ALONSO ALI

JOGOS COMBINATÓRIOS IMPARCIAIS

JOGOS COMBINATÓRIOS

- Dois jogadores

JOGOS COMBINATÓRIOS

- Dois jogadores
- Conjunto de estados

JOGOS COMBINATÓRIOS

- Dois jogadores
- Conjunto de estados
- Conjunto de movimentos permitidos (pares ordenados de estados)

JOGOS COMBINATÓRIOS

- Dois jogadores
- Conjunto de estados
- Conjunto de movimentos permitidos (pares ordenados de estados)
- Estado inicial e estados terminais

JOGOS COMBINATÓRIOS

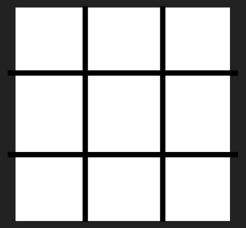
- Dois jogadores
- Conjunto de estados
- Conjunto de movimentos permitidos (pares ordenados de estados)
- Estado inicial e estados terminais
- Sem aleatoriedade

JOGOS COMBINATÓRIOS

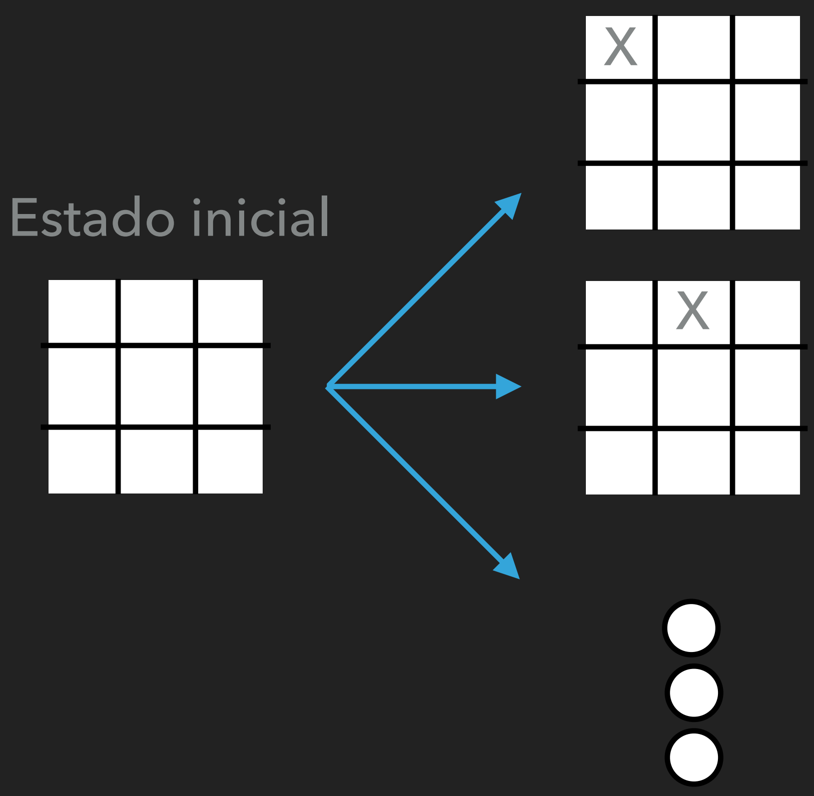
- Dois jogadores
- Conjunto de estados
- Conjunto de movimentos permitidos (pares ordenados de estados)
- Estado inicial e estados terminais
- Sem aleatoriedade
- Resultados: vitória, derrota ou empate

EXEMPLO DE JOGO COMBINATÓRIO: JOGO DA VELHA

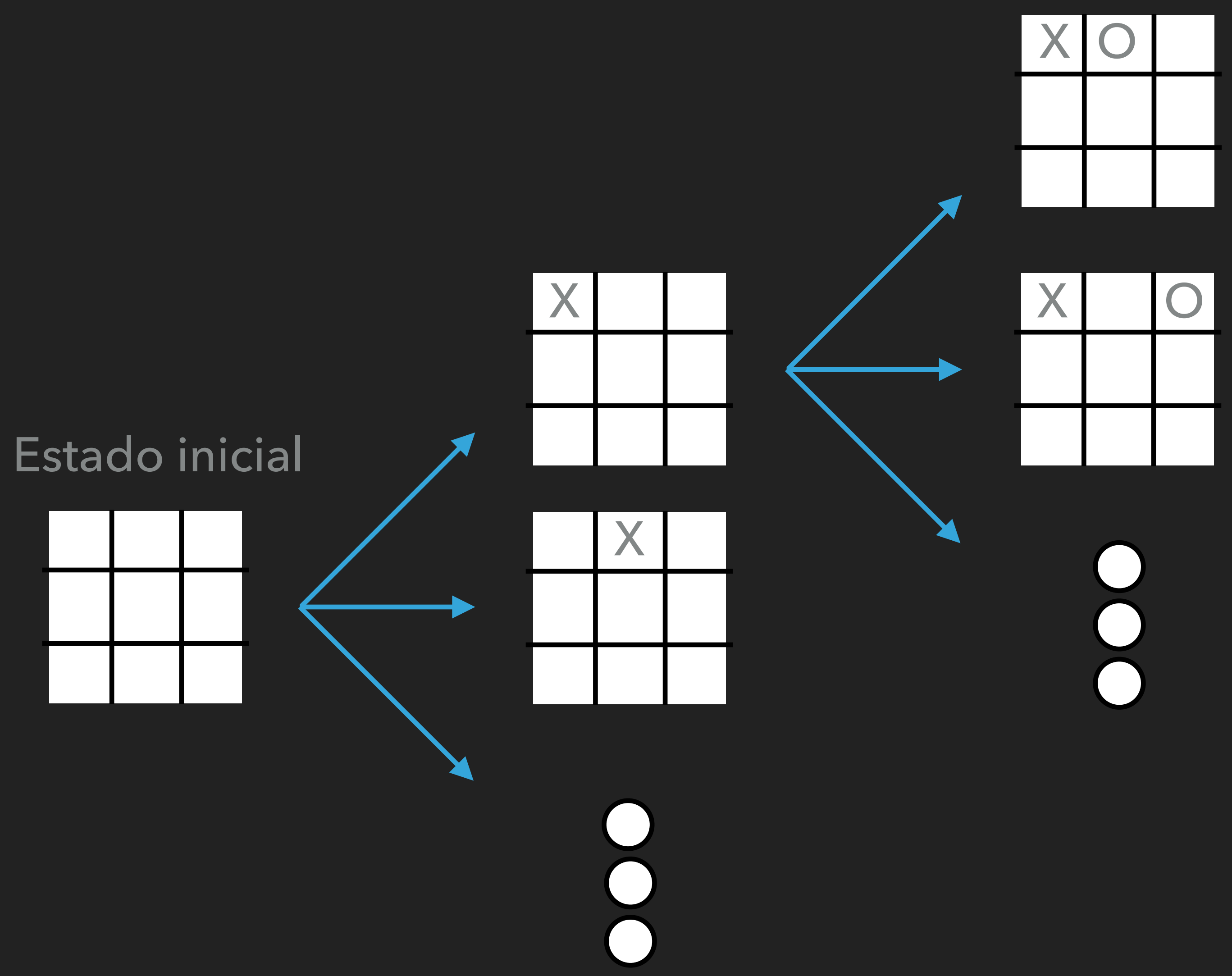
Estado inicial



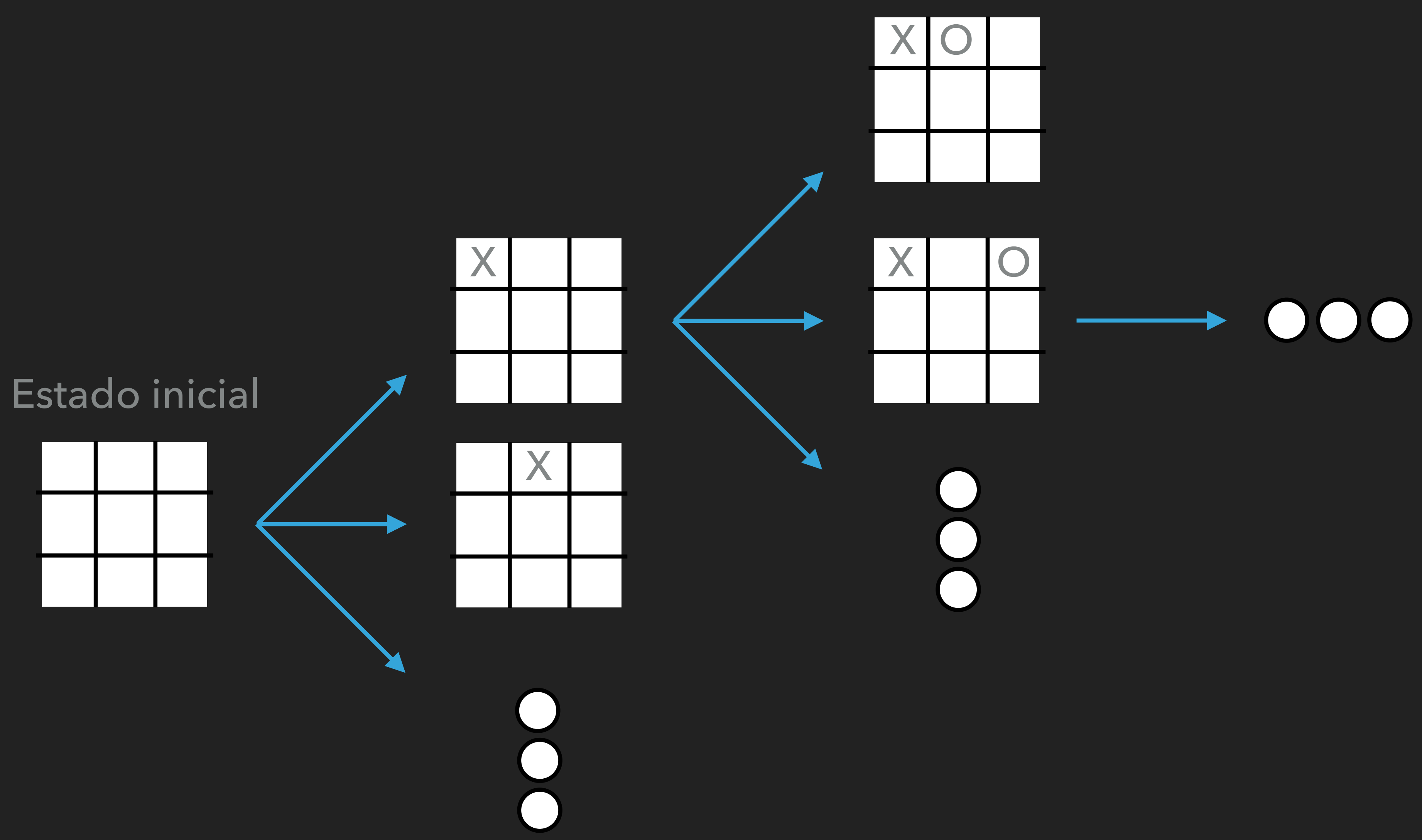
EXEMPLO DE JOGO COMBINATÓRIO: JOGO DA VELHA



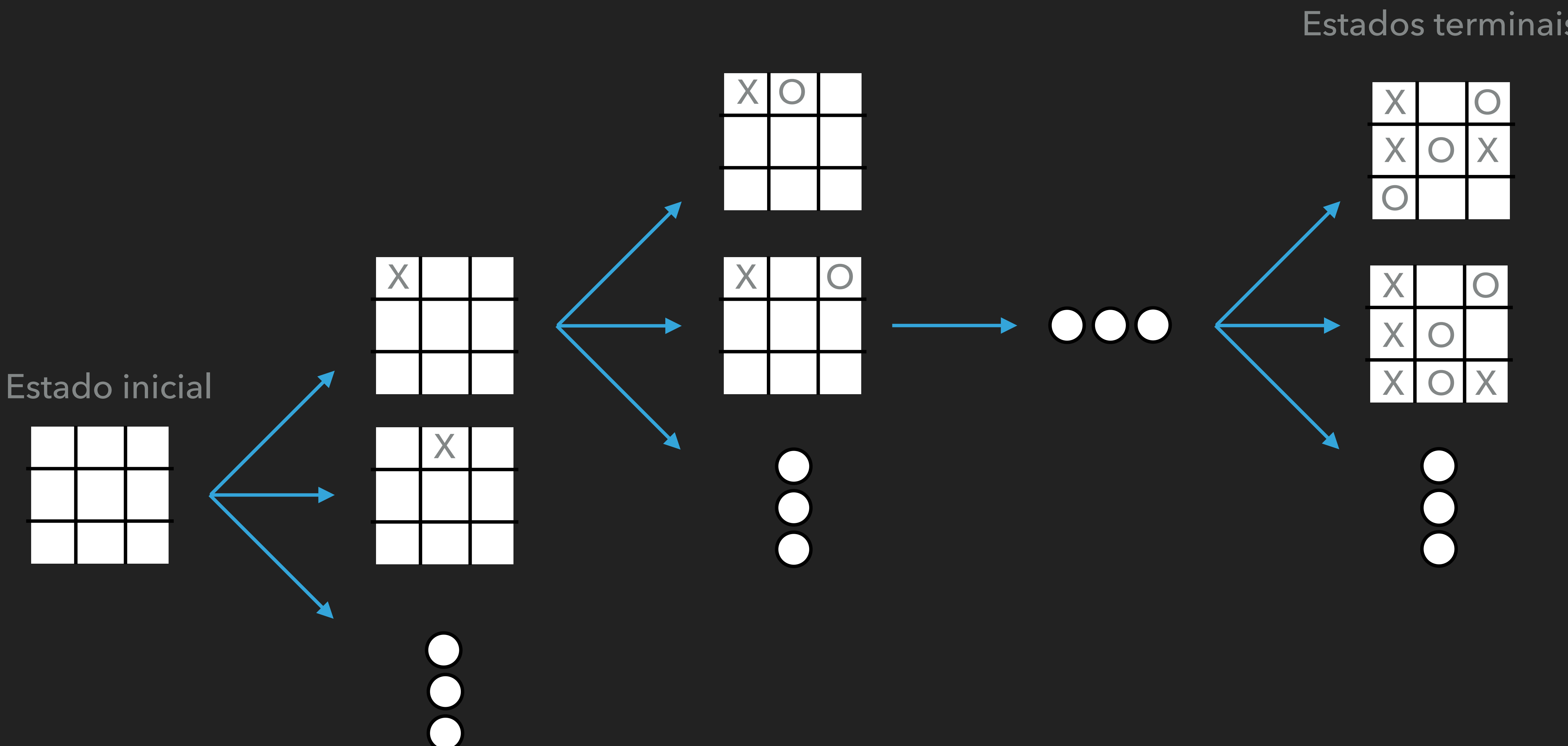
EXEMPLO DE JOGO COMBINATÓRIO: JOGO DA VELHA



EXEMPLO DE JOGO COMBINATÓRIO: JOGO DA VELHA



EXEMPLO DE JOGO COMBINATÓRIO: JOGO DA VELHA



JOGOS COMBINATÓRIOS

Jogos Parciais:

