MO758/MC758
Teoria dos Jogos Algorítmica

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2018

Complexidade computacional para TJA

Recap. de complexidade computacional

Recap. de complexidade computacional

No fim de 1960

Recap. de complexidade computacional

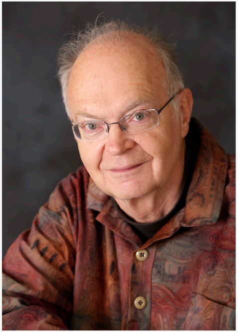
No fim de 1960

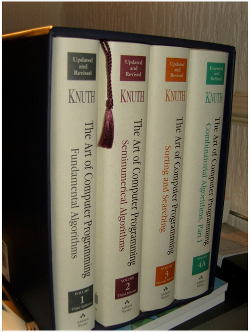
- Já era popular a análise formal de algoritmos

Recap. de complexidade computacional

No fim de 1960

- Já era popular a análise formal de algoritmos
- Popularizado pelo trabalho de Don Knuth (The Art of Computer Programming, 68, 69, 73)





Recap. de complexidade computacional

Mas alguns cientistas estavam intrigados:

Recap. de complexidade computacional

Mas alguns cientistas estavam intrigados:

- Vários problemas podiam ser resolvidos rapidamente: ordenação, caminho mínimo, etc

Recap. de complexidade computacional

Mas alguns cientistas estavam intrigados:

- Vários problemas podiam ser resolvidos rapidamente: ordenação, caminho mínimo, etc
- Mas havia outros problemas para os quais não se conhecia algoritmos rápidos

Recap. de complexidade computacional

Mas alguns cientistas estavam intrigados:

- Vários problemas podiam ser resolvidos rapidamente: ordenação, caminho mínimo, etc
- Mas havia outros problemas para os quais não se conhecia algoritmos rápidos

Algoritmo rápido, ou eficiente:

Recap. de complexidade computacional

Mas alguns cientistas estavam intrigados:

- Vários problemas podiam ser resolvidos rapidamente: ordenação, caminho mínimo, etc
- Mas havia outros problemas para os quais não se conhecia algoritmos rápidos

Algoritmo rápido, ou eficiente:

- com complexidade de tempo $O(n^k)$ para alguma constante k (polinomial)

Recap. de complexidade computacional

Mas alguns cientistas estavam intrigados:

- Vários problemas podiam ser resolvidos rapidamente: ordenação, caminho mínimo, etc
- Mas havia outros problemas para os quais não se conhecia algoritmos rápidos

Algoritmo rápido, ou eficiente:

- com complexidade de tempo $O(n^k)$ para alguma constante k (polinomial)

Um algoritmo $O(n^{100})$ pode não ser rápido na prática...

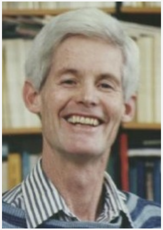
Recap. de complexidade computacional

Será que poderemos achar algoritmos rápidos para vários problemas práticos que pertencem a uma classe especial chamada NP?

Recap. de complexidade computacional

Será que poderemos achar algoritmos rápidos para vários problemas práticos que pertencem a uma classe especial chamada NP?

- Cook em 1971 e Levin em 1973 (independentemente) nos deram uma pista



Recap. de complexidade computacional

Cook em 1971 mostrou:

Recap. de complexidade computacional

Cook em 1971 mostrou:

- Todos os problemas da classe NP podem ser reduzidos em tempo polinomial para o problema de Satisfatibilidade Booleana (SAT)

Recap. de complexidade computacional

Cook em 1971 mostrou:

- Todos os problemas da classe NP podem ser reduzidos em tempo polinomial para o problema de Satisfatibilidade Booleana (SAT)
- Ou seja, se tivermos um algoritmo polinomial para o SAT teremos um algoritmo polinomial para todos os problemas em NP

Recap. de complexidade computacional

Cook em 1971 mostrou:

- Todos os problemas da classe NP podem ser reduzidos em tempo polinomial para o problema de Satisfatibilidade Booleana (SAT)
- Ou seja, se tivermos um algoritmo polinomial para o SAT teremos um algoritmo polinomial para todos os problemas em NP
- Este é o primeiro problema NP-Completo

Recap. de complexidade computacional

Em 1972 Richard Karp mostrou como reduzir em tempo polinomial o SAT para outros 21 problemas importantes

Recap. de complexidade computacional

Em 1972 Richard Karp mostrou como reduzir em tempo polinomial o SAT para outros 21 problemas importantes

Até hoje ninguém conseguiu encontrar um algoritmo polinomial para qualquer um dos problemas em NP-Completo

Recap. de complexidade computacional

Em 1972 Richard Karp mostrou como reduzir em tempo polinomial o SAT para outros 21 problemas importantes

Até hoje ninguém conseguiu encontrar um algoritmo polinomial para qualquer um dos problemas em NP-Completo

Conjectura: $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$?

Recap. de complexidade computacional

Muitas vezes problemas NP-completos são casos particulares ou podem ser reduzidos facilmente para outros de caráter mais prático, conhecidos como NP-difíceis

Recap. de complexidade computacional

Muitas vezes problemas NP-completos são casos particulares ou podem ser reduzidos facilmente para outros de caráter mais prático, conhecidos como NP-difíceis

Exemplos:

Recap. de complexidade computacional

Muitas vezes problemas NP-completos são casos particulares ou podem ser reduzidos facilmente para outros de caráter mais prático, conhecidos como NP-difíceis

Exemplos:

- Problema do Caixeiro Viajante

Recap. de complexidade computacional

Muitas vezes problemas NP-completos são casos particulares ou podem ser reduzidos facilmente para outros de caráter mais prático, conhecidos como NP-difíceis

Exemplos:

- Problema do Caixeiro Viajante
- Escalonamento de Funcionários em Turnos de Trabalho

Recap. de complexidade computacional

Muitas vezes problemas NP-completos são casos particulares ou podem ser reduzidos facilmente para outros de caráter mais prático, conhecidos como NP-difíceis

Exemplos:

- Problema do Caixeiro Viajante
- Escalonamento de Funcionários em Turnos de Trabalho
- Escalonamento de Tarefas em Computadores

Recap. de complexidade computacional

Muitas vezes problemas NP-completos são casos particulares ou podem ser reduzidos facilmente para outros de caráter mais prático, conhecidos como NP-difíceis

Exemplos:

- Problema do Caixeiro Viajante
- Escalonamento de Funcionários em Turnos de Trabalho
- Escalonamento de Tarefas em Computadores
- Vários e vários outros problemas práticos...

