MC-202 — Unidade 10
Intercalação e Ordenação por Intercalação

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2017

Na unidade anterior...

Vimos três algoritmos de ordenação:

Na unidade anterior...

Vimos três algoritmos de ordenação:

- `selectionsort`

Na unidade anterior...

Vimos três algoritmos de ordenação:

- `selectionsort`
- `bubblesort`

Na unidade anterior...

Vimos três algoritmos de ordenação:

- `selectionsort`
- `bubblesort`
- `insertionsort`

Na unidade anterior...

Vimos três algoritmos de ordenação:

- `selectionsort`
- `bubblