Selfish Network Creation with Non-uniform Edge Cost

Ankit Chauhan, Pascal Lenzner, Anna Melnichenko, and Louise Molitor

Klairton de Lima Brito

15 de Junho de 2018

Instituto de Computação - Unicamp

Roteiro

Introdução

Introdução

- Artigo apresentado por Chauhan e coautores [1].
- Um versão [2] com todas as provas está disponível.
- Aborda uma versão do *Network Creation Game (NCG)* [3].
- Variações com restrições adicionais:
    - Localidade.
    - Compra de arestas.

Network Creation Game (NCG)

- Os agentes são associados a vértices.
- Objetivo:
  - Cada agente de maneira egoísta tem de se conectar aos demais agentes.
  - Cada agente quer minimizar o seu custo.
- Custo:
  - O custo de um agente é composto pelas arestas que ele criou mais a distância dele para os demais agentes.
  - Se um agente quiser criar uma aresta ele paga um valor $\alpha > 0$.
  - A distância entre os agentes u e v é o número de arestas no menor caminho de u até v em G.

Network Creation Game (NCG)

- s é o vetor de estratégias de todos os agentes e induz um grafo conexo G.
- $N_{u,v}$ é uma variável binária que representa se o agente u pagou pela criação da aresta (u, v).
- $D_G(u, v)$ é a menor distância entre os agentes u e v.
- Custo de um agente u:

  $$C_u(G(s)) = \sum_{v \in V} D_G(u, v) + \sum_{v \in V} \alpha N_{u,v}$$

- Custo social:

  $$C(G(s)) = \sum_{u \in V} C_u(G(s))$$

Estrutura de Equilíbrios no NCG

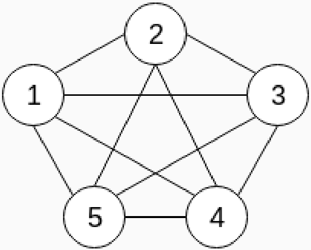

Figure 1: Estrutura de um equilíbrio quando $\alpha \leq 1$.

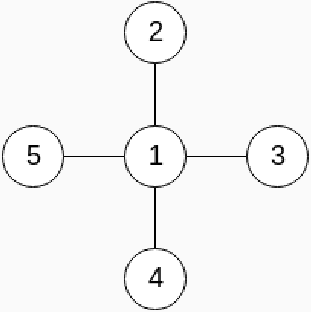

Figure 2: Estrutura de um equilíbrio quando $\alpha \geq 1$.

Formação de Redes Sociais

- Qual comportamento pode ser observado na formação de redes sociais?
- Custo pago para se conectar a outro agente está relacionado com sua “popularidade”.
- Esse comporamento pode ser observado:
  - Círculo Social.
  - Mercado de Trabalho.
  - Facebook.
  - Youtube.

Formação de Redes Sociais

- *degree price network creation game* (degNCG).
- *k-local degree price network creation game* (deg(k)NCG).
    - deg2NCG.
    - deg4NCG.
- *degree price add-only game* (degAOG).
- *k-local degree price add-only game* (deg(k)AOG).

Definições

Definições

- $D_G(u, v)$ representa a distância entre os vértices u e v em G.
- $N_k(u)$ é o conjunto de vértices que estão no máximo k de distância do vértice u em G.
- $B_k(u)$ é o conjunto de vértices que estão a exatamente k de distância do vértice u em G.
- O diâmetro do grafo G é denotado por $D(G)$.
- O grau de um vértice u em G é denotado por $deg_G(u)$.
- Custo de um agente u:

  $$C_u(G(s)) = \sum_{v \in V} D_G(u, v) + \sum_{v \in S_u} (deg_G(v) - 1)$$
- Custo social:

  $$C(G(s)) = \sum_{u \in V} C_u(G(s))$$

Exemplo (degNCG)

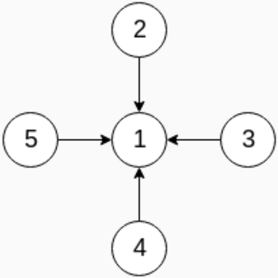

Figure 3: Exemplo de formação de rede.