Representações sucintas de jogos

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

- um com m estratégias, outro com n

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

- um com m estratégias, outro com n
- $2mn$ números são necessários para representar tal jogo

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

- um com m estratégias, outro com n
- $2mn$ números são necessários para representar tal jogo

Jogo com n jogadores, cada um com s estratégias:

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

- um com m estratégias, outro com n
- $2mn$ números são necessários para representar tal jogo

Jogo com n jogadores, cada um com s estratégias:

- ns^n números são necessários para representar tal jogo

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

- um com m estratégias, outro com n
- $2mn$ números são necessários para representar tal jogo

Jogo com n jogadores, cada um com s estratégias:

- ns^n números são necessários para representar tal jogo

A própria representação de um jogo é exponencial

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

- um com m estratégias, outro com n
- $2mn$ números são necessários para representar tal jogo

Jogo com n jogadores, cada um com s estratégias:

- ns^n números são necessários para representar tal jogo

A própria representação de um jogo é exponencial

- É fácil criar algoritmos polinomiais em ns^n

Representações sucintas de jogos

Jogo de dois jogadores:

- um com m estratégias, outro com n
- $2mn$ números são necessários para representar tal jogo

Jogo com n jogadores, cada um com s estratégias:

- ns^n números são necessários para representar tal jogo

A própria representação de um jogo é exponencial

- É fácil criar algoritmos polinomiais em ns^n
- Mas ainda podem ser exponenciais em n

Relembrando o Jogo da Poluição

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem
- Não poluir custa 3

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem
- Não poluir custa 3
- Cada país paga 1 por cada país poluente

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem
- Não poluir custa 3
- Cada país paga 1 por cada país poluente

Podemos representar esse jogo utilizando $n2^n$ números

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem
- Não poluir custa 3
- Cada país paga 1 por cada país poluente

Podemos representar esse jogo utilizando $n2^n$ números

Ou então, representar de maneira sucinta:

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem
- Não poluir custa 3
- Cada país paga 1 por cada país poluente

Podemos representar esse jogo utilizando $n2^n$ números

Ou então, representar de maneira sucinta:

- Custo do jogador depende de quantos jogadores poluem

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem
- Não poluir custa 3
- Cada país paga 1 por cada país poluente

Podemos representar esse jogo utilizando $n2^n$ números

Ou então, representar de maneira sucinta:

- Custo do jogador depende de quantos jogadores poluem
- Ao invés de depender de quais jogadores poluem

Relembrando o Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem
- Não poluir custa 3
- Cada país paga 1 por cada país poluente

Podemos representar esse jogo utilizando $n2^n$ números

Ou então, representar de maneira sucinta:

- Custo do jogador depende de quantos jogadores poluem
- Ao invés de depender de quais jogadores poluem
- Podemos representar esse tipo de jogo com $2(n+1)$ números

Jogos com representações sucintas

Jogos com representações sucintas

- Jogos esparsos

Jogos com representações sucintas

- Jogos esparsos
  - Poucos dos ns^n números são diferentes de zero

Jogos com representações sucintas

- Jogos esparsos
  - Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos gráficos

Jogos com representações sucintas

- Jogos esparsos
  - Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos gráficos
  - A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores

Jogos com representações sucintas

- Jogos esparsos
  - Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos gráficos
  - A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
  - ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo

Jogos com representações sucintas

- Jogos esparsos
  - Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos gráficos
  - A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
  - ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos simétricos

Jogos com representações sucintas

- Jogos esparsos
  - Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos gráficos
  - A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
  - ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos simétricos
  - Todos os jogadores são idênticos

Jogos com representações sucintas

- Jogos esparsos
  - Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos gráficos
  - A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
  - ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos simétricos
  - Todos os jogadores são idênticos
  - A utilidade depende de quantos (ao invés de quais) jogadores jogam cada uma das estratégias

Jogos com representações sucintas

- Jogos esparsos
  - Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos gráficos
  - A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
  - ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos simétricos
  - Todos os jogadores são idênticos
  - A utilidade depende de quantos (ao invés de quais) jogadores jogam cada uma das estratégias
  - Podemos representar com $s\binom{n+s-1}{s-1}$ números

Jogos com representações sucintas

- Jogos esparsos
  - Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos gráficos
  - A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
  - ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos simétricos
  - Todos os jogadores são idênticos
  - A utilidade depende de quantos (ao invés de quais) jogadores jogam cada uma das estratégias
  - Podemos representar com $s\binom{n+s-1}{s-1}$ números
- Jogos anônimos

Jogos com representações sucintas

- Jogos esparsos
  - Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos gráficos
  - A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
  - ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos simétricos
  - Todos os jogadores são idênticos
  - A utilidade depende de quantos (ao invés de quais) jogadores jogam cada uma das estratégias
  - Podemos representar com $s\binom{n+s-1}{s-1}$ números
- Jogos anônimos
  - Os jogadores não distinguem os outros jogadores

Jogos com representações sucintas

- Jogos esparsos
  - Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos gráficos
  - A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
  - ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos simétricos
  - Todos os jogadores são idênticos
  - A utilidade depende de quantos (ao invés de quais) jogadores jogam cada uma das estratégias
  - Podemos representar com $s\binom{n+s-1}{s-1}$ números
- Jogos anônimos
  - Os jogadores não distinguem os outros jogadores
  - Podemos representar com $ns\binom{n+s-1}{s-1}$ números

Jogos com representações sucintas

- Jogos esparsos
  - Poucos dos ns^n números são diferentes de zero
- Jogos gráficos
  - A utilidade de um jogador depende apenas de alguns outros jogadores
  - ns^{d+1} números se d é grau máximo do grafo que representa o jogo
- Jogos simétricos
  - Todos os jogadores são idênticos
  - A utilidade depende de quantos (ao invés de quais) jogadores jogam cada uma das estratégias
  - Podemos representar com $s\binom{n+s-1}{s-1}$ números
- Jogos anônimos
  - Os jogadores não distinguem os outros jogadores
  - Podemos representar com $ns\binom{n+s-1}{s-1}$ números
- Entre outros...