Jogos Imparciais:

JOGOS COMBINATÓRIOS

Jogos Parciais:

- Movimentos são diferentes para os jogadores
- Xadrez, Damas, etc…

Jogos Imparciais:

JOGOS COMBINATÓRIOS

Jogos Parciais:

- Movimentos são diferentes para os jogadores
- Xadrez, Damas, etc…

Jogos Imparciais:

- Movimentos iguais para os jogadores
- Jogo da velha, **Jogos de subtração**, etc…

JOGO DA REMOÇÃO

- Jogadores A e B

JOGO DA REMOÇÃO

- Jogadores A e B
- Pilha com 21 moedas

JOGO DA REMOÇÃO

- Jogadores *A* e *B*
- Pilha com 21 moedas
- Jogadores alternam removendo 1, 2 ou 3 moedas da pilha

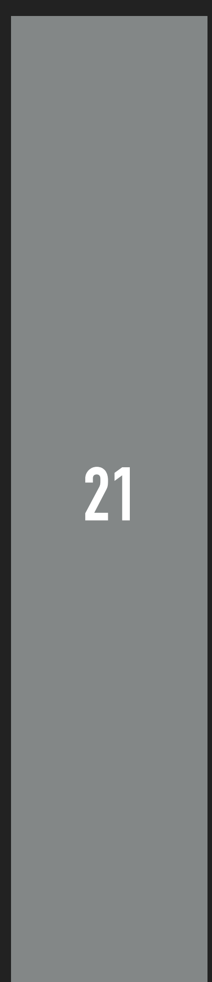
JOGO DA REMOÇÃO

- Jogadores A e B
- Pilha com 21 moedas
- Jogadores alternam removendo 1, 2 ou 3 moedas da pilha
- Último a remover alguma moeda ganha

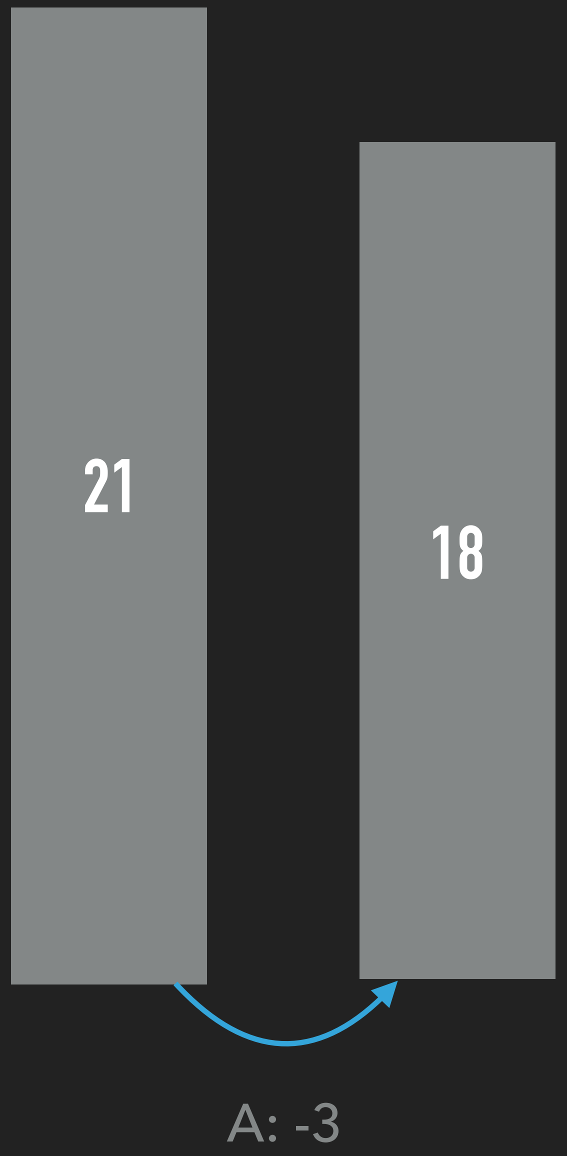
JOGO DA REMOÇÃO

- Jogadores A e B
- Pilha com 21 moedas
- Jogadores alternam removendo 1, 2 ou 3 moedas da pilha
- Último a remover alguma moeda ganha
- Jogador A começa