$C_1(G(s)) = 0 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$

$C_2(G(s)) = 3 + 1 + 2 + 2 + 2 = 10.$

$C_3(G(s)) = 3 + 1 + 2 + 2 + 2 = 10.$

$C_4(G(s)) = 3 + 1 + 2 + 2 + 2 = 10.$

$C_5(G(s)) = 3 + 1 + 2 + 2 + 2 = 10.$

$C(G(s)) = 4 + 10 + 10 + 10 + 10 = 44.$

Exemplo (degNCG)

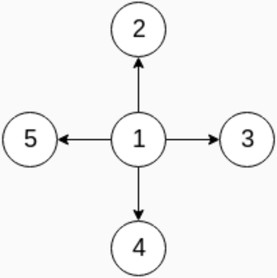

Figure 4: Exemplo de formação de rede.

$C_1(G(s)) = 0 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4.$

$C_2(G(s)) = 0 + 1 + 2 + 2 + 2 = 7.$

$C_3(G(s)) = 0 + 1 + 2 + 2 + 2 = 7.$

$C_4(G(s)) = 0 + 1 + 2 + 2 + 2 = 7.$

$C_5(G(s)) = 0 + 1 + 2 + 2 + 2 = 7.$

$C(G(s)) = 4 + 7 + 7 + 7 + 7 = 32.$

Resultados

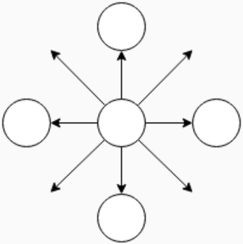

Figure 5: Estrela S_n.

Teorema
A estrela S_n onde o vértice central paga por todas as arestas é um Equilíbrio Puro de Nash (NE) para o $deg(k)NCG$ e $deg(k)AOG$ para qualquer k.

Preço da Estabilidade

Teorema
A estrela S_n onde o vértice central paga por todas as arestas é uma solução ótima para o $deg(k)NCG$ *e* $deg(k)AOG$ *para qualquer* k.

Prova. Considere uma rede G ótima com m arestas e n vértices. Como G é conexo temos que $m \geq n - 1$. Agora, considere todos os pares de vértices que estão a pelo menos 2 de distância:

$$n(n-1) - 2m$$

Então o custo total será pelo menos:

$$2(n(n-1) - 2m) + 2m = 2n(n-1) - 2m$$

O custo total da estrela S_n onde o vértice central paga por todas as arestas é exatamente o valor do limitante inferior. ∎

Preço da Estabilidade

Pelos teoremas vistos anteriormente vale que:

Corolário
O preço da estabilidade para $deg(k)NCG$ *e* $deg(k)AOG$ *é 1.*

A Melhor Resposta para $deg(2)$NCG e $deg(2)$AOG é NP-Difícil

- Decidir a melhor reposta para um agente u dada uma instância do problema $deg(2)$NCG é NP-Difícil.
- Dominating Set em grafos q-regulares (NP-Difícil).
  - Dado um grafo $G = (V, E)$, tal que todo vértice $v \in V$ possui grau q.
  - Determinar o menor subconjunto D de V, tal que todo vértice $v \notin D$ está na adjacência de pelo menos um vértice de D.
- Exact-q Set Cover (NP-Difícil).
  - Dado um conjunto universo $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ e subconjuntos $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_l\}$.
  - Todo $A_i \in A$ possui $|A_i| = q$ e $q \geq 4$.
  - Determinar o menor subconjunto de A que cobre o conjunto universo U.

Redução

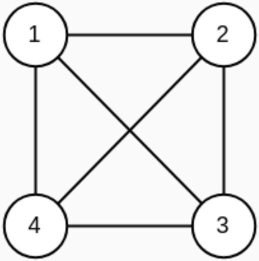

Figure 6: Grafo 3-regular.