Estrutura de um equilíbrio misto

Estrutura de um equilíbrio misto

Suporte de um vetor: índices das entradas não nulas

Estrutura de um equilíbrio misto

Suporte de um vetor: índices das entradas não nulas

- Ex: $(0, -1, 0, 2)$ tem como suporte $\{2, 4\}$

Estrutura de um equilíbrio misto

Suporte de um vetor: índices das entradas não nulas

- Ex: $(0, -1, 0, 2)$ tem como suporte $\{2, 4\}$

Teorema: Uma estratégia mista é uma resposta ótima se e somente todas as estratégias puras no seu suporte são respostas ótimas

Estrutura de um equilíbrio misto

Suporte de um vetor: índices das entradas não nulas

- Ex: $(0, -1, 0, 2)$ tem como suporte $\{2, 4\}$

Teorema: Uma estratégia mista é uma resposta ótima se e somente todas as estratégias puras no seu suporte são respostas ótimas

Isto é, uma resposta ótima mista é uma aleatorização de respostas ótimas puras

Estrutura de um equilíbrio misto

Suporte de um vetor: índices das entradas não nulas

- Ex: $(0, -1, 0, 2)$ tem como suporte $\{2, 4\}$

Teorema: Uma estratégia mista é uma resposta ótima se e somente todas as estratégias puras no seu suporte são respostas ótimas

Isto é, uma resposta ótima mista é uma aleatorização de respostas ótimas puras

- Jogar uma respostas ótima pura dá a mesma utilidade esperada de jogar uma resposta ótima mista

Estrutura de um equilíbrio misto

Suporte de um vetor: índices das entradas não nulas

- Ex: $(0, -1, 0, 2)$ tem como suporte $\{2, 4\}$

Teorema: Uma estratégia mista é uma resposta ótima se e somente todas as estratégias puras no seu suporte são respostas ótimas

Isto é, uma resposta ótima mista é uma aleatorização de respostas ótimas puras

- Jogar uma respostas ótima pura dá a mesma utilidade esperada de jogar uma resposta ótima mista
- Aleatorizar (de qualquer forma) respostas ótimas puras leva a uma resposta ótima mista

Estrutura de um equilíbrio misto

Suporte de um vetor: índices das entradas não nulas

- Ex: $(0, -1, 0, 2)$ tem como suporte $\{2, 4\}$

Teorema: Uma estratégia mista é uma resposta ótima se e somente todas as estratégias puras no seu suporte são respostas ótimas

Isto é, uma resposta ótima mista é uma aleatorização de respostas ótimas puras

- Jogar uma respostas ótima pura dá a mesma utilidade esperada de jogar uma resposta ótima mista
- Aleatorizar (de qualquer forma) respostas ótimas puras leva a uma resposta ótima mista

Então por que jogar uma resposta ótima mista ao invés de uma pura?

Exercício

2 / 1	Esquerda	Meio	Direita
Cima	10, 8	3, 2	5, 9
Meio	0, 3	8, 1	2, 10
Baixo	1, 1	4, 0	4, 3

Suponha que o jogador 2 escolhe a estratégia mista $(0, 3/8, 5/8)$

Exercício

1 \ 2	Esquerda	Meio	Direita
Cima	10, 8	3, 2	5, 9
Meio	0, 3	8, 1	2, 10
Baixo	1, 1	4, 0	4, 3

Suponha que o jogador 2 escolhe a estratégia mista $(0, 3/8, 5/8)$

- Quais são as respostas ótimas puras do jogador 1?

Exercício

$1 \backslash 2$	Esquerda	Meio	Direita
Cima	10, 8	3, 2	5, 9
Meio	0, 3	8, 1	2, 10
Baixo	1, 1	4, 0	4, 3

Suponha que o jogador 2 escolhe a estratégia mista $(0, 3/8, 5/8)$

- Quais são as respostas ótimas puras do jogador 1?
- Quais são as respostas ótimas mistas do jogador 1?

Estrutura de um equilíbrio misto

Estrutura de um equilíbrio misto

Teorema: Uma estratégia mista é uma resposta ótima se e somente todas as estratégias puras no seu suporte são respostas ótimas

Estrutura de um equilíbrio misto

Teorema: Uma estratégia mista é uma resposta ótima se e somente todas as estratégias puras no seu suporte são respostas ótimas

Prova:

Estrutura de um equilíbrio misto

Teorema: Uma estratégia mista é uma resposta ótima se e somente todas as estratégias puras no seu suporte são respostas ótimas

Prova: Note que

Estrutura de um equilíbrio misto

Teorema: Uma estratégia mista é uma resposta ótima se e somente todas as estratégias puras no seu suporte são respostas ótimas

Prova: Note que

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)]$$

Estrutura de um equilíbrio misto

Teorema: Uma estratégia mista é uma resposta ótima se e somente todas as estratégias puras no seu suporte são respostas ótimas

Prova: Note que

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s \in S} \sigma(s) u_i(s)$$

Estrutura de um equilíbrio misto

Teorema: Uma estratégia mista é uma resposta ótima se e somente todas as estratégias puras no seu suporte são respostas ótimas

Prova: Note que

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s \in S} \sigma(s) u_i(s) = \sum_{s_i \in S_i} \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma(s_i, s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i})$$

Estrutura de um equilíbrio misto

Teorema: Uma estratégia mista é uma resposta ótima se e somente todas as estratégias puras no seu suporte são respostas ótimas

Prova: Note que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_i(\sigma)] &= \sum_{s\in S}\sigma(s)u_i(s) = \sum_{s_i\in S_i}\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\sigma(s_i,s_{-i})u_i(s_i,s_{-i}) \\ &= \sum_{s_i\in S_i}\sigma_i(s_i)\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\sigma_{-i}(s_{-i})u_i(s_i,s_{-i})\end{aligned}$$

Estrutura de um equilíbrio misto

Teorema: Uma estratégia mista é uma resposta ótima se e somente todas as estratégias puras no seu suporte são respostas ótimas

Prova: Note que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[u_i(\sigma)] &= \sum_{s \in S} \sigma(s) u_i(s) = \sum_{s_i \in S_i} \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma(s_i, s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \\
&= \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) \sum_{s_{-i} \in S_{-i}} \sigma_{-i}(s_{-i}) u_i(s_i, s_{-i}) \\
&= \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) \mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]
\end{aligned}
$$