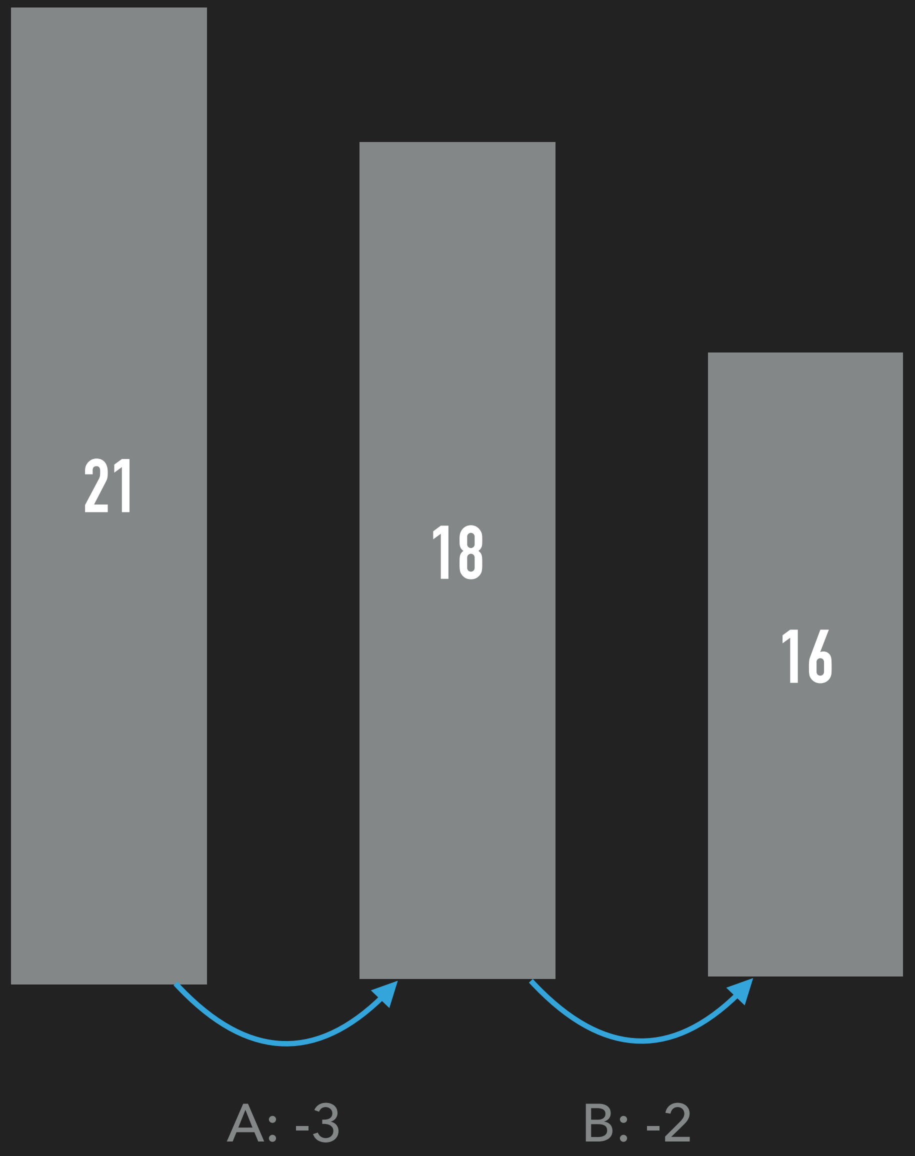
EXEMPLO DE PARTIDA DO JOGO DA REMOÇÃO



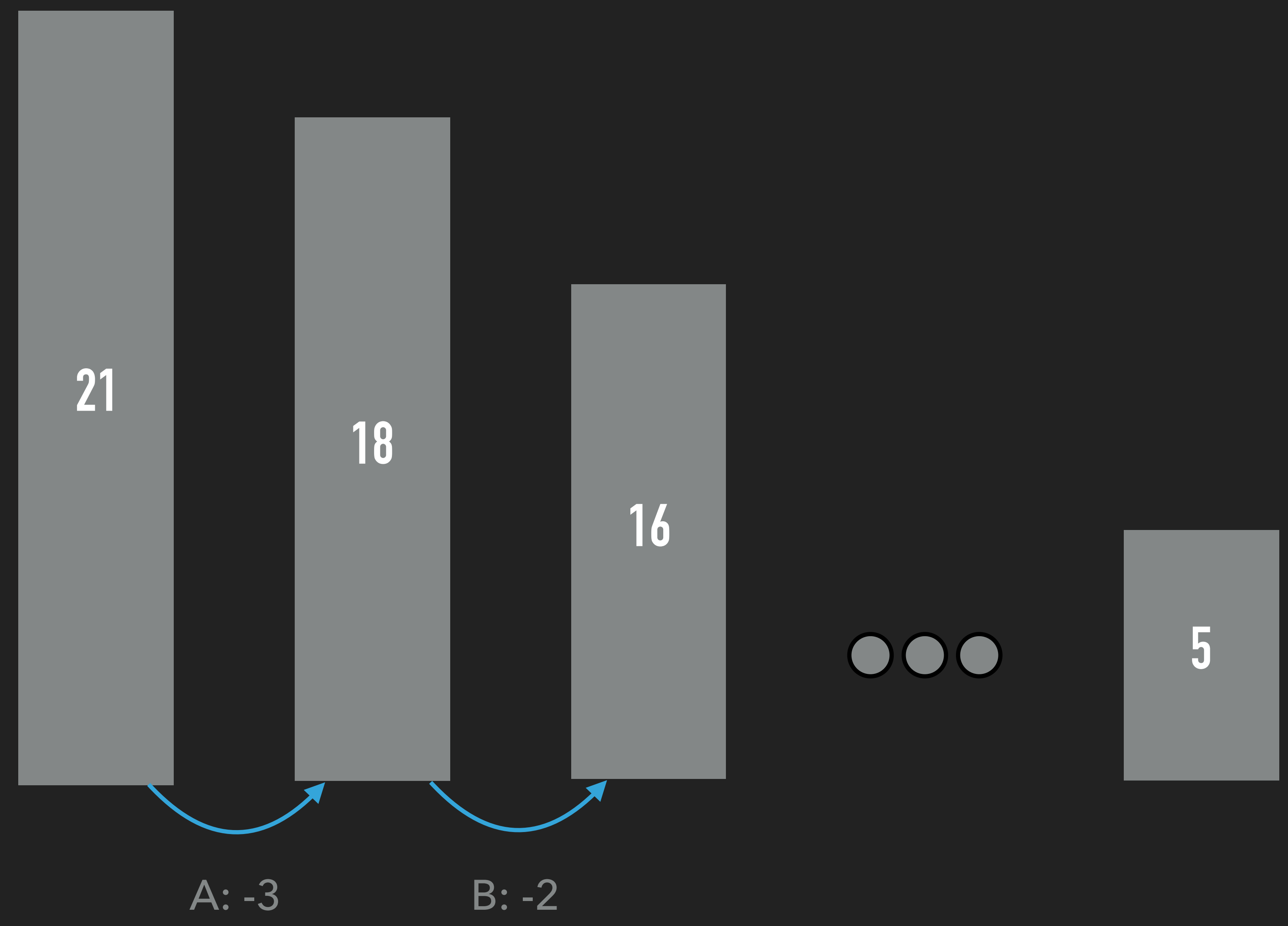
EXEMPLO DE PARTIDA DO JOGO DA REMOÇÃO



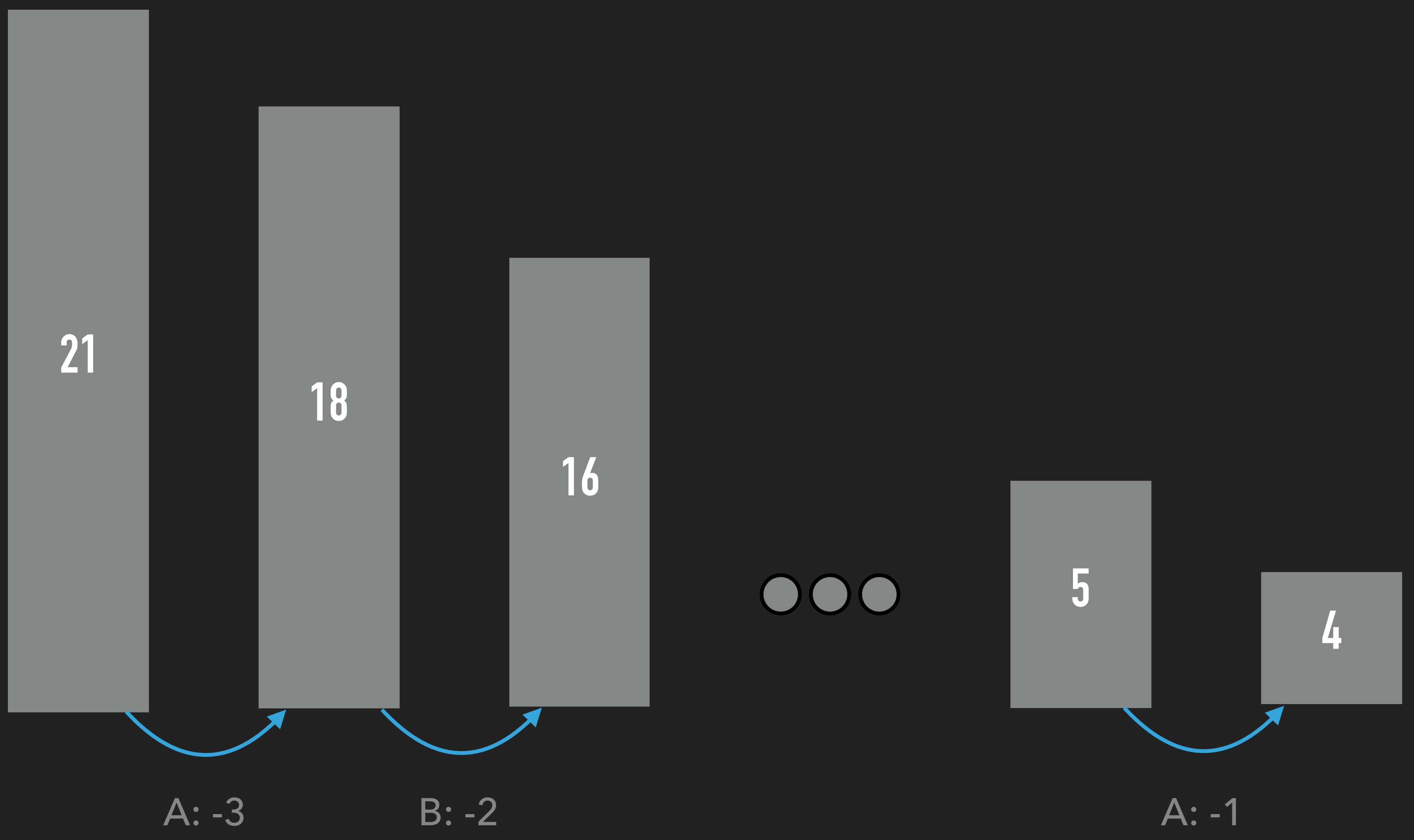
EXEMPLO DE PARTIDA DO JOGO DA REMOÇÃO



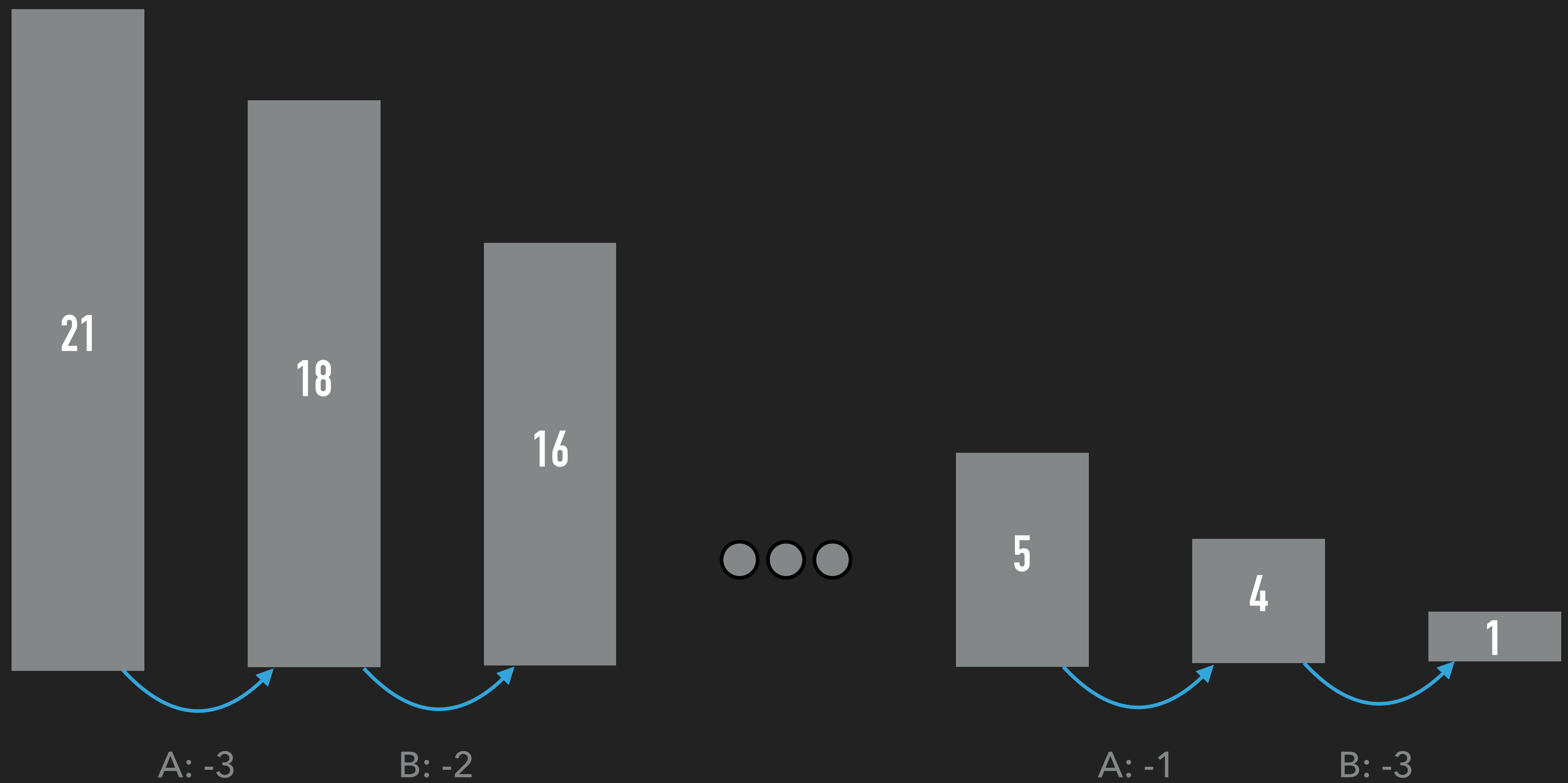
EXEMPLO DE PARTIDA DO JOGO DA REMOÇÃO



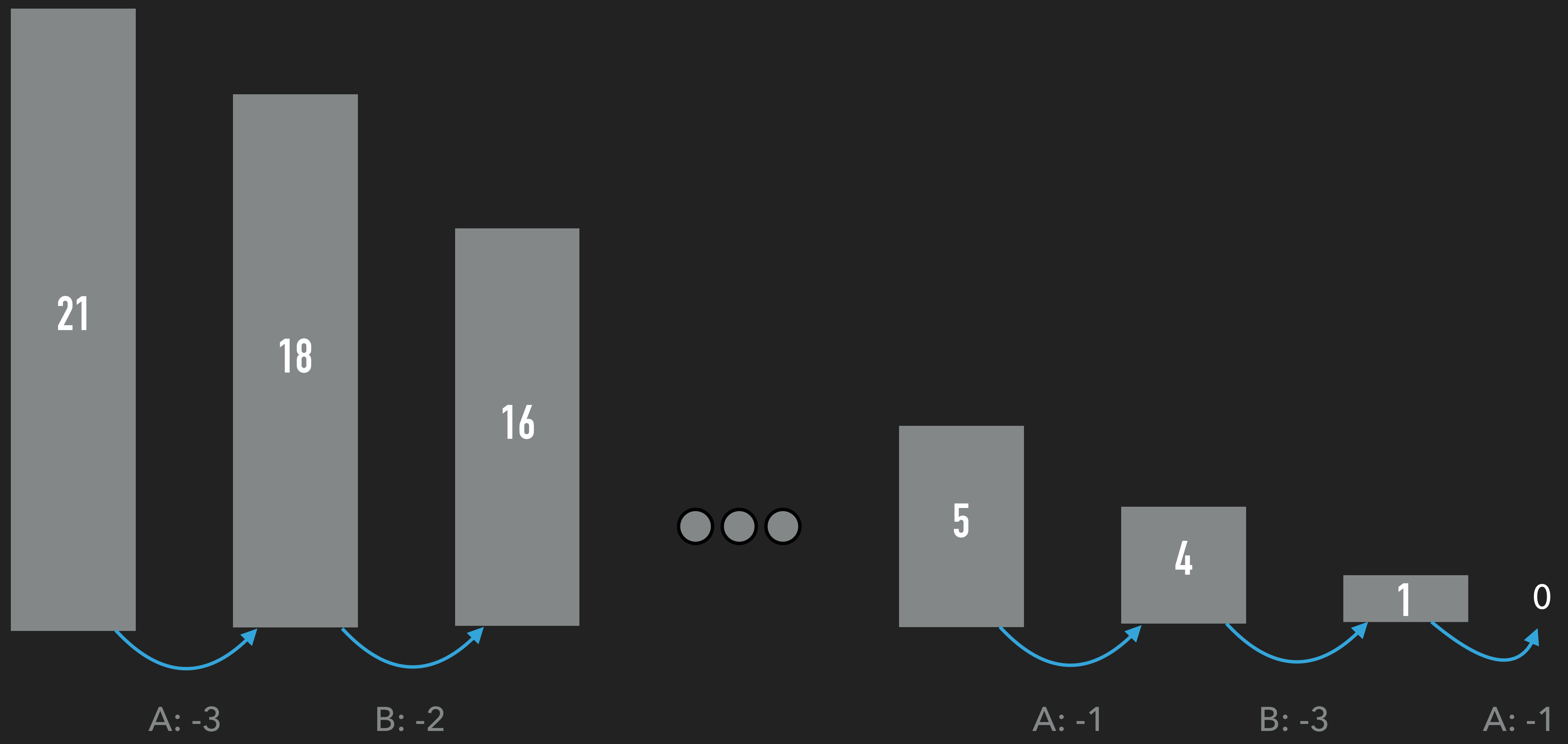
EXEMPLO DE PARTIDA DO JOGO DA REMOÇÃO



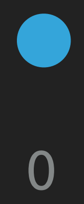
EXEMPLO DE PARTIDA DO JOGO DA REMOÇÃO



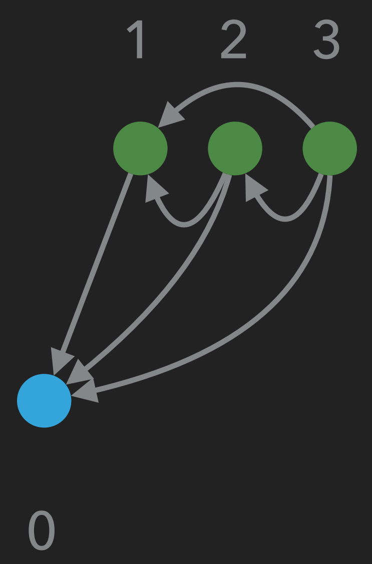
EXEMPLO DE PARTIDA DO JOGO DA REMOÇÃO



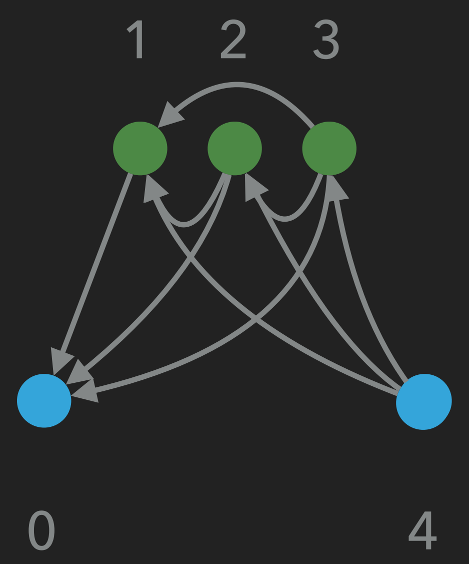
INDUÇÃO REVERSA



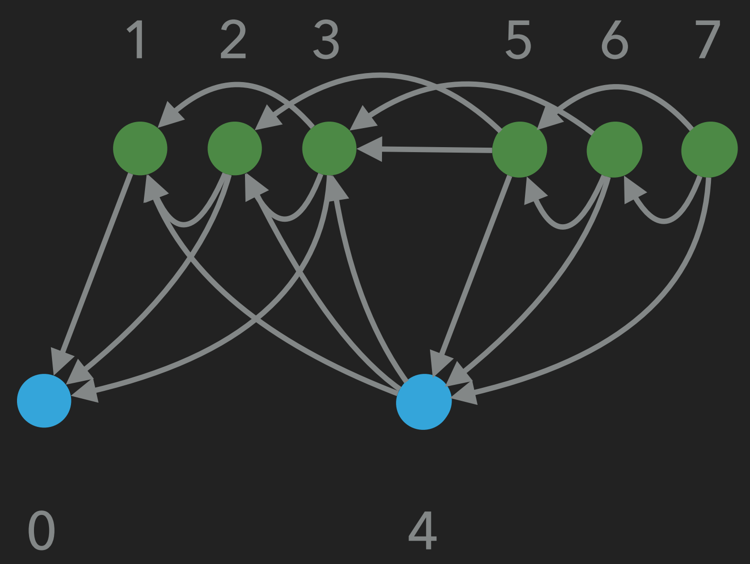
INDUÇÃO REVERSA



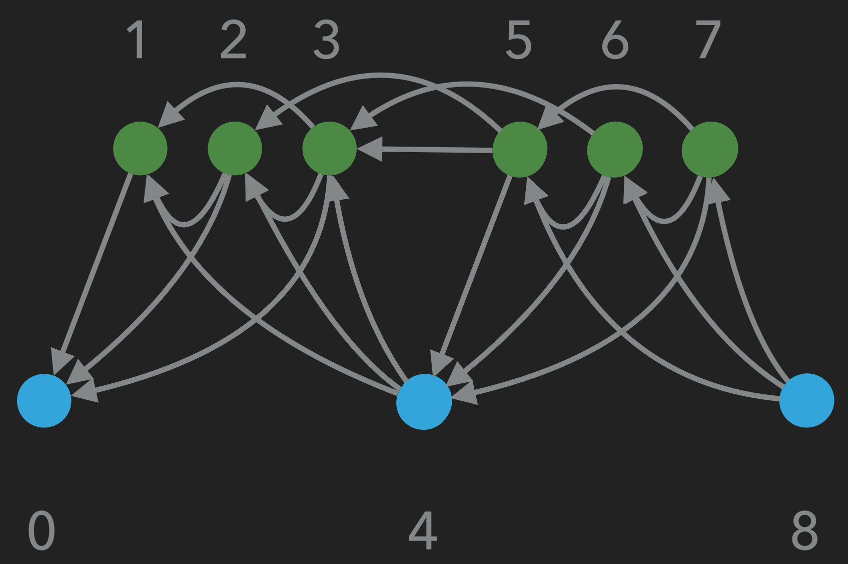
INDUÇÃO REVERSA



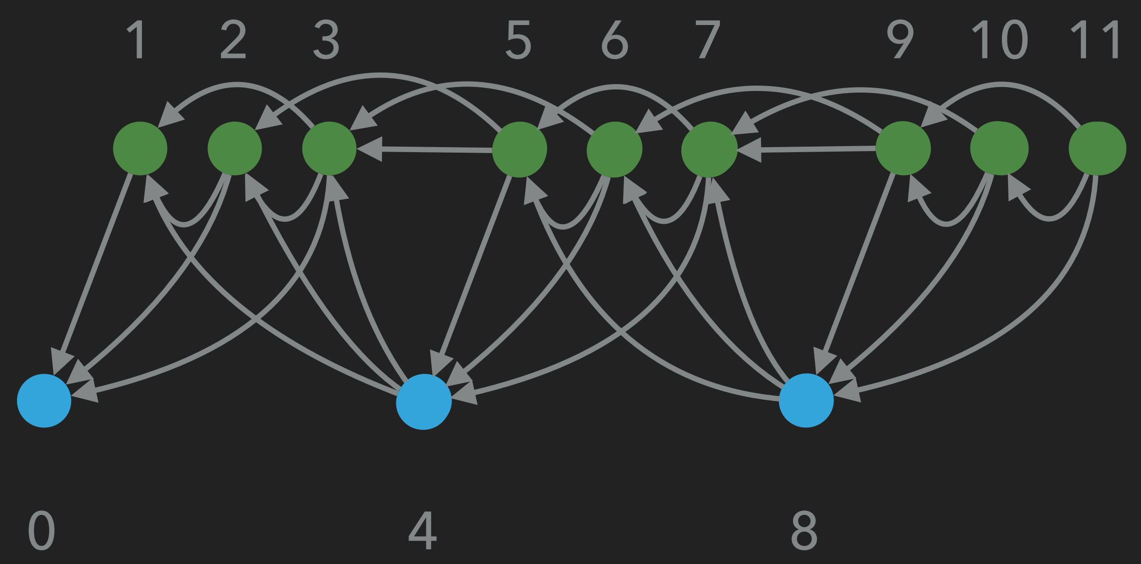
INDUÇÃO REVERSA



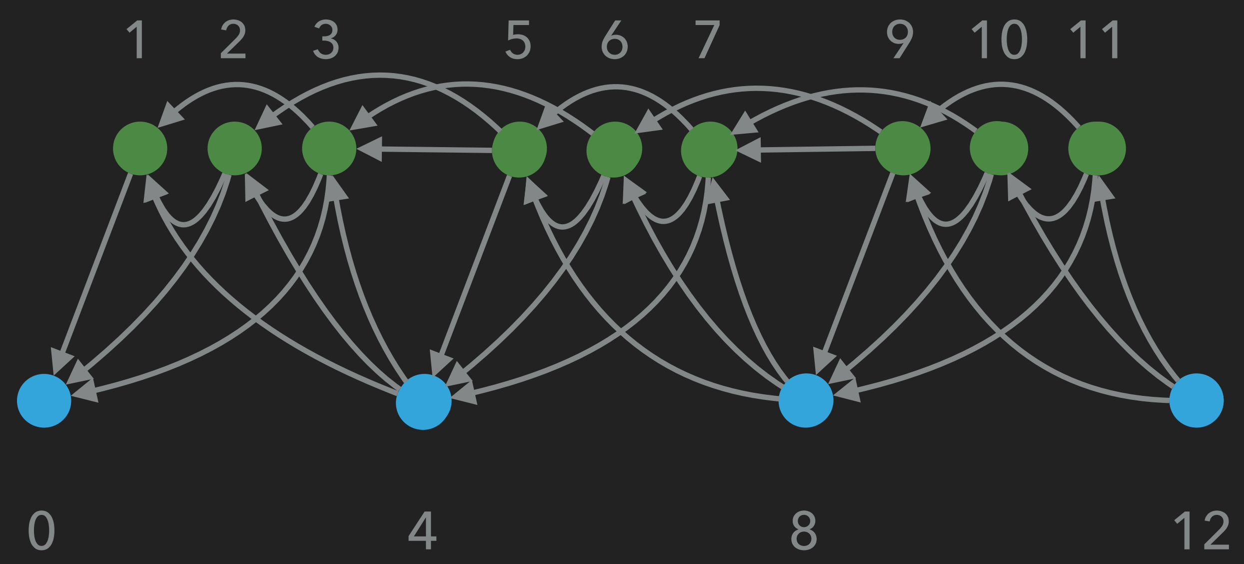
INDUÇÃO REVERSA



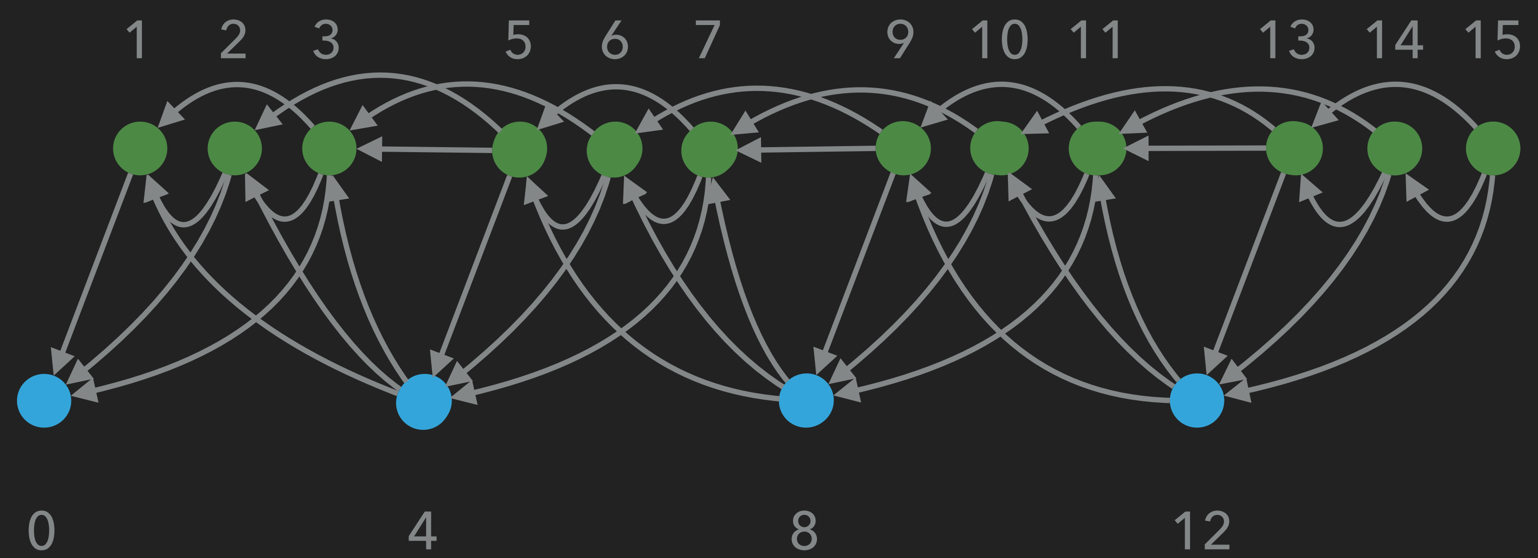
INDUÇÃO REVERSA



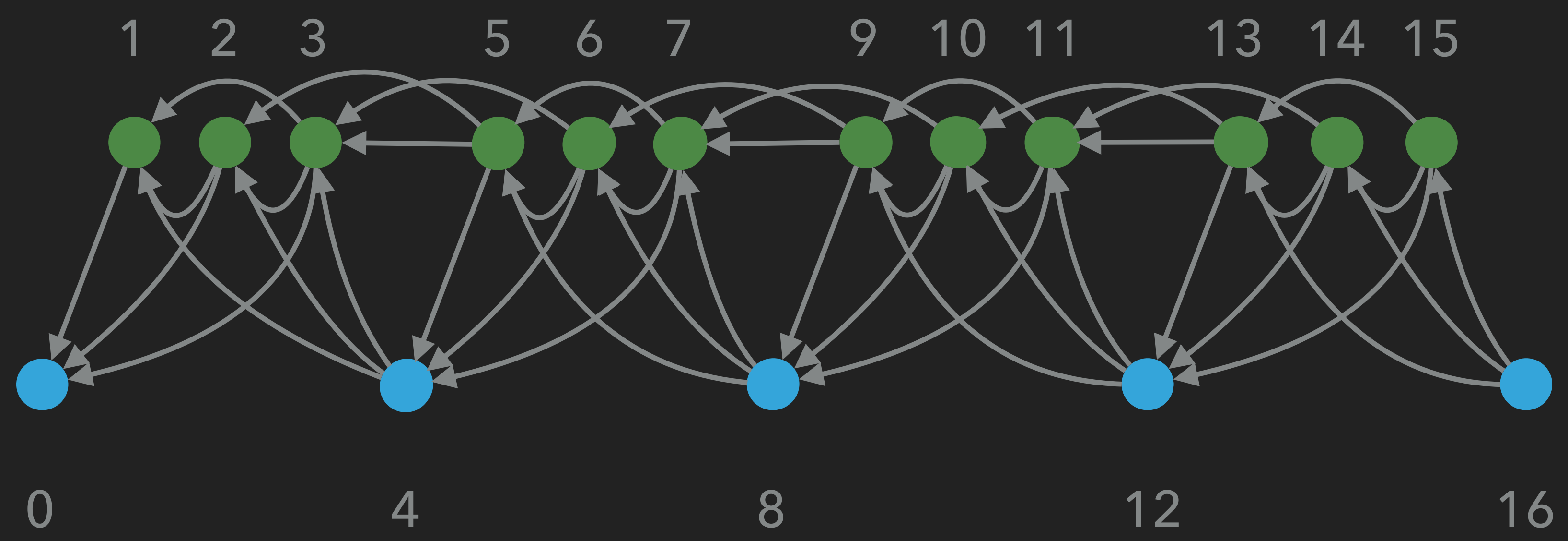
INDUÇÃO REVERSA



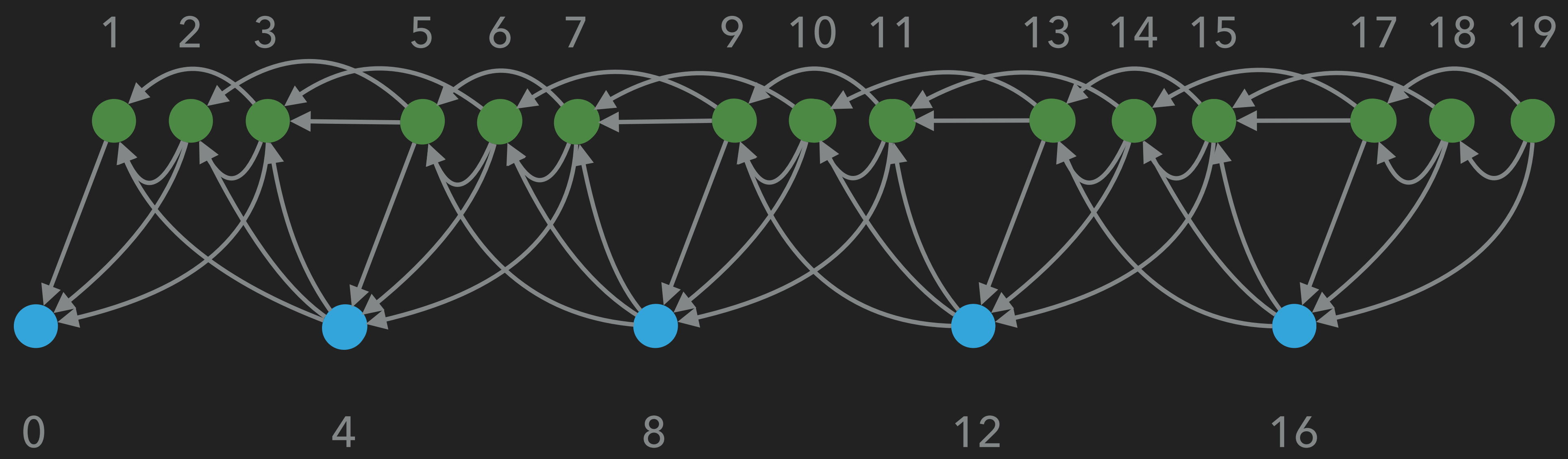
INDUÇÃO REVERSA



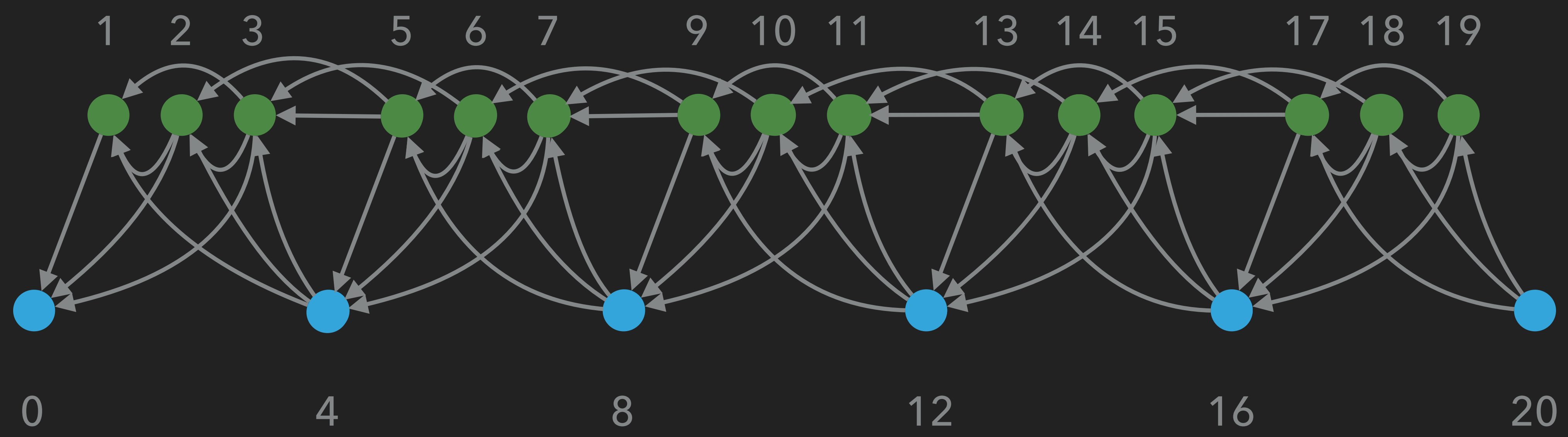
INDUÇÃO REVERSA



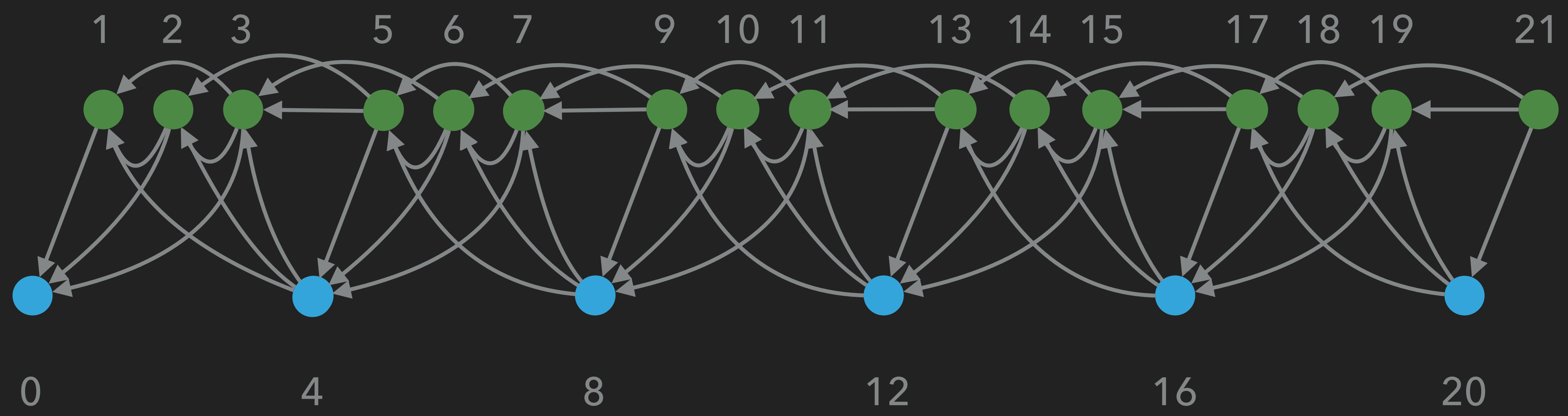
INDUÇÃO REVERSA



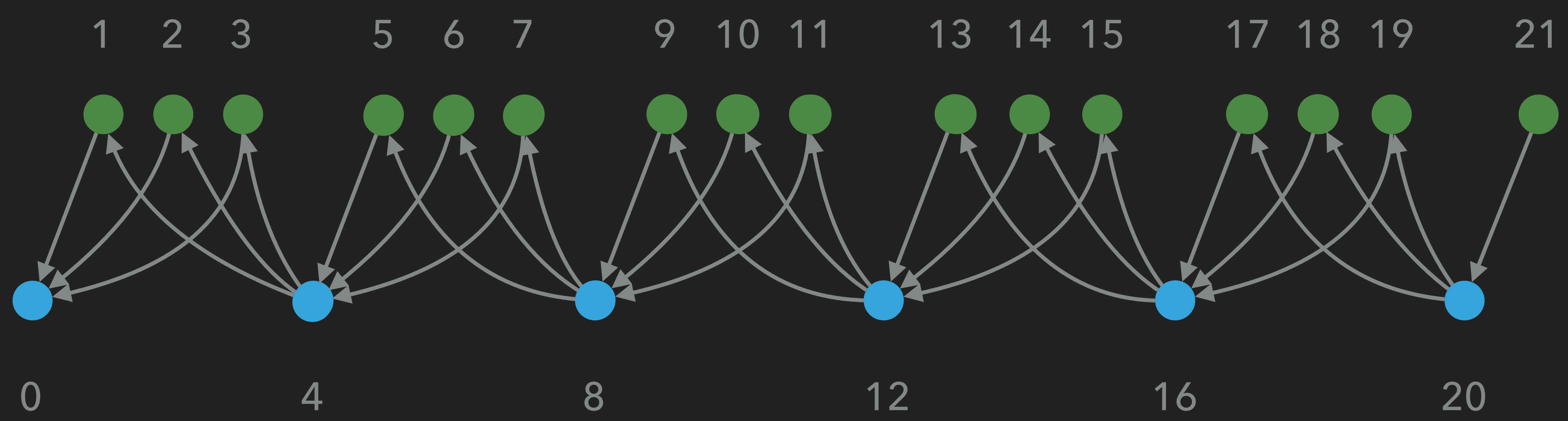
INDUÇÃO REVERSA



INDUÇÃO REVERSA



INDUÇÃO REVERSA

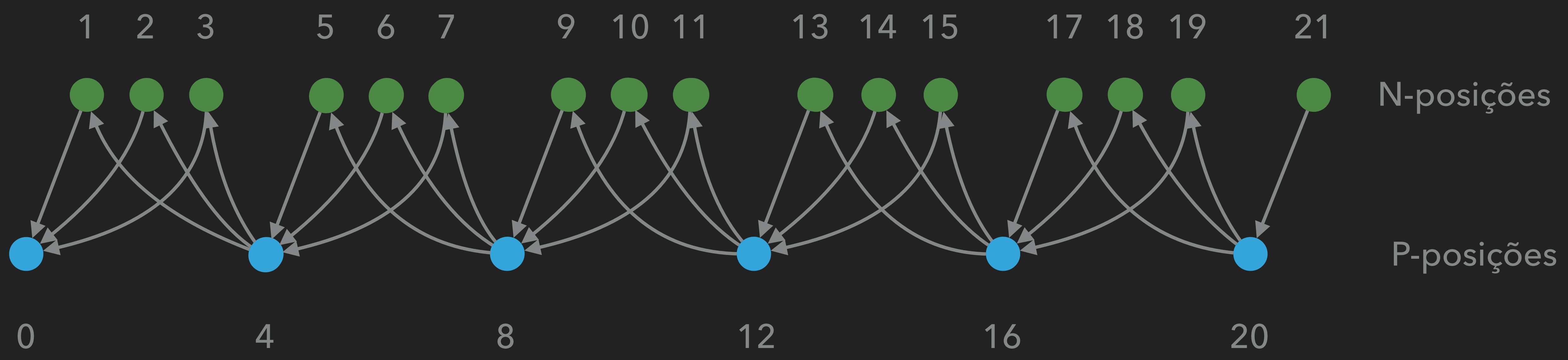


P-POSIÇÃO E N-POSIÇÃO

- Definição: Um estado é chamado de P-posição se é um estado perdedor. Um estado é chamado de N-posição se é um estado ganhador.