- $U = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A_1 = \{1, 2, 3, 4\}$
- $A_2 = \{2, 1, 3, 4\}$
- $A_3 = \{3, 1, 2, 4\}$
- $A_4 = \{4, 1, 2, 3\}$
- $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

Redução

- Dada uma instância do Exact-q Set Cover vamos criar uma instância do $deg(2)$NCG.
- Instância do Exact-q Set Cover:
  - $U = \{1, 2, \dots, n\}$.
  - $A = \{A_1, A_2, \dots, A_l\}$.
- Instância do $deg(2)$NCG:
  - $V = U \cup A \cup \{1^1, \dots, 1^{q+1}, \dots, n^1, \dots, n^{q+1}\} \cup \{x, u\}$.
  - $E = \{(i, A_j) | i \in A_j\}$
    $\cup \{(i, i^r) | i \in U, 1 \leq r \leq q+1\}$
    $\cup \{(A_j, x) | A_j \in A\}$
    $\cup \{(x, u)\}$

Redução

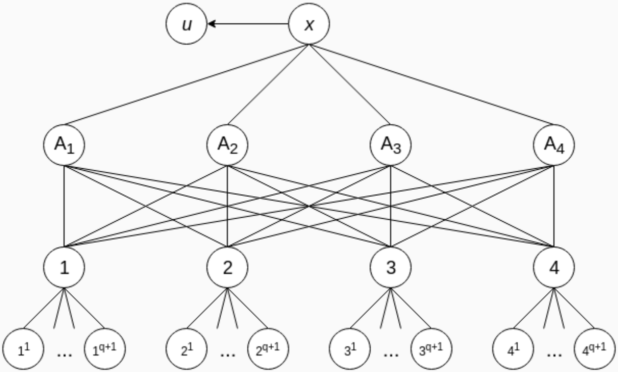

Figure 7: Redução do Exact-q Set Cover para $deg(2)$NCG.

Limitantes para o Diâmetro de uma Rede

Teorema
Considere variantes do degNCG onde o preço de qualquer aresta (u, v) *paga pelo agente* u *seja uma função linear qualquer do grau de* v *em* G*, ou seja, o preço pago para criação da aresta* $(u, v) = \beta \times deg_G(v) + \gamma$*. Então o diâmetro de qualquer rede em Puro Equilíbrio de Nash para o degNCG é constante.*

Limitantes para o Diâmetro de uma Rede

- Considere uma rede em Puro Equilíbrio de Nash para o degNCG e que o diâmetro seja pelo menos 4.
- Deve existir pelo menos uma par de vértices a e b, tal que $D_G(a, b) = D$.
- O custo de distância do agente a será pelo menos
  $$D + |B_1(b)| \times (D - 1) + |N_2(a)|$$
- Se o agente a pagar pela aresta (a, b) o custo de distância dele melhora em pelo menos
  $$D - 1 + |B_1(b)| \times (D - 3)$$

Limitantes para o Diâmetro de uma Rede

Prova.

- Como G é um Puro Equilíbrio de Nash sabemos que:

  $D - 1 + |B_1(b)| \times (D - 3) \leq \beta \times deg_G(v) + \gamma$

  $D - 1 + deg_G(b) \times (D - 3) \leq \beta \times deg_G(v) + \gamma$

  $D \leq \frac{(\beta+3)\times deg_G(b)+\gamma+1}{deg_G(b)+1}$

  $D \leq \frac{(\beta+3)\times deg_G(b)}{deg_G(b)+1} + \frac{\gamma+1}{deg_G(b)+1} < \beta + 3 + \frac{\gamma+1}{deg_G(b)+1} \in O(1)$

■

Limitantes para o Diâmetro de uma Rede

- Adotando $\beta = 1$ e $\gamma = -1$ temos que

$$D < \beta + 3 + \frac{\gamma+1}{deg_G(b)+1}$$
$$D < 1 + 3 + \frac{-1+1}{deg_G(b)+1}$$
$$D < 4$$

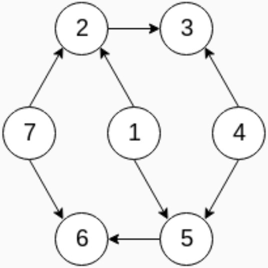

Figure 8: Rede NE para o degNCG onde $D = 3$.