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}, então todo $s_{i'}$ no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}:

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}, então todo $s_{i'}$ no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}:

- Caso contrário, poderíamos:

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}, então todo $s_{i'}$ no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}:

- Caso contrário, poderíamos:
  - zerar $\sigma(s_{i'})$ e

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}, então todo $s_{i'}$ no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}:

- Caso contrário, poderíamos:
  - zerar $\sigma(s_{i'})$ e
  - para uma resposta ótima pura s_{i^*} para σ_{-i}, poderíamos aumentar $\sigma(s_{i^*})$ (em $\sigma(s_{i'})$)

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}, então todo $s_{i'}$ no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}:

- Caso contrário, poderíamos:
  - zerar $\sigma(s_{i'})$ e
  - para uma resposta ótima pura s_{i^*} para σ_{-i}, poderíamos aumentar $\sigma(s_{i^*})$ (em $\sigma(s_{i'})$)
  - Com isso, aumentaríamos a utilidade

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se todo $s_{i'}$ no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}, então σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se todo $s_{i'}$ no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}, então σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

- Se $s_{i'}$ e s_{i^*} são ambas respostas ótimas para σ_{-i}, então $\mathbb{E}[u_i(s_{i'}, \sigma_{-i})] = \mathbb{E}[u_i(s_{i^*}, \sigma_{-i})]$

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se todo $s_{i'}$ no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}, então σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

- Se $s_{i'}$ e s_{i^*} são ambas respostas ótimas para σ_{-i}, então $\mathbb{E}[u_i(s_{i'}, \sigma_{-i})] = \mathbb{E}[u_i(s_{i^*}, \sigma_{-i})]$
- Todo termo não nulo de $\sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$ tem o mesmo valor e é igual a $\sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_{i'}, \sigma_{-i})]$

Suporte e Respostas Ótimas

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$$

Se todo $s_{i'}$ no suporte de σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}, então σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

- Se $s_{i'}$ e s_{i^*} são ambas respostas ótimas para σ_{-i}, então $\mathbb{E}[u_i(s_{i'}, \sigma_{-i})] = \mathbb{E}[u_i(s_{i^*}, \sigma_{-i})]$
- Todo termo não nulo de $\sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})]$ tem o mesmo valor e é igual a $\sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_{i'}, \sigma_{-i})]$
- Assim, $\sum_{s_i \in S_i} \sigma(s_i)\mathbb{E}[u_i(s_i, \sigma_{-i})] = \mathbb{E}[u_i(s_{i'}, \sigma_{-i})]$

Como encontrar um equilibrio misto?

A \ B	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	1, 2
$R2$	2, 1	6, 6

Como encontrar um equilibrio misto?

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	1, 2
$R2$	2, 1	6, 6

Precisamos “adivinhar” os suportes das estratégias mistas

Como encontrar um equilibrio misto?

B / A	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	1, 2
$R2$	2, 1	6, 6

Precisamos “adivinhar” os suportes das estratégias mistas

- Se o suporte do jogador 1 for $\{R1\}$, o jogador 2 jogar $R2$

Como encontrar um equilibrio misto?

A \ B	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	1, 2
$R2$	2, 1	6, 6

Precisamos “adivinhar” os suportes das estratégias mistas

- Se o suporte do jogador 1 for $\{R1\}$, o jogador 2 jogar $R2$
  - e temos um equilíbrio

Como encontrar um equilibrio misto?

A \ B	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	1, 2
$R2$	2, 1	6, 6

Precisamos "adivinhar" os suportes das estratégias mistas

- Se o suporte do jogador 1 for $\{R1\}$, o jogador 2 jogar $R2$
  - e temos um equilíbrio
- Se o suporte do jogador 1 for $\{R2\}$, o jogador 2 jogar $R1$

Como encontrar um equilibrio misto?

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	1, 2
$R2$	2, 1	6, 6

Precisamos “adivinhar” os suportes das estratégias mistas

- Se o suporte do jogador 1 for $\{R1\}$, o jogador 2 jogar $R2$
  - e temos um equilíbrio
- Se o suporte do jogador 1 for $\{R2\}$, o jogador 2 jogar $R1$
  - e temos um equilíbrio

Como encontrar um equilibrio misto?

A \ B	$R1$	$R2$
$R1$	5 5	2 1
$R2$	1 2	6 6

Precisamos “adivinhar” os suportes das estratégias mistas

- Se o suporte do jogador 1 for $\{R1\}$, o jogador 2 jogar $R2$
  - e temos um equilíbrio
- Se o suporte do jogador 1 for $\{R2\}$, o jogador 2 jogar $R1$
  - e temos um equilíbrio
- E se o suporte do jogador 1 for $\{R1, R2\}$?

Como encontrar um equilibrio misto?

B / A	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	1, 2
$R2$	2, 1	6, 6

Como encontrar um equilibrio misto?

B A	$R1$	$R2$
$R1$	5 5	2 1
$R2$	1 2	6 6

Suponha que o jogador 2 joga $R1$ com probabilidade p

Como encontrar um equilibrio misto?

B A	$R1$	$R2$
$R1$	5 5	2 1
$R2$	1 2	6 6

Suponha que o jogador 2 joga $R1$ com probabilidade p

- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R1$: $5p + 1(1 - p) = 4p + 1$

Como encontrar um equilibrio misto?

B / A	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	1, 2
$R2$	2, 1	6, 6

Suponha que o jogador 2 joga $R1$ com probabilidade p

- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R1$: $5p + 1(1 - p) = 4p + 1$
- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R2$: $2p + 6(1 - p) = -4p + 6$

Como encontrar um equilibrio misto?

B A	$R1$	$R2$
$R1$	5 5	2 1
$R2$	1 2	6 6

Suponha que o jogador 2 joga $R1$ com probabilidade p

- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R1$: $5p + 1(1-p) = 4p + 1$
- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R2$: $2p + 6(1-p) = -4p + 6$

Como supomos que estamos em um equilibrio misto e que o suporte do jogador 1 é $\{R1, R2\}$, as utilidade precisam ser iguais

Como encontrar um equilibrio misto?