P-POSIÇÃO E N-POSIÇÃO

- Definição: Um estado é chamado de P-posição se é um estado perdedor. Um estado é chamado de N-posição se é um estado ganhador.



JOGOS DE SUBTRAÇÃO

- Conjunto S de inteiros positivos
- Pilha de x moedas
- Dois jogadores alternam movimentos
- Um movimento consiste em remover $s \in S$ moedas
- Último jogador a realizar um movimento ganha

JOGOS DE SUBTRAÇÃO

- Considere uma instância onde $S = \{1,3,4\}$

$P = \{ \qquad \}$

$N = \{ \qquad \}$

JOGOS DE SUBTRAÇÃO

- Considere uma instância onde *S = {1,3,4}*

P = { 0 }

N = { }

P

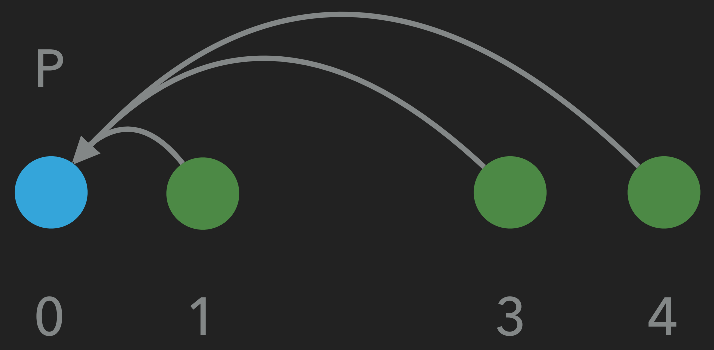
0

JOGOS DE SUBTRAÇÃO

- Considere uma instância onde $S = \{1,3,4\}$

P = { 0 }

N = { 1,3,4 }

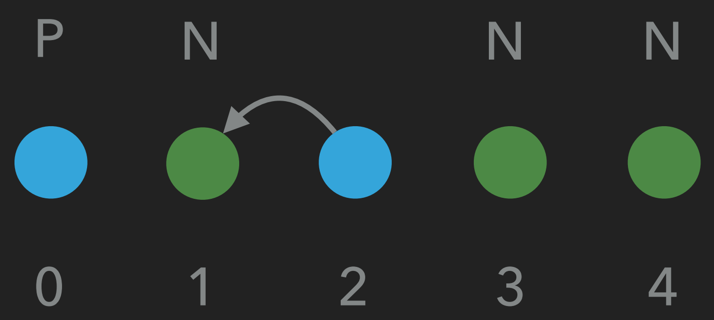


JOGOS DE SUBTRAÇÃO

- Considere uma instância onde *S = {1,3,4}*

P = { 0,2 }

N = { 1,3,4 }



JOGOS DE SUBTRAÇÃO

- Considere uma instância onde *S = {1,3,4}*

P = { 0,2 }

N = { 1,3,4,5,6 }

JOGOS DE SUBTRAÇÃO

- Considere uma instância onde *S = {1,3,4}*

P = { 0,2,7 }

N = { 1,3,4,5,6 }

JOGOS DE SUBTRAÇÃO

- Considere uma instância onde $S = \{1,3,4\}$

P = { 0,2,7 }

N = { 1,3,4,5,6,8,10,11 }

JOGOS DE SUBTRAÇÃO

- Considere uma instância onde *S = {1,3,4}*

P = { 0,2,7,9 }

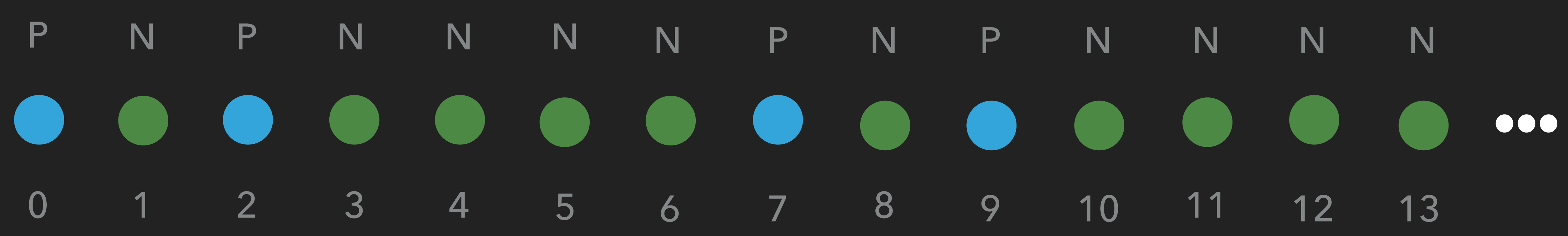
N = { 1,3,4,5,6,8,10,11 }

JOGOS DE SUBTRAÇÃO

- Considere uma instância onde $S = \{1,3,4\}$

$P = \{ 0,2,7,9 \}$

$N = \{ 1,3,4,5,6,8,10,11,12,13,\ldots\}$

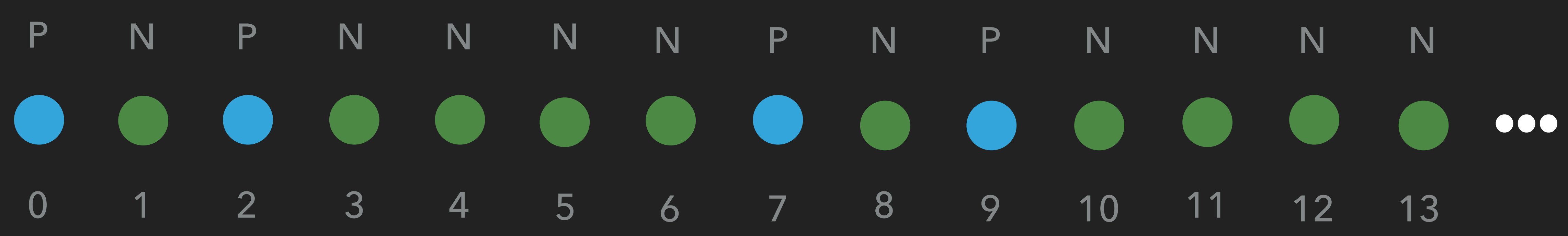


JOGOS DE SUBTRAÇÃO

- Considere uma instância onde *S = {1,3,4}*

P = { 0,2,7,9,14,16,21,23,28,... }

N = { 1,3,4,5,6,8,10,11,12,13,...}



JOGOS DE SUBTRAÇÃO

- Considere uma instância onde $S = \{1,3,4\}$

Um estado com m moedas é uma P-posição em um jogo de subtração com $S = \{1,3,4\}$ sse

$$m \equiv 0 \pmod 7 \text{ ou } m \equiv 2 \pmod 7$$

JOGOS DE SUBTRAÇÃO

- Considere uma instância onde $S = \{1,3,4\}$

Um estado com m moedas é uma P-posição em um jogo de subtração com $S = \{1,3,4\}$ sse

$$m \equiv 0 \pmod 7 \text{ ou } m \equiv 2 \pmod 7$$

Se $x = 150$: Quem começar ganha, $150 \equiv 3 \pmod 7$

JOGOS DE SUBTRAÇÃO

- Considere uma instância onde $S = \{1,3,4\}$

Um estado com m moedas é uma P-posição em um jogo de subtração com S = {1,3,4} sse

$$m \equiv 0 \pmod 7 \text{ ou } m \equiv 2 \pmod 7$$

Se $x = 150$: Quem começar ganha, $150 \equiv 3 \pmod 7$

Se $x = 100$: Quem começar perde, $100 \equiv 2 \pmod 7$

JOGOS DE SUBTRAÇÃO

- Considere uma instância onde $S = \{1,3,4\}$

Um estado com m moedas é uma P-posição em um jogo de subtração com $S = \{1,3,4\}$ sse

$$m \equiv 0 \pmod 7 \text{ ou } m \equiv 2 \pmod 7$$

Se $x = 150$: Quem começar ganha, $150 \equiv 3 \pmod 7$
Se $x = 100$: Quem começar perde, $100 \equiv 2 \pmod 7$
Se $x = 354$: Quem começar ganha, $354 \equiv 4 \pmod 7$