Preço da Anarquia

Teorema
Se uma rede G é um (k)NE para o deg(k)NCG, então o custo social é no máximo $O(D)$ vezes que o mínimo custo social possível.

- Obter um limitante inferior para o mínimo custo social possível.
- Obter um limitante superior para uma rede G que é um (k)NE.
- Analisando separadamente
  - Custo da distância.
  - Custo para criação das arestas
    - Arestas de corte.
    - Arestas não de corte.

Preço da Anarquia

- Imagine que todos os pares de agentes estão no máximo 1 de distância, então temos que $\Omega(n^2)$.
- Custo da distância
  - Se a rede tem diâmetro D, então o custo da distância é no máximo $O(n^2 D)$.
- Custo para criação das arestas
  - Arestas de corte.
    - Existe no máximo $n-1$ arestas de corte.
    - O valor máximo que pode ser pago por uma aresta é $n-1$, então temos $(n-1) \times (n-1) \in O(n^2)$.
  - Arestas não de corte.

Preço da Anarquia

- Fixe uma agente u.
- Compute a menor distância de u para os demais agente e obteremos uma árvore T_u.
- Seja (u, v) uma aresta não de corte.
- R_v é o conjunto de vértices w em que o menor caminho de u para w em T_u passa por v.
- Removendo a aresta (u, v) então $D_{G/\ \{(u,v)\}}(u, v) \leq 2D$
- $deg_G(v) - 1 \leq 2D|R_v|$
- $\sum_{v \in S(u)} deg_G(v) - 1 \leq 2D \sum_{v \in S(u)} |R_v| < 2nD$
- Considerando todos os vértices temos que o custo máximo pago por arestas não de corte será $2n^2 D \in O(n^2 D)$.

Preço da Anarquia

Teorema
Se uma rede G é um (k)NE para o deg(k)NCG, então o custo social é no máximo $O(D)$ vezes que o mínimo custo social possível.

Prova.

- Limitante inferior $\Omega(n^2)$.
- Limitante superior $O(n^2 D + n^2 + n^2 D) = O(n^2 D)$.

$\blacksquare$

Preço da Anarquia

- Pelos teoremas anteriores temos que

Teorema
O preço da anarquia para o degNCG $\in O(1)$.

Considerações Finais

Mais Resultados

- Preço da Anarquia
  - O preço da anarquia para o deg(4)NCG $\in O(1)$.
  - O preço da anarquia para o deg(2)NCG $\in O(\sqrt{n})$.
  - O preço da anarquia para o deg(k)AOG $\in \theta(n)$ para qualquer k.
- Propriedade de Melhoria Finita (FIP)
  - deg(2)NCG.
  - deg(2)AOG.

Referências

A. Chauhan, P. Lenzner, A. Melnichenko, and L. Molitor.
Selfish network creation with non-uniform edge cost.
In *Algorithmic Game Theory*, pages 160–172, Cham, 2017. Springer International Publishing.

A. Chauhan, P. Lenzner, A. Melnichenko, and L. Molitor.
Selfish network creation with non-uniform edge cost.
CoRR, abs/1706.10200, 2017.

A. Fabrikant, A. Luthra, E. Maneva, C. H. Papadimitriou, and S. Shenker.
On a network creation game.
In *Proceedings of the Twenty-second Annual Symposium on Principles of Distributed Computing*, PODC '03, pages 347–351, New York, NY, USA, 2003. ACM.

Dúvidas?