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	1, 2
$R2$	2, 1	6, 6

Suponha que o jogador 2 joga $R1$ com probabilidade p

- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R1$: $5p + 1(1 - p) = 4p + 1$
- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R2$: $2p + 6(1 - p) = -4p + 6$

Como supomos que estamos em um equilibrio misto e que o suporte do jogador 1 é $\{R1, R2\}$, as utilidade precisam ser iguais

- Ou seja, $4p + 1 = -4p + 6$ e, portanto, $p = 5/8$

Como encontrar um equilibrio misto?

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	1, 2
$R2$	2, 1	6, 6

Suponha que o jogador 2 joga $R1$ com probabilidade p

- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R1$: $5p + 1(1 - p) = 4p + 1$
- Utilidade do jogador 1 ao jogar $R2$: $2p + 6(1 - p) = -4p + 6$

Como supomos que estamos em um equilibrio misto e que o suporte do jogador 1 é $\{R1, R2\}$, as utilidade precisam ser iguais

- Ou seja, $4p + 1 = -4p + 6$ e, portanto, $p = 5/8$

Isto é, descobrimos qual é a estratégia mista do jogador 2 se o jogador 1 estiver jogando uma resposta ótima com suporte $\{R1, R2\}$.

Como encontrar um equilibrio misto?

B / A	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	1, 2
$R2$	2, 1	6, 6

Como encontrar um equilibrio misto?

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	1, 2
$R2$	2, 1	6, 6

Faça o mesmo para o jogador 2:

Como encontrar um equilibrio misto?

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	1, 2
$R2$	2, 1	6, 6

Faça o mesmo para o jogador 2:

- Concluímos que o suporte do jogador 2 é $\{R1, R2\}$

Como encontrar um equilibrio misto?

A \ B	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	1, 2
$R2$	2, 1	6, 6

Faça o mesmo para o jogador 2:

- Concluímos que o suporte do jogador 2 é $\{R1, R2\}$
- Supomos que o jogador 1 joga $R1$ com probabilidade q

Como encontrar um equilibrio misto?

B \ A	$R1$	$R2$
$R1$	5 / 5	1 / 2
$R2$	2 / 1	6 / 6

Faça o mesmo para o jogador 2:

- Concluímos que o suporte do jogador 2 é $\{R1, R2\}$
- Supomos que o jogador 1 joga $R1$ com probabilidade q
- Igualamos as utilidade do jogador 2 para $R1$ e $R2$

Como encontrar um equilibrio misto?

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	$5, 5$	$1, 2$
$R2$	$2, 1$	$6, 6$

Faça o mesmo para o jogador 2:

- Concluímos que o suporte do jogador 2 é $\{R1, R2\}$
- Supomos que o jogador 1 joga $R1$ com probabilidade q
- Igualamos as utilidade do jogador 2 para $R1$ e $R2$
- Achamos o valor de q

Jogos de soma zero

Jogos de soma zero

Em um jogo de soma zero com n jogadores, para qualquer perfil $s \in S$ temos que

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(s) = 0$$

Jogos de soma zero

Em um jogo de soma zero com n jogadores, para qualquer perfil $s \in S$ temos que

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(s) = 0$$

Trata-se de um conceito muito comum em economia

Jogos de soma zero

Em um jogo de soma zero com n jogadores, para qualquer perfil $s \in S$ temos que

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(s) = 0$$

Trata-se de um conceito muito comum em economia

Exemplos: Par-ou-Ímpar, Pedra-Papel-Tesoura, Xadrez, Poker, etc...

Jogos de soma zero com dois jogadores

Jogos de soma zero com dois jogadores

Basta dar uma matriz, pois o ganho do jogador 1 é o custo do jogador 2 e vice-versa

Jogos de soma zero com dois jogadores

Basta dar uma matriz, pois o ganho do jogador 1 é o custo do jogador 2 e vice-versa

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash

Jogos de soma zero com dois jogadores

Basta dar uma matriz, pois o ganho do jogador 1 é o custo do jogador 2 e vice-versa

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash

- m: número de estratégias do jogador 1

Jogos de soma zero com dois jogadores

Basta dar uma matriz, pois o ganho do jogador 1 é o custo do jogador 2 e vice-versa

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash

- m: número de estratégias do jogador 1
- n: número de estratégias do jogador 2

Jogos de soma zero com dois jogadores

Basta dar uma matriz, pois o ganho do jogador 1 é o custo do jogador 2 e vice-versa

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash

- m: número de estratégias do jogador 1
- n: número de estratégias do jogador 2

Pelo Teorema de Nash, sempre existe um equilíbrio

Jogos de soma zero com dois jogadores

Basta dar uma matriz, pois o ganho do jogador 1 é o custo do jogador 2 e vice-versa

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash

- m: número de estratégias do jogador 1
- n: número de estratégias do jogador 2

Pelo Teorema de Nash, sempre existe um equilíbrio

Como podemos resolver esse problema?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash.

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash.

O que é um equilíbrio?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash.

O que é um equilíbrio?

São duas distribuições de probabilidade, ou seja, vetores p, com m entradas, e q, com n entradas,

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash.

O que é um equilíbrio?

São duas distribuições de probabilidade, ou seja, vetores p, com m entradas, e q, com n entradas,

- $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash.

O que é um equilíbrio?

São duas distribuições de probabilidade, ou seja, vetores p, com m entradas, e q, com n entradas,

- $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$
- $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash.

O que é um equilíbrio?

São duas distribuições de probabilidade, ou seja, vetores p, com m entradas, e q, com n entradas,

- $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$
- $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$

tais que um é uma resposta ótima para o outro...

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$, encontrar um equilíbrio misto de Nash.

O que é um equilíbrio?

São duas distribuições de probabilidade, ou seja, vetores p, com m entradas, e q, com n entradas,

- $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$ e $p_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$
- $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$ e $q_j \geq 0$ para $j = 1, \ldots, n$

tais que um é uma resposta ótima para o outro...