ALGORITMO ROTULADOR

1: Rotular todo estado terminal como uma P-posição

2: Rotular todo estado adjacente à uma P-posição como uma N-posição

3: Rotular como P-posição todo estado que só possui N-posições adjacentes

4: Se nenhum estado foi rotulado no passo 3, pare; senão, volte ao passo 2

JOGO DE NIM

- Três pilhas contendo x_1, x_2 e x_3 moedas, respectivamente

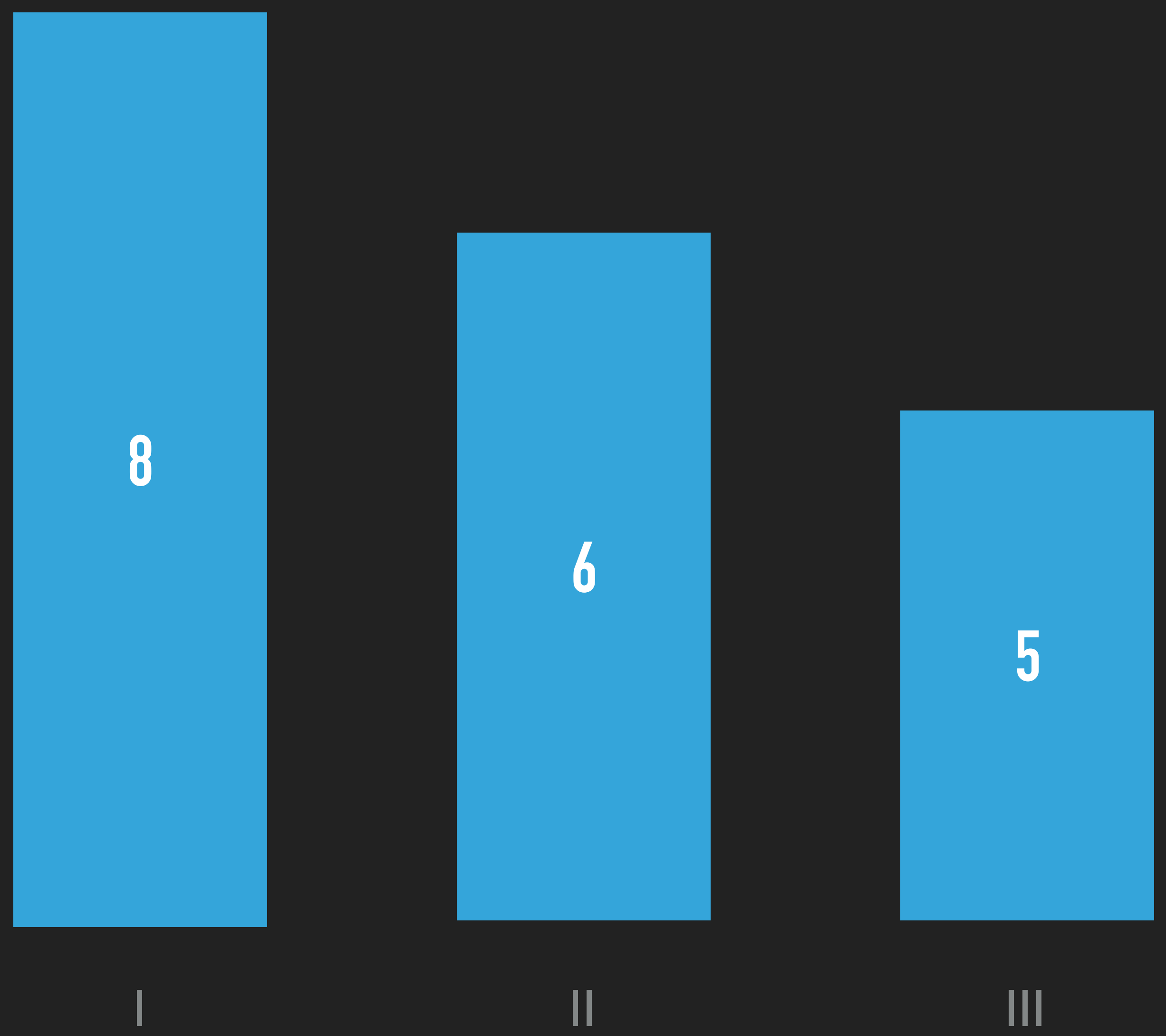
JOGO DE NIM

- Três pilhas contendo x_1, x_2 e x_3 moedas, respectivamente
- Remover qualquer numero de moedas de uma única pilha

JOGO DE NIM

- Três pilhas contendo x_1, x_2 e x_3 moedas, respectivamente
- Remover qualquer numero de moedas de uma única pilha
- Ganha quem fizer um movimento por último

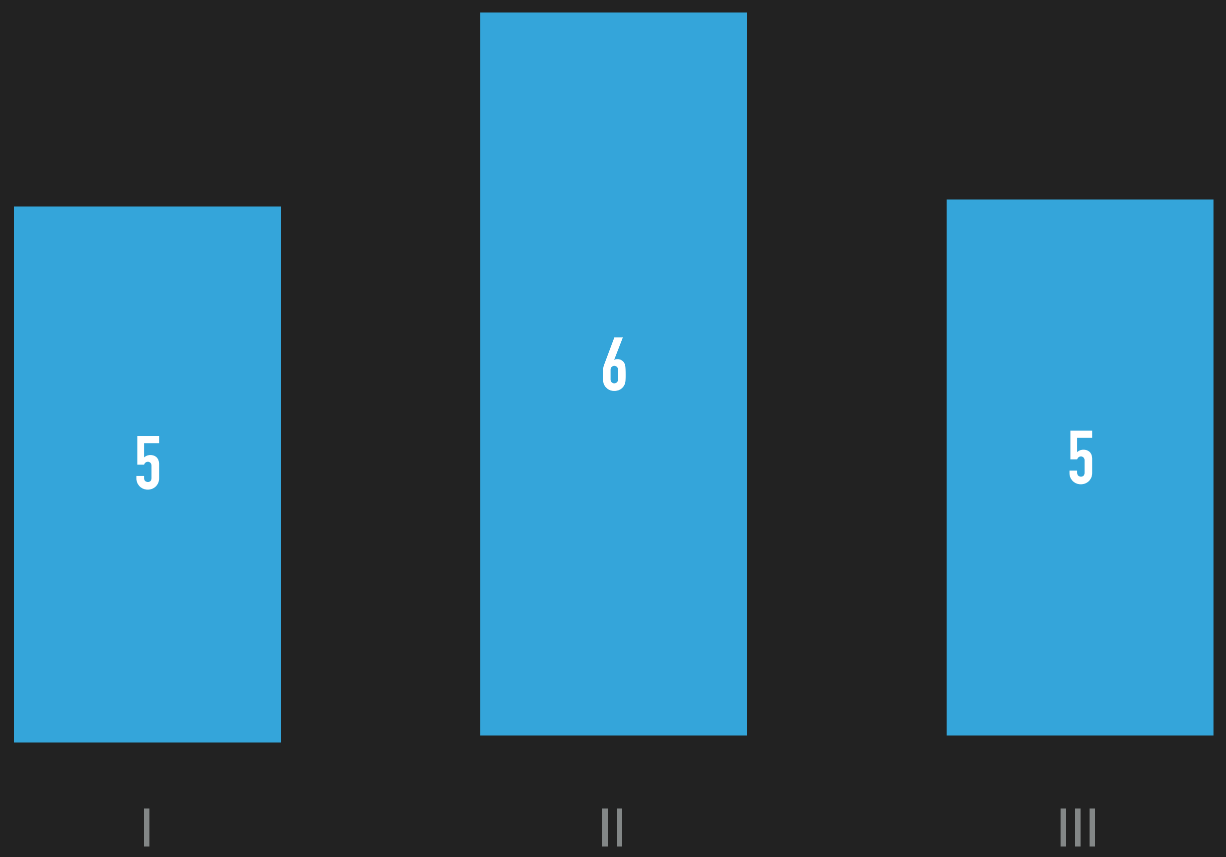
JOGO DE NIM



JOGO DE NIM

Jogador *A* remove

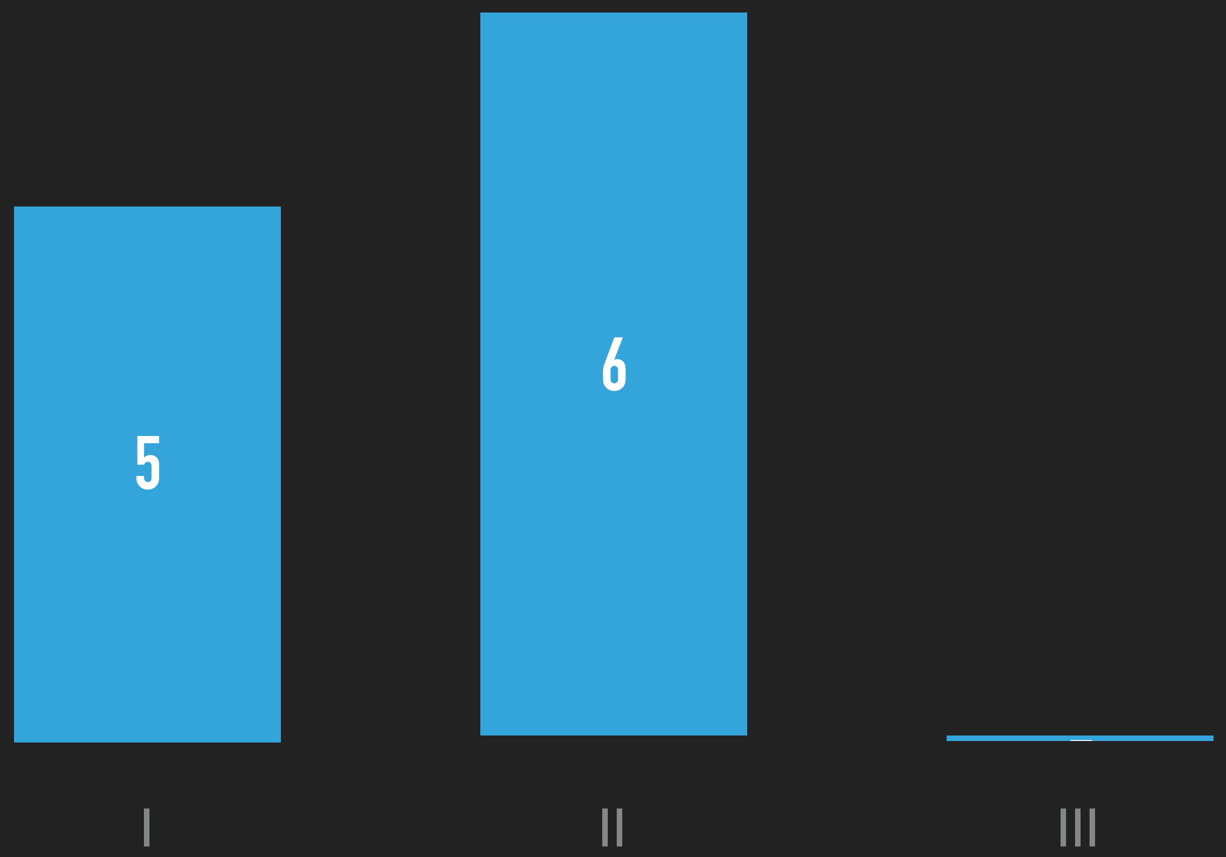
3 moedas da pilha *I*



JOGO DE NIM

Jogador *B* remove

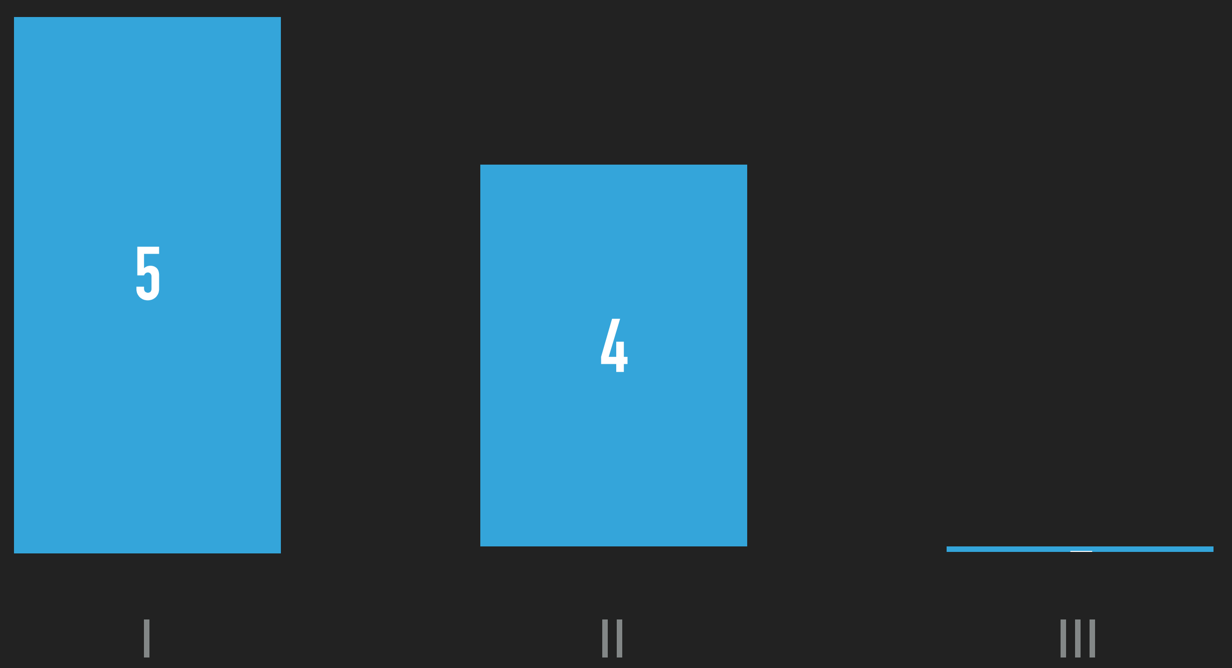
5 moedas da pilha III



JOGO DE NIM

Jogador *A* remove

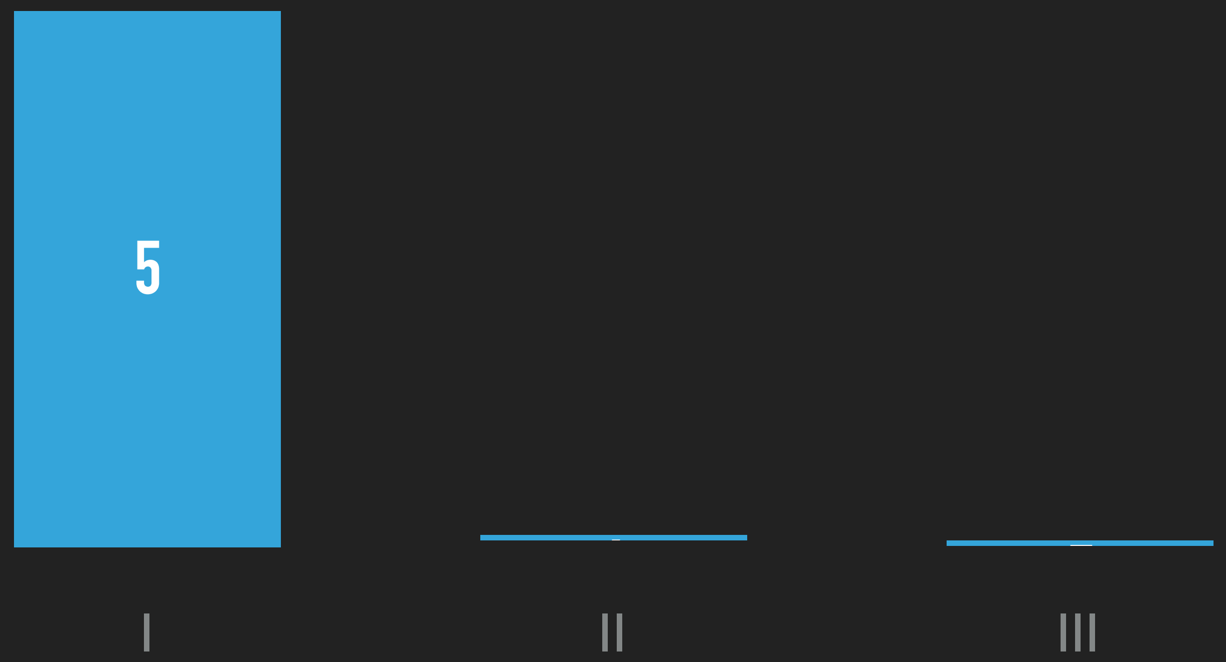
2 moedas da pilha II



JOGO DE NIM

Jogador *B* remove

4 moedas da pilha II



JOGO DE NIM

Jogador *A* remove

5 moedas da pilha I

I II III

JOGO DE NIM

Jogador A fez o último movimento

I II III

INDUÇÃO INVERSA

P

(0,0,0)

