Tópicos em Teoria da Computação - MC918B/MO829B
Teoria dos Jogos Algorítmica - 2º Semestre 2014

Instituto de Computação - UNICAMP

Segunda Lista de Exercícios

Entregue os exercícios 1, 3, 4 e 5 na aula de 24/09/14

1. Considere um jogo de soma zero com dois jogadores, dado por uma matriz cujas entradas são todas distintas. Prove que existe no máximo um equilíbrio puro de Nash em tal jogo.

2. Apresente um algoritmo que encontra um equilíbrio misto de Nash para qualquer jogo de dois jogadores dado por uma matriz (não necessariamente um jogo de soma zero). Seu algoritmo pode consumir tempo exponencial no número de estratégias dos jogadores.

3. Suponha que duas empresas têm uma vaga cada uma para empregar um trabalhador. As empresas oferecem salários diferentes: a empresa i oferece o salário w_i, e temos $\frac{1}{2}w_1 < w_2 < 2w_1$. Existem dois trabalhadores que podem se candidatar apenas a uma empresa. Os trabalhadores decidem simultaneamente se candidatar à empresa 1 ou 2. Se apenas um se candidatar à empresa, então obtém o emprego. Se ambos se candidatarem à mesma empresa, então a empresa escolhe um dos trabalhadores aleatoriamente e o outro fica desempregado (obtendo utilidade zero). Represente o jogo formalmente e calcule todos os equilíbrios de Nash.

4. Considere o seguinte leilão iterado: o leiloeiro deseja vender uma nota de R$ 100,00 e temos dois compradores interessados. O preço da nota começa em R$ 0,00. O leiloeiro escolhe uniformemente ao acaso qual dos compradores começa o leilão e os compradores se alternam em turnos.

No seu turno, o comprador pode dar um lance para aumentar o preço da nota em R$ 1,00 ou então desistir do leilão. Se o comprador desistir do leilão, ele paga o seu lance anterior (ou R$ 0,00 se ele ainda não deu nenhum lance). O vencedor recebe a nota e paga o lance atual. **O leilão só termina quando um comprador desistir.**

Por exemplo, se o primeiro comprador desistir no sétimo turno do jogo (o quarto turno do comprador 1) então o segundo comprador recebe a nota de R$ 100,00 e paga R$ 6,00 e o primeiro comprador paga R$ 5,00.

a) Formule o jogo de um jogador onde dado o lance atual dos dois compradores, o jogador escolhe entre dar o lance ou desistir.

b) Encontre a estratégia dominante do jogo acima.

c) Explique porque escolher a estratégia dominante do jogo acima a cada turno é desastroso para os jogadores a longo prazo.

5. Formule o seguinte jogo (inspirado no leilão do exercício anterior): Cada comprador decide um lance. O vencedor recebe a nota de R$ 100,00 e ambos os compradores pagam o seu lance. Em caso de empate, o leiloeiro sorteia uniformemente ao acaso um dos compradores para ser o vencedor.

a) Apresente os equilíbrios puros desse jogo.

b) Apresente um equilíbrio misto de Nash onde ambos os compradores dão probabilidade estritamente positiva para todos os lances ℓ tais que $0 \leq \ell < 100$.

6. Considere o jogo *Matching Pennies* (Exemplo 1.7 do AGT) e suponha que os jogadores repetem esse jogo infinitamente e ambos utilizam o seguinte método para atualizar as suas estratégias mistas depois de cada repetição do jogo:

1. No primeiro turno, cada jogador escolhe uma estratégia de forma arbitrária.

2. Depois de cada turno, cada jogador i acumula as estatísticas de quantas vezes o outro jogador escolheu cada uma das estratégias para supor uma "estratégia mista estatística".

   Se N é o número de caras observadas e M é o número de coroas observadas, o jogador i supõe que o outro jogador está usando a estratégia mista σ onde ele joga cara com probabilidade $N/(N+M)$ e coroa com probabilidade $M/(N+M)$. Portanto, σ é a estratégia mista estatística do outro jogador.

   Baseado nessa suposição, o jogador i joga uma melhor resposta pura para a estratégia σ. Em caso de empate nas estatísticas, o jogador i joga cara.

3. Os jogadores continuam o jogo infinitamente.

Mostre que, independentemente de como eles começaram o jogo, as estratégias mistas estatísticas de ambos os jogadores convergem para o único equilíbrio (misto) de Nash desse jogo.