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q, qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Considere que $A_{m \times n}$ é a matriz de utilidade do jogador 1

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q, qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

Jogos de soma zero com dois jogadores

Considere que $A_{m \times n}$ é a matriz de utilidade do jogador 1

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q, qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

$$v := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Considere que $A_{m\times n}$ é a matriz de utilidade do jogador 1

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q, qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

$$v := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_iq_j \;=\; \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Considere que $A_{m\times n}$ é a matriz de utilidade do jogador 1

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q, qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

$$v := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_iq_j \; = \; \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j = \; \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Considere que $A_{m\times n}$ é a matriz de utilidade do jogador 1

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q, qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

$$v := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_iq_j \;=\; \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j = \; \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i$$

Vimos que, se p é uma resposta ótima para q, então para toda estratégia i' no suporte de p temos que $\sum_{j=1}^{n} a_{i'j}q_j = v$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Considere que $A_{m\times n}$ é a matriz de utilidade do jogador 1

Se o jogador 1 usa a estratégia (mista) p e o 2 usa a q, qual é o valor esperado que o jogador 1 ganha?

$$v := \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_iq_j \;=\; \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i$$

Vimos que, se p é uma resposta ótima para q, então para toda estratégia i' no suporte de p temos que $\sum_{j=1}^{n} a_{i'j}q_j = v$

E se q é uma resposta ótima para p, então para toda estratégia pura j' no suporte de q temos que $\sum_{i=1}^{m}(-a_{ij'})p_i = -v$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
  - aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^{m}(-a_{ij'})p_i$ é máximo

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
  - aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^{m}(-a_{ij'})p_i$ é máximo
  - j está no suporte sse $\sum_{i=1}^{m} a_{ij'}p_i$ é mínimo

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
    - aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^{m}(-a_{ij'})p_i$ é máximo
    - j está no suporte sse $\sum_{i=1}^{m} a_{ij'}p_i$ é mínimo
- Sendo que o jogo é de soma zero

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
  - aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^{m}(-a_{ij'})p_i$ é máximo
  - j está no suporte sse $\sum_{i=1}^{m} a_{ij'}p_i$ é mínimo
- Sendo que o jogo é de soma zero
  - maximiza o custo do outro é maximizar o seu ganho

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
  - aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^{m}(-a_{ij'})p_i$ é máximo
  - j está no suporte sse $\sum_{i=1}^{m} a_{ij'}p_i$ é mínimo
- Sendo que o jogo é de soma zero
  - maximiza o custo do outro é maximizar o seu ganho

maximize $\quad v$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
  - aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^{m}(-a_{ij'})p_i$ é máximo
  - j está no suporte sse $\sum_{i=1}^{m} a_{ij'}p_i$ é mínimo
- Sendo que o jogo é de soma zero
  - maximiza o custo do outro é maximizar o seu ganho

maximize $\quad v$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
  - aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^{m}(-a_{ij'})p_i$ é máximo
  - j está no suporte sse $\sum_{i=1}^{m} a_{ij'}p_i$ é mínimo
- Sendo que o jogo é de soma zero
  - maximiza o custo do outro é maximizar o seu ganho

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & v \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^{m} p_i = 1
\end{aligned}
$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
  - aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^{m}(-a_{ij'})p_i$ é máximo
  - j está no suporte sse $\sum_{i=1}^{m} a_{ij'}p_i$ é mínimo
- Sendo que o jogo é de soma zero
  - maximiza o custo do outro é maximizar o seu ganho

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & v \\
\text{sujeito a} \quad & \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \\
& \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i \geq v \quad \text{para } j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

Assim, o jogador 1 quer encontrar p tal que

- p é uma estratégia mista (distribuição de probabilidades)
- sendo que o jogador 2 escolhe uma resposta ótima
  - aleatoriza entre j tal que $\sum_{i=1}^{m}(-a_{ij'})p_i$ é máximo
  - j está no suporte sse $\sum_{i=1}^{m} a_{ij'}p_i$ é mínimo
- Sendo que o jogo é de soma zero
  - maximiza o custo do outro é maximizar o seu ganho

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{maximize} & v & & & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} p_i & = & 1 & \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i & \geq & v & \text{para } j = 1, \ldots, n \\
 & p_i & \geq & 0 & \text{para } i = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

E o Jogador 2 quer encontrar q que

Jogos de soma zero com dois jogadores

E o Jogador 2 quer encontrar q que

minimize $\quad w$

Jogos de soma zero com dois jogadores

E o Jogador 2 quer encontrar q que

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & w \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j \;=\; 1
\end{array}
$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

E o Jogador 2 quer encontrar q que

$$\begin{array}{lrcll} \text{minimize} & w & & & \\ \text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j & = & 1 & \\ & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j & \leq & w & \text{para } i = 1, \ldots, m \end{array}$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

E o Jogador 2 quer encontrar q que

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{minimize} & w & & & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j & = & 1 & \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j & \leq & w & \text{para } i = 1, \ldots, m \\
& q_j & \geq & 0 & \text{para } j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Jogos de soma zero com dois jogadores

E o Jogador 2 quer encontrar q que

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{minimize} & w & & & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j & = & 1 & \\
 & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j & \leq & w & \text{para } i = 1, \ldots, m \\
 & q_j & \geq & 0 & \text{para } j = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Estes são programas lineares, e um é o dual do outro!

Forma padrão dos LPs

Forma padrão dos LPs

Dados:

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A: matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A: matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c: vetor do $\mathbb{Q}^n$

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A: matriz do $\mathbb{Q}^{n\times m}$
- c: vetor do $\mathbb{Q}^n$
- b: vetor do $\mathbb{Q}^m$

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A: matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c: vetor do $\mathbb{Q}^{n}$
- b: vetor do $\mathbb{Q}^{m}$

Programa primal:

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A: matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c: vetor do $\mathbb{Q}^n$
- b: vetor do $\mathbb{Q}^m$

Programa primal:

minimize $\quad \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A: matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c: vetor do $\mathbb{Q}^{n}$
- b: vetor do $\mathbb{Q}^{m}$

Programa primal:

minimize $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$

sujeito a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \geq b_j$ para $j = 1, \ldots, m$

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A: matriz do $\mathbb{Q}^{n\times m}$
- c: vetor do $\mathbb{Q}^n$
- b: vetor do $\mathbb{Q}^m$

Programa primal:

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{minimize} & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i & & & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i & \geq & b_j & \text{para } j = 1, \ldots, m \\
 & x_i & \geq & 0 & \text{para } i = 1, \ldots, n
\end{array}
$$

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A: matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c: vetor do $\mathbb{Q}^n$
- b: vetor do $\mathbb{Q}^m$

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A: matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c: vetor do $\mathbb{Q}^n$
- b: vetor do $\mathbb{Q}^m$