INDUÇÃO INVERSA

Uma pilha

P		N
(0,0,0)	$\longleftarrow$	(0,0,x)

INDUÇÃO INVERSA

Duas pilhas

$$\begin{array}{ccccc} P & & N & & P \\ (0,0,0) & \longleftarrow & (0,0,x) & \longleftarrow & (0,1,1) \end{array}$$

INDUÇÃO INVERSA

Duas pilhas

$$\begin{array}{ccccccc} P & & N & & P & & N \\ (0,0,0) & \longleftarrow & (0,0,x) & \longleftarrow & (0,1,1) & \longleftarrow & (0,1,2) \end{array}$$

INDUÇÃO INVERSA

Duas pilhas

P		N		P		N		P
(0,0,0)	←	(0,0,x)	←	(0,1,1)	←	(0,1,2)	←	(0,2,2)

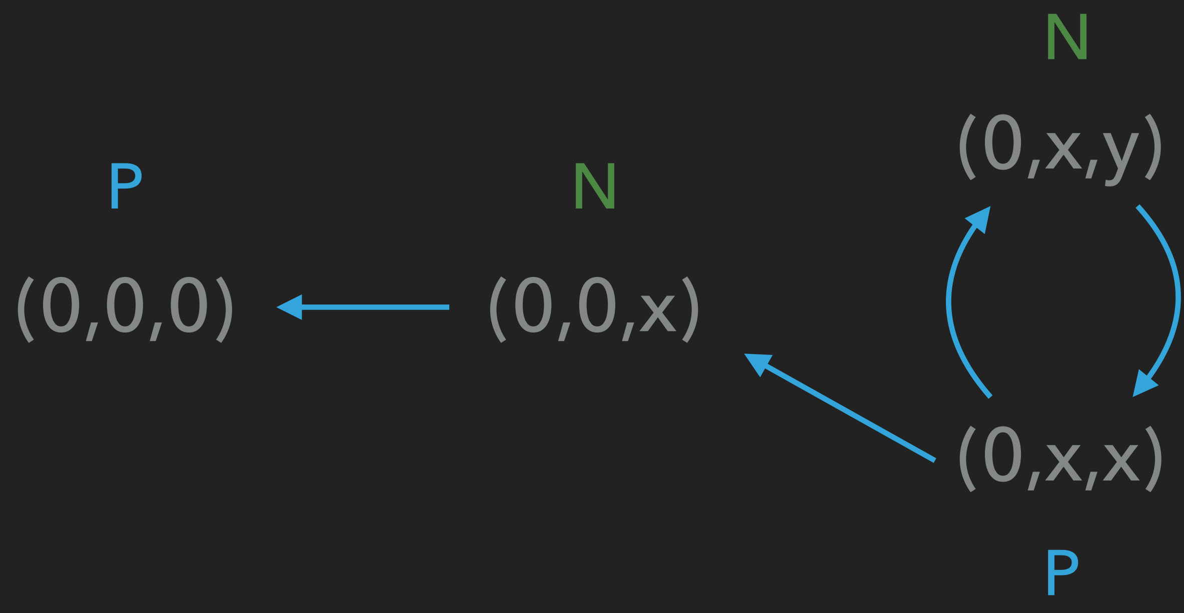
INDUÇÃO INVERSA

Duas pilhas

P		N		P		N		P		N
(0,0,0)	←	(0,0,x)	←	(0,1,1)	←	(0,1,2)	←	(0,2,2)	←	(0,2,3)

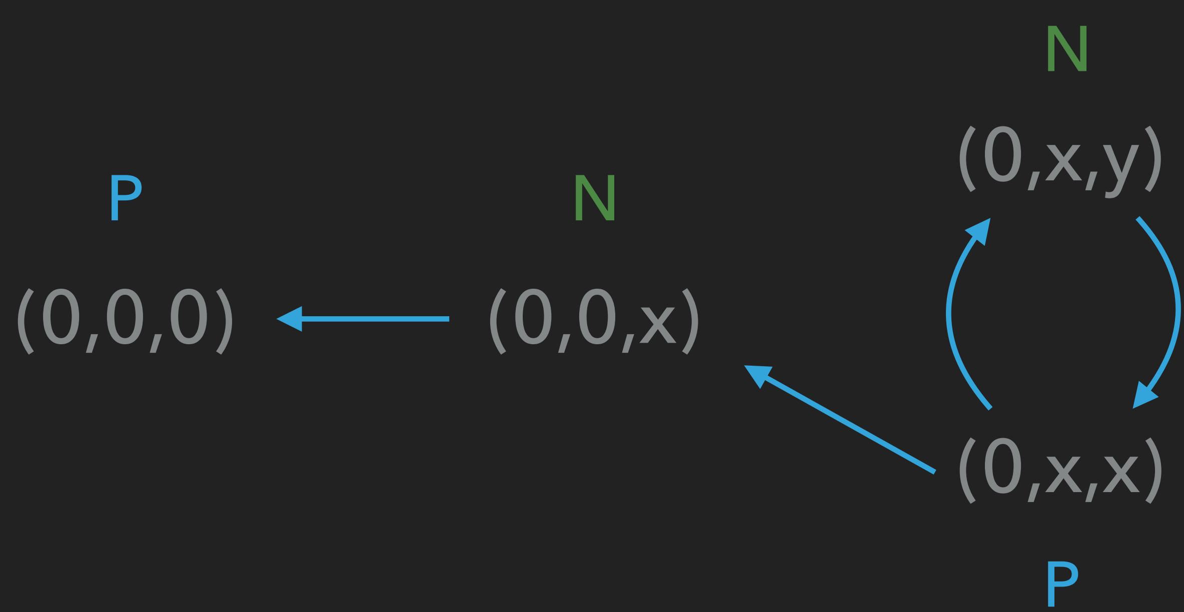
INDUÇÃO INVERSA

Duas pilhas



INDUÇÃO INVERSA

Três pilhas



(1,1,1)

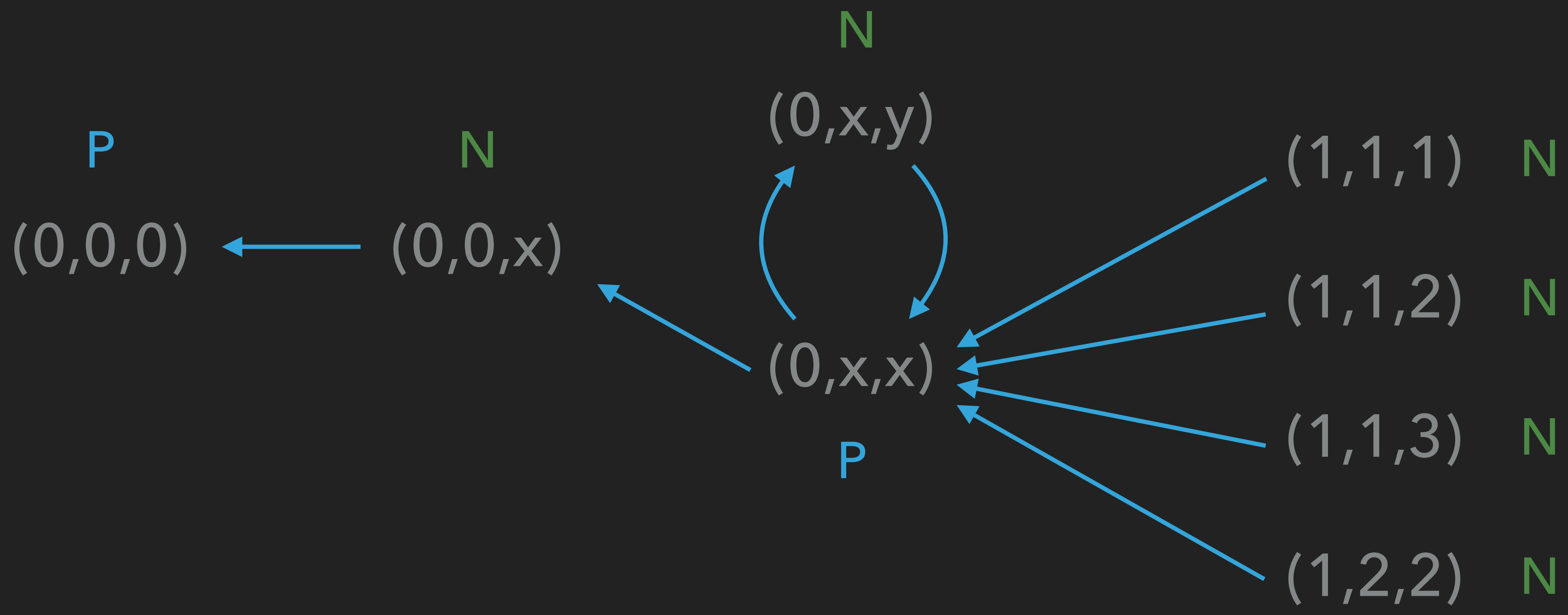
(1,1,2)

(1,1,3)

(1,2,2)

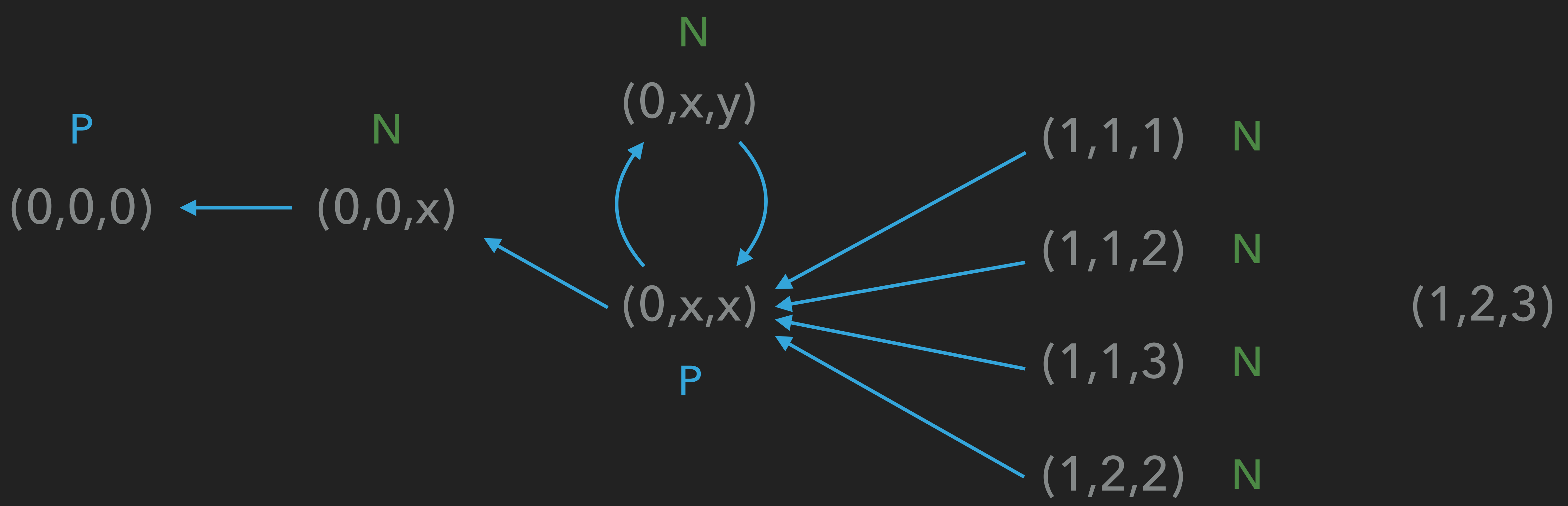
INDUÇÃO INVERSA

Três pilhas



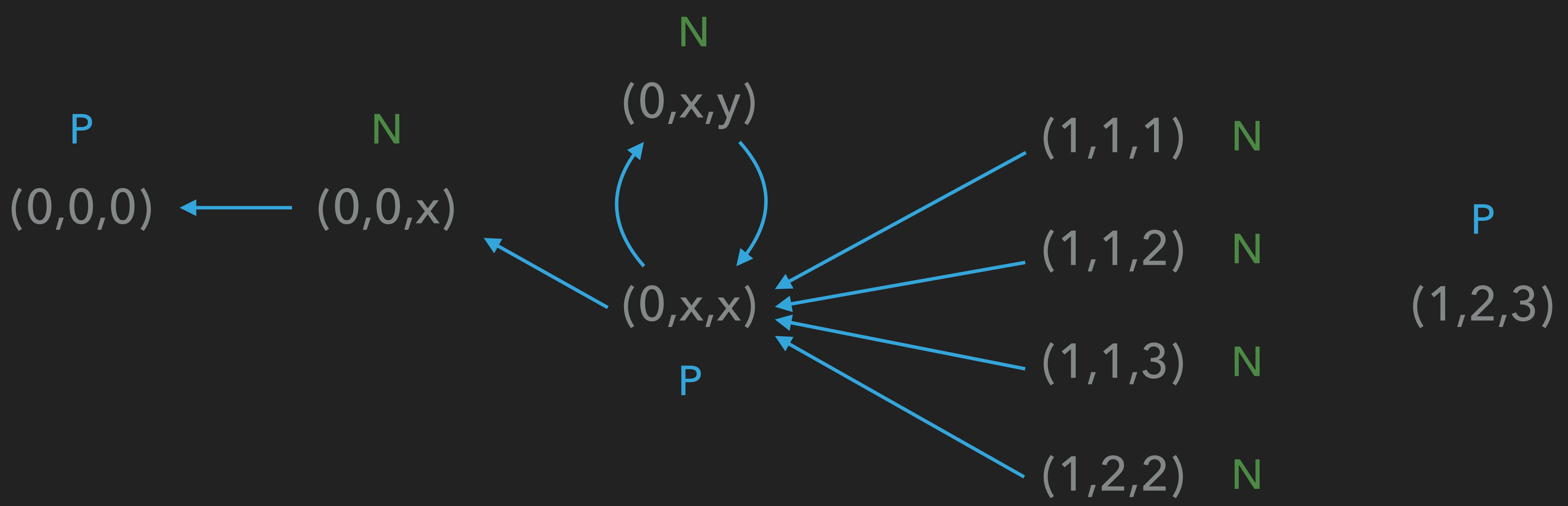
INDUÇÃO INVERSA

Três pilhas



INDUÇÃO INVERSA

Três pilhas



SOMA-NIM

- Definição: A *soma-nim* de dois números é a soma de suas representações binarias em base 2 sem *carry*.

SOMA-NIM

- Definição: A *soma-nim* de dois números é a soma de suas representações binarias em base 2 sem *carry*.

