zero com dois jogadores

Basta dar uma matriz, pois o ganho do jogador 1 é o custo do jogador 2 e vice-versa

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash

- m: número de estratégias do jogador 1
- n: número de estratégias do jogador 2

Pelo Teorema de Nash, sempre existe um equilíbrio

Como podemos resolver esse problema?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash.

O que é um equilíbrio?

São duas distribuições de probabilidade, ou seja, vetores p, com m entradas, e q, com n entradas,

- $\sum_i p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$
- $\sum_j q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$

tais que um é uma resposta ótima para o outro...

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q, qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Considere que $A_{m\times n}$ é a matriz de utilidade do jogador 1

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q, qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

$$v := \sum_{ij} a_{ij} p_i q_j \;=\; \sum_i p_i \sum_j a_{ij} q_j = \sum_j q_j \sum_i a_{ij} p_i$$

Vimos que, se p é uma resposta ótima para q, então para toda estratégia i' no suporte de p temos que $\sum_j a_{i'j} q_j = v$

E se q é uma resposta ótima para p, então para toda estratégia pura j' no suporte de q temos que $\sum_i a_{ij'} p_i = v$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p que

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{maximize} & v & & & \\
\text{sujeito a} & \sum_i p_i & = & 1 & \\
 & \sum_i a_{ij} p_i & \geq & v & \text{para } j = 1, \ldots, n \\
 & p_i & \geq & 0 & \text{para } i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

E o Jogador 2 quer encontrar q que

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{minimize} & w & & & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_j q_j & = & 1 & \\
& \displaystyle\sum_j a_{ij} q_j & \leq & w & \text{para } i = 1, \ldots, m \\
& q_j & \geq & 0 & \text{para } j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Estes são programas lineares, e um é o dual do outro!

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A: matriz do $\mathbb{Q}^{n\times m}$
- c: vetor do $\mathbb{Q}^{n}$
- b: vetor do $\mathbb{Q}^{m}$

Programa primal:

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{minimize} & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & & & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i & \geq & b_j & \text{para } j = 1, \ldots, m \\
 & x_i & \geq & 0 & \text{para } i = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A: matriz do $\mathbb{Q}^{n\times m}$
- c: vetor do $\mathbb{Q}^n$
- b: vetor do $\mathbb{Q}^m$

Programa dual:

$$\begin{array}{llcll} \text{maximize} & \sum_{i=1}^{n} b_j y_j & & & \\ \text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j & \leq & c_i & \text{para } i = 1, \ldots, n \\ & y_j & \geq & 0 & \text{para } j = 1, \ldots, m \end{array}$$

Primeiro LP em forma padrão

Jogador 1 quer encontrar p que

$$\begin{array}{lrcll} \text{maximize} & v & & & \\ \text{sujeito a} & \sum_i p_i & = & 1 & \\ & \sum_i a_{ij} p_i & \geq & v & \text{para } j = 1, \ldots, n \\ & p_i & \geq & 0 & \text{para } i = 1, \ldots, m \end{array}$$

Primeiro LP em forma padrão

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{minimize} & v^+ - v^- & & & \\
\text{sujeito a} & -\sum_i p_i & \geq & -1 & \\
 & \sum_i p_i & \geq & 1 & \\
 & -v^+ + v^- + \sum_i a_{ij} p_i & \geq & 0 & \text{para } j = 1, \ldots, n \\
 & p_i & \geq & 0 & \text{para } i = 1, \ldots, m \\
 & v^+ & \geq & 0 & \\
 & v^- & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Segundo LP em forma padrão

Jogador 2 quer encontrar q que

$$\begin{array}{lrcll} \text{minimize} & w & & & \\ \text{sujeito a} & \sum_j q_j & = & 1 & \\ & \sum_j a_{ij} q_j & \leq & w & \text{para } i = 1, \ldots, m \\ & q_j & \geq & 0 & \text{para } j = 1, \ldots, n \end{array}$$

Segundo LP em forma padrão

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{minimize} & w^+ - w^- & & & \\
\text{sujeito a} & -\sum_j q_j & \geq & -1 & \\
& \sum_j q_j & \geq & 1 & \\
& -w^+ + w^- + \sum_j a_{ij} q_j & \leq & 0 & \text{para } j = 1, \ldots, n \\
& q_j & \geq & 0 & \text{para } j = 1, \ldots, n \\
& w^+ & \geq & 0 & \\
& w^- & \geq & 0 &
\end{array}
$$

Resultados de programação linear

Seja P um programa linear e D o seu programa dual

Para toda solução ótima x^* de P, existe uma solução ótima y^* de D tal que:

- Se $x_i^* > 0$, então $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = c_i$
- Se $y_j^* > 0$, então $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b_j$
- $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \sum_{i=1}^{n} b_j y_j$

Conclusão

Para toda solução ótima (p^*, v^*) do programa linear do jogador 1 existe uma solução ótima (q^*, w^*) do programa linear do jogador 2 tal que

- Se $q_j^* > 0$ então $\sum_i a_{ij} p_i^* = v^*$
- Se $p_i^* > 0$ então $\sum_j a_{ij} q_j^* = w^*$
- $v^* = w^*$

Tal par de soluções é um equilíbrio misto já que ambos os jogadores não podem melhorar

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$ encontrar um equilíbrio misto

Conclusão: Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial (usando programação linear)

E para jogos mais gerais?

Encontrado equilíbrios mistos

O Teorema de Nash garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito

- Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:
``If your laptop cannot find it, neither can the market.''

Problema: Dado um jogo em forma padrão, encontrar um equilíbrio de Nash

- Podemos resolver esse problema eficientemente?
- Qual é a sua complexidade?
- A versão de decisão (existe equilíbrio de Nash?) é trivial...

Discussão

Nash descreveu um jogo de Poker com três jogadores, com utilidades inteiras, e único equilíbrio envolvendo números irracionais

Porém, podemos resolver NASH encontrando o suporte certo das estratégias mistas de cada jogador

Dados os suportes, é possível utilizar um sistema de equações polinomiais para encontrar o equilíbrio

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é PPAD-Completo:

- A classe PPAD é composta por problemas que a existência de uma solução é garantida
  - Porém o espaço de busca é exponencial (apesar de bem estruturado)
- A classe PPAD é um subconjunto da classe NP
  - Ou seja, se $\text{P} = \text{NP}$ então $\text{PPAD} = \text{P}$
  - Porém, pode ser que $\text{PPAD} = \text{P}$ e $\text{P} \neq \text{NP}$
- Apesar de ser um conceito ``mais fraco'', vários problemas interessantes estão em PPAD

Os seguintes problemas são NP-completos

Dado um jogo de duas pessoas na forma matricial, decidir se este jogo tem:

- pelo menos dois equilíbrios de Nash
- dado k, um equilíbrio de Nash para o jogador 1 com utilidade pelo menos k
- dado k, um equilíbrio de Nash onde a soma das utilidades dos jogadores é pelo menos k
- dado k, um equilíbrio de Nash com pelo menos k estratégias no seu suporte
- dado s, um equilíbrio de Nash com s no suporte
- dado s, um equilíbrio de Nash sem s no suporte