Programa dual:

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A: matriz do $\mathbb{Q}^{n \times m}$
- c: vetor do $\mathbb{Q}^n$
- b: vetor do $\mathbb{Q}^m$

Programa dual:

maximize $\sum_{j=1}^{m} b_j y_j$

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A: matriz do $\mathbb{Q}^{n\times m}$
- c: vetor do $\mathbb{Q}^{n}$
- b: vetor do $\mathbb{Q}^{m}$

Programa dual:

$$\begin{array}{lll} \text{maximize} & \sum_{j=1}^{m} b_j y_j & \\ \text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \;\leq\; c_i & \text{para } i = 1, \ldots, n \end{array}$$

Forma padrão dos LPs

Dados:

- A: matriz do $\mathbb{Q}^{n\times m}$
- c: vetor do $\mathbb{Q}^n$
- b: vetor do $\mathbb{Q}^m$

Programa dual:

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{maximize} & \sum_{j=1}^m b_j y_j & & & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{j=1}^m a_{ij} y_j & \leq & c_i & \text{para } i = 1, \ldots, n \\
& y_j & \geq & 0 & \text{para } j = 1, \ldots, m
\end{array}
$$

Resultados de programação linear

Resultados de programação linear

Seja P um programa linear e D o seu programa dual

Resultados de programação linear

Seja P um programa linear e D o seu programa dual

Seja x^* solução ótima de P e seja y^* solução ótima de D, então:

Resultados de programação linear

Seja P um programa linear e D o seu programa dual

Seja x^* solução ótima de P e seja y^* solução ótima de D, então:

- Se $x_i^* > 0$, então $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^* = c_i$

Resultados de programação linear

Seja P um programa linear e D o seu programa dual

Seja x^* solução ótima de P e seja y^* solução ótima de D, então:

- Se $x_i^* > 0$, então $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^* = c_i$
- Se $y_j^* > 0$, então $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^* = b_j$

Resultados de programação linear

Seja P um programa linear e D o seu programa dual

Seja x^* solução ótima de P e seja y^* solução ótima de D, então:

- Se $x_i^* > 0$, então $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^* = c_i$
- Se $y_j^* > 0$, então $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i^* = b_j$
- $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^* = \sum_{i=1}^{n} b_j y_j^*$

Conclusão

Se

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1
- (q^*, w^*) é solução ótima do programa linear do jogador 2

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1
- (q^*, w^*) é solução ótima do programa linear do jogador 2

então:

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1
- (q^*, w^*) é solução ótima do programa linear do jogador 2

então:

- Se $q_j^* > 0$ então $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = v^*$

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1
- (q^*, w^*) é solução ótima do programa linear do jogador 2

então:

- Se $q_j^* > 0$ então $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = v^*$
  - Outras estratégias tais que $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* > v^*$ tem $q_j^* = 0$

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1
- (q^*, w^*) é solução ótima do programa linear do jogador 2

então:

- Se $q_j^* > 0$ então $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = v^*$
  - Outras estratégias tais que $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* > v^*$ tem $q_j^* = 0$
- Se $p_i^* > 0$ então $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* = w^*$

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1
- (q^*, w^*) é solução ótima do programa linear do jogador 2

então:

- Se $q_j^* > 0$ então $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = v^*$
  - Outras estratégias tais que $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* > v^*$ tem $q_j^* = 0$
- Se $p_i^* > 0$ então $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* = w^*$
  - Outras estratégias tais que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* < w^*$ tem $p_i^* = 0$

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1
- (q^*, w^*) é solução ótima do programa linear do jogador 2

então:

- Se $q_j^* > 0$ então $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = v^*$
  - Outras estratégias tais que $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* > v^*$ tem $q_j^* = 0$
- Se $p_i^* > 0$ então $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* = w^*$
  - Outras estratégias tais que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* < w^*$ tem $p_i^* = 0$
- $v^* = w^*$ (a utilidade o jogador 1 é o custo do jogador 2)

Conclusão

Se

- (p^*, v^*) é solução ótima do programa linear do jogador 1
- (q^*, w^*) é solução ótima do programa linear do jogador 2

então:

- Se $q_j^* > 0$ então $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = v^*$
  - Outras estratégias tais que $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* > v^*$ tem $q_j^* = 0$
- Se $p_i^* > 0$ então $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* = w^*$
  - Outras estratégias tais que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* < w^*$ tem $p_i^* = 0$
- $v^* = w^*$ (a utilidade o jogador 1 é o custo do jogador 2)

Tal par de soluções é um equilíbrio misto já que ambos os jogadores não podem melhorar

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$ encontrar um equilíbrio misto

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$ encontrar um equilíbrio misto

Conclusão: Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial (usando programação linear)

Jogos de soma zero com dois jogadores

Problema: Dada uma matriz $A_{m \times n}$ encontrar um equilíbrio misto

Conclusão: Este problema pode ser resolvido em tempo polinomial (usando programação linear)

E para jogos mais gerais?

Encontrado equilíbrios mistos

Encontrado equilíbrios mistos

O Teorema de Nash garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito

Encontrado equilíbrios mistos

O Teorema de Nash garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito

- Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Encontrado equilíbrios mistos

O Teorema de Nash garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito

- Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:
"If your laptop cannot find it, neither can the market."

Encontrado equilíbrios mistos

O Teorema de Nash garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito

- Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:
"If your laptop cannot find it, neither can the market."

Problema: Dado um jogo em forma padrão, encontrar um equilíbrio de Nash

Encontrado equilíbrios mistos

O Teorema de Nash garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito

- Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:
"If your laptop cannot find it, neither can the market."

Problema: Dado um jogo em forma padrão, encontrar um equilíbrio de Nash

- Podemos resolver esse problema eficientemente?

Encontrado equilíbrios mistos

O Teorema de Nash garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito

- Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:
"If your laptop cannot find it, neither can the market."

Problema: Dado um jogo em forma padrão, encontrar um equilíbrio de Nash

- Podemos resolver esse problema eficientemente?
- Qual é a sua complexidade?

Encontrado equilíbrios mistos

O Teorema de Nash garante a existência de um equilíbrio em qualquer jogo finito

- Mas como encontrar um tal equilíbrio?

Kamal Jain:
“If your laptop cannot find it, neither can the market.”