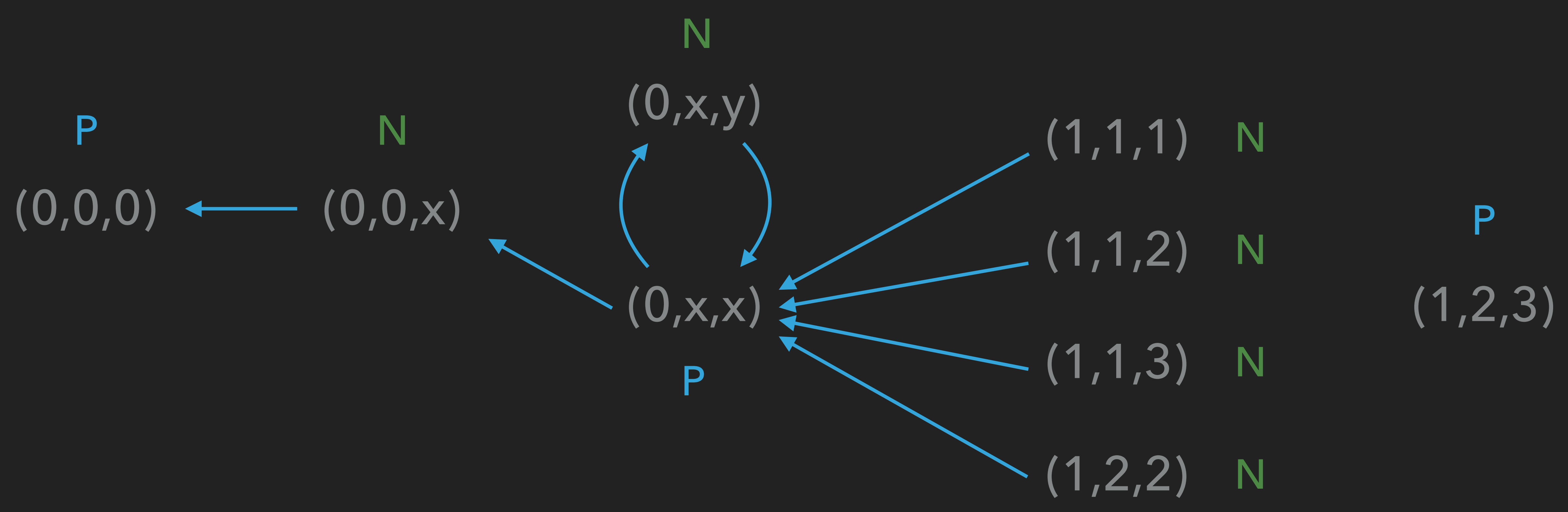
$$
\begin{array}{rr}
22: & 10110_2 \\
51: & 110011_2 \\
\hline
37: & 100101_2
\end{array}
$$

TEOREMA DE BOUTON

- Teorema: Um estado no jogo de Nim é uma P-posição sse a soma-nim de seus componentes é 0.

TEOREMA DE BOUTON

- Teorema: Um estado no jogo de Nim é uma P-posição sse a soma-nim de seus componentes é 0.



PROVA DO TEOREMA DE BOUTON

- Teorema: Um estado no jogo de Nim é uma P-posição sse a soma-nim de seus componentes é 0.

Prova: Seja *P* o conjunto de estados com soma-nim zero e seja *N* o conjunto complemento de *P*.

- (1) Todo estado terminal está em *P*. Único estado terminal é o que não tem mais moedas nas pilhas, obviamente a soma-nim desse estado é zero.

PROVA DO TEOREMA DE BOUTON

- Teorema: Um estado no jogo de Nim é uma P-posição sse a soma-nim de seus componentes é 0.

- (2) Para cada estado em *N* existe um movimento para um estado em *P*. Para isso, construiremos um movimento generalizado manipulando os dígitos da representação binária de uma das pilhas.

PROVA DO TEOREMA DE BOUTON

- Teorema: Um estado no jogo de Nim é uma P-posição sse a soma-nim de seus componentes é 0.

- (2) Para cada estado em *N* existe um movimento para um estado em *P*. Para isso, construiremos um movimento generalizado manipulando os dígitos da representação binária de uma das pilhas.

$$
\begin{array}{lr}
x_1 & 11111_2 \\
x_2 & 10110_2 \\
x_3 & 110011_2
\end{array}
$$

PROVA DO TEOREMA DE BOUTON

- Teorema: Um estado no jogo de Nim é uma P-posição sse a soma-nim de seus componentes é 0.

- (2) Para cada estado em *N* existe um movimento para um estado em *P*. Para isso, construiremos um movimento generalizado manipulando os dígitos da representação binária de uma das pilhas.

x_1	11111_2		11111_2
x_2	10110_2	$\longrightarrow$	10110_2
x_3	110011_2		$\underline{001001_2}$
			000000_2

PROVA DO TEOREMA DE BOUTON

- Teorema: Um estado no jogo de Nim é uma P-posição sse a soma-nim de seus componentes é 0.

- (3) Todo movimento de um estado em *P* é para um estado em *N*. Seja $(x_1, x_2, \ldots)$ um estado em *P*. É fácil de ver que alterando o valor de qualquer x_i para $x'_i < x_i$ implica em um resultado diferente para a soma-nim desse estado.

Essas três propriedades implicam que *P* é o conjunto de P-posições e *N*, por construção, é o de N-posições.

JOGOS DE GRAFO

JOGOS DE GRAFO

- Jogos de ganhador-perdedor

JOGOS DE GRAFO

- Jogos de ganhador-perdedor
- Acontece em um grafo que:

JOGOS DE GRAFO

- Jogos de ganhador-perdedor
- Acontece em um grafo que:
    1. É direcionado
    2. Possui posição inicial x_0
    3. Todo caminho saindo de x_0 possui comprimento $\leq n$ (progressivamente limitado)

JOGOS DE GRAFO

- Jogos de ganhador-perdedor
- Acontece em um grafo que:
    1. É direcionado
    2. Possui posição inicial x_0
    3. Todo caminho saindo de x_0 possui comprimento $\leq n$ (progressivamente limitado)
- Podem ser analisados pelo Teorema de Sprague-Grundy

FUNÇÃO DE SPRAGUE-GRUNDY

- Definição: Seja S um conjunto de inteiros, então o "excludente mínimo" de S é o menor inteiro não negativo não incluso em S. Usamos $mex(S)$ para representar esse valor.

FUNÇÃO DE SPRAGUE-GRUNDY

- Definição: Seja S um conjunto de inteiros, então o "excludente mínimo" de S é o menor inteiro não negativo não incluso em S. Usamos $mex(S)$ para representar esse valor.

$$mex(\varnothing) = 0$$

$$mex(\{0,1,2\}) = 3$$

$$mex(\{1,2,3,\ldots\}) = 0$$

$$mex(\{0,1,3,5,7,9,\ldots\}) = 2$$

FUNÇÃO DE SPRAGUE-GRUNDY

- Definição: Seja *S* um conjunto de inteiros, então o "excludente mínimo" de *S* é o menor inteiro não negativo não incluso em *S*. Usamos *mex(S)* para representar esse valor.

- A função de Sprague-Grundy de um grafo direcionado e progressivamente limitado é uma função *g(x)*, onde *x* é um vértice do grafo.

$$g(x) = 0, \text{ se } x \text{ é um estado terminal}$$

$$g(x) = mex(\{ g(y) \mid (x,y) \in E \}), \text{ cc}$$

FUNÇÃO DE SPRAGUE-GRUNDY

$$g(x) = 0, \text{ se } x \text{ é um estado terminal}$$

$$g(x) = mex(\ \{\ g(y)\ |\ (x,y) \in E\ \}\ ),\ cc$$

$$S = \{1,2,3\}$$

x	
g(x)	

FUNÇÃO DE SPRAGUE-GRUNDY

g(x) = 0, se x é um estado terminal

g(x) = mex({ g(y) | (x,y) ∈ E }), cc

S = {1,2,3}

x	0
g(x)	0

FUNÇÃO DE SPRAGUE-GRUNDY

$$g(x) = 0, \text{ se } x \text{ é um estado terminal}$$

$$g(x) = mex(\ \{\ g(y) \mid (x,y) \in E\ \}\ ),\ cc$$

$$S = \{1,2,3\}$$

x	0	1
g(x)	0	1

FUNÇÃO DE SPRAGUE-GRUNDY

$$g(x) = 0, \text{ se } x \text{ é um estado terminal}$$

$$g(x) = mex(\{\, g(y) \mid (x,y) \in E \,\}), \; cc$$

$$S = \{1,2,3\}$$

x	0	1	2
g(x)	0	1	2

FUNÇÃO DE SPRAGUE-GRUNDY

$$g(x) = 0, \text{ se } x \text{ é um estado terminal}$$

$$g(x) = mex(\ \{\ g(y) \mid (x,y) \in E\ \}\ ), \ cc$$

$$S = \{1,2,3\}$$

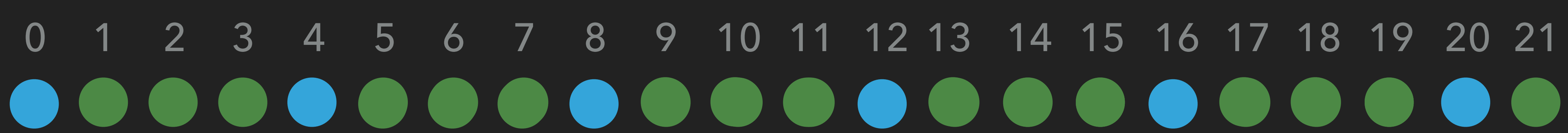
x	0	1	2	3
g(x)	0	1	2	3

FUNÇÃO DE SPRAGUE-GRUNDY

$$g(x) = 0, \text{ se } x \text{ é um estado terminal}$$

$$g(x) = mex(\{ g(y) \mid (x,y) \in E \}), \text{ cc}$$

$$S = \{1,2,3\}$$



x	0	1	2	3	4
g(x)	0	1	2	3	0

FUNÇÃO DE SPRAGUE-GRUNDY

$$g(x) = 0, \text{ se } x \text{ é um estado terminal}$$

$$g(x) = mex(\ \{\ g(y) \mid (x,y) \in E\ \}\ ), cc$$

$$S = \{1,2,3\}$$

x	0	1	2	3	4	5
g(x)	0	1	2	3	0	1

FUNÇÃO DE SPRAGUE-GRUNDY

$g(x) = 0$, se x é um estado terminal

$g(x) = mex(\ \{\ g(y)\ |\ (x,y) \in E\ \}\ )$, cc

$S = \{1,2,3\}$

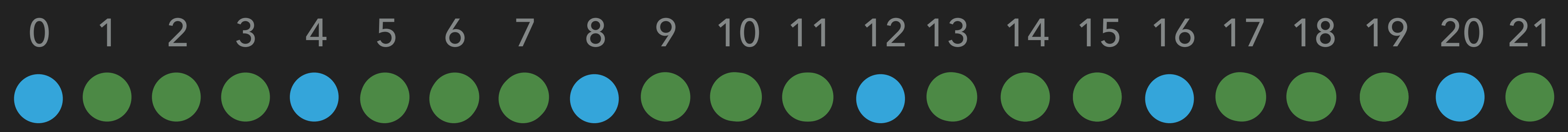
x	0	1	2	3	4	5	6
g(x)	0	1	2	3	0	1	2

FUNÇÃO DE SPRAGUE-GRUNDY

$$g(x) = 0, \text{ se } x \text{ é um estado terminal}$$

$$g(x) = mex(\ \{ g(y) \mid (x,y) \in E \}\ ), \ cc$$

$$S = \{1,2,3\}$$



x	0	1	2	3	4	5	6	7
g(x)	0	1	2	3	0	1	2	3

FUNÇÃO DE SPRAGUE-GRUNDY

$$g(x) = 0, \text{ se } x \text{ é um estado terminal}$$

$$g(x) = mex(\{ g(y) \mid (x,y) \in E \}), cc$$

$$S = \{1,2,3\}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
g(x)	0	1	2	3	0	1	2	3	0

FUNÇÃO DE SPRAGUE-GRUNDY

$$g(x) = 0, \text{ se } x \text{ é um estado terminal}$$

$$g(x) = mex(\ \{\ g(y) \mid (x,y) \in E\ \}\ ), \text{ cc}$$

$$S = \{1,2,3\}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
g(x)	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2

TEOREMA DE SPRAGUE-GRUNDY

Teorema: Dada a função de Sprague-Grundy g de um grafo G, um estado x é uma P-posição sse $g(x) = 0$.

Prova: Seja P o conjunto de estados com Sprague-Grundy zero e seja N o conjunto complemento de P.

- (1) Todo estado terminal está em P. Se x é terminal, $g(x)=0$.

TEOREMA DE SPRAGUE-GRUNDY

Teorema: Dada a função de Sprague-Grundy g de um grafo G, um estado x é uma P-posição sse $g(x) = 0$.

Prova: Seja P o conjunto de estados com Sprague-Grundy zero e seja N o conjunto complemento de P.

- (2) Todo movimento de um estado em P é para um estado em N. Se um estado x possui $g(x) = 0$, então para todo estado y, onde $(x,y) \in E(G)$, $g(y) > 0$.

TEOREMA DE SPRAGUE-GRUNDY

Teorema: Dada a função de Sprague-Grundy g de um grafo G, um estado x é uma P-posição sse $g(x) = 0$.

Prova: Seja P o conjunto de estados com Sprague-Grundy zero e seja N o conjunto complemento de P.

- (3) Para cada estado em N existe um movimento para um estado em P. Se um estado x possui $g(x) > 0$, então deve existir um estado y com $g(y) = 0$, onde $(x,y) \in E(G)$.

SOMA DE JOGOS DE GRAFO

- Dados *n* jogos de grafo $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Pode-se combinar em um jogo $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$ onde o conjunto de vértices é o produto cartesiano dos vértices de $G_1, G_2, \ldots, G_n$ e o conjunto de arestas equivale a jogadas individuais dos jogos.

TEOREMA DE SPRAGUE-GRUNDY (DE NOVO)

- Teorema: Se g_i é a função de Sprague-Grundy de G_i , para $i = 1,\ldots,n$, então G = $G_1 + G_2 + \ldots + G_n$ tem função Sprague-Grundy $g(x_1, \ldots, x_n) = g_1(x_1) \oplus g_2(x_2) \oplus \ldots \oplus g_n(x_n)$

JOGOS COMBINATÓRIOS

Jogos Parciais:

- Movimentos são diferentes para os jogadores
- Xadrez, Damas, etc…

~~Jogos Imparciais:~~

- ~~Movimentos iguais para os jogadores~~
- ~~Jogo da velha, **Jogos de subtração**, etc…~~

Rip in peace