Problema: Dado um jogo em forma padrão, encontrar um equilíbrio de Nash

- Podemos resolver esse problema eficientemente?
- Qual é a sua complexidade?
- A versão de decisão (existe equilíbrio de Nash?) é trivial...

Discussão

Nash descreveu um jogo de Poker com três jogadores, com utilidades inteiras, e único equilíbrio envolvendo números irracionais

Discussão

Nash descreveu um jogo de Poker com três jogadores, com utilidades inteiras, e único equilíbrio envolvendo números irracionais

Porém, podemos encontrar um equilibrio misto encontrando o suporte certo das estratégias mistas de cada jogador

Discussão

Nash descreveu um jogo de Poker com três jogadores, com utilidades inteiras, e único equilíbrio envolvendo números irracionais

Porém, podemos encontrar um equilibrio misto encontrando o suporte certo das estratégias mistas de cada jogador

Dados os suportes, é possível utilizar um sistema de equações polinomiais para encontrar o equilíbrio

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é PPAD-Completo:

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é PPAD-Completo:

- A classe PPAD é composta por problemas que a existência de uma solução é garantida

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é PPAD-Completo:

- A classe PPAD é composta por problemas que a existência de uma solução é garantida
  - Porém o espaço de busca é exponencial (apesar de bem estruturado)

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é PPAD-Completo:

- A classe PPAD é composta por problemas que a existência de uma solução é garantida
  - Porém o espaço de busca é exponencial (apesar de bem estruturado)
- A classe PPAD é um subconjunto da classe NP

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é PPAD-Completo:

- A classe PPAD é composta por problemas que a existência de uma solução é garantida
  - Porém o espaço de busca é exponencial (apesar de bem estruturado)
- A classe PPAD é um subconjunto da classe NP
  - Ou seja, se $P = NP$ então $PPAD = P$

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é PPAD-Completo:

- A classe PPAD é composta por problemas que a existência de uma solução é garantida
  - Porém o espaço de busca é exponencial (apesar de bem estruturado)
- A classe PPAD é um subconjunto da classe NP
  - Ou seja, se $\mathrm{P} = \mathrm{NP}$ então $\mathrm{PPAD} = \mathrm{P}$
  - Porém, pode ser que $\mathrm{PPAD} = \mathrm{P}$ e $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é PPAD-Completo:

- A classe PPAD é composta por problemas que a existência de uma solução é garantida
  - Porém o espaço de busca é exponencial (apesar de bem estruturado)
- A classe PPAD é um subconjunto da classe NP
  - Ou seja, se $P = NP$ então $PPAD = P$
  - Porém, pode ser que $PPAD = P$ e $P \neq NP$
- Apesar de ser um conceito "mais fraco", vários problemas interessantes estão em PPAD

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é PPAD-Completo:

- A classe PPAD é composta por problemas que a existência de uma solução é garantida
  - Porém o espaço de busca é exponencial (apesar de bem estruturado)
- A classe PPAD é um subconjunto da classe NP
  - Ou seja, se P = NP então PPAD = P
  - Porém, pode ser que PPAD = P e P $\neq$ NP
- Apesar de ser um conceito "mais fraco", vários problemas interessantes estão em PPAD
  - Encontrar ponto fixo de Brouwer,

A complexidade de encontrar um equilíbrio

O problema de encontrar um equilíbrio misto é PPAD-Completo:

- A classe PPAD é composta por problemas que a existência de uma solução é garantida
  - Porém o espaço de busca é exponencial (apesar de bem estruturado)
- A classe PPAD é um subconjunto da classe NP
  - Ou seja, se $P = NP$ então $PPAD = P$
  - Porém, pode ser que $PPAD = P$ e $P \neq NP$
- Apesar de ser um conceito “mais fraco”, vários problemas interessantes estão em PPAD
  - Encontrar ponto fixo de Brouwer,
  - Achar equilíbrio de Arrow-Debreu em mercados, etc...

Os seguintes problemas são NP-completos

Os seguintes problemas são NP-completos

Dado um jogo de duas pessoas na forma matricial, decidir se este jogo tem:

Os seguintes problemas são NP-completos

Dado um jogo de duas pessoas na forma matricial, decidir se este jogo tem:

- pelo menos dois equilíbrios de Nash

Os seguintes problemas são NP-completos

Dado um jogo de duas pessoas na forma matricial, decidir se este jogo tem:

- pelo menos dois equilíbrios de Nash
- dado k, um equilíbrio de Nash para o jogador 1 com utilidade pelo menos k

Os seguintes problemas são NP-completos

Dado um jogo de duas pessoas na forma matricial, decidir se este jogo tem:

- pelo menos dois equilíbrios de Nash
- dado k, um equilíbrio de Nash para o jogador 1 com utilidade pelo menos k
- dado k, um equilíbrio de Nash onde a soma das utilidades dos jogadores é pelo menos k

Os seguintes problemas são NP-completos

Dado um jogo de duas pessoas na forma matricial, decidir se este jogo tem:

- pelo menos dois equilíbrios de Nash
- dado k, um equilíbrio de Nash para o jogador 1 com utilidade pelo menos k
- dado k, um equilíbrio de Nash onde a soma das utilidades dos jogadores é pelo menos k
- dado k, um equilíbrio de Nash com pelo menos k estratégias no seu suporte

Os seguintes problemas são NP-completos

Dado um jogo de duas pessoas na forma matricial, decidir se este jogo tem:

- pelo menos dois equilíbrios de Nash
- dado k, um equilíbrio de Nash para o jogador 1 com utilidade pelo menos k
- dado k, um equilíbrio de Nash onde a soma das utilidades dos jogadores é pelo menos k
- dado k, um equilíbrio de Nash com pelo menos k estratégias no seu suporte
- dado s, um equilíbrio de Nash com s no suporte

Os seguintes problemas são NP-completos

Dado um jogo de duas pessoas na forma matricial, decidir se este jogo tem:

- pelo menos dois equilíbrios de Nash
- dado k, um equilíbrio de Nash para o jogador 1 com utilidade pelo menos k
- dado k, um equilíbrio de Nash onde a soma das utilidades dos jogadores é pelo menos k
- dado k, um equilíbrio de Nash com pelo menos k estratégias no seu suporte
- dado s, um equilíbrio de Nash com s no suporte
- dado s, um equilíbrio de Nash sem s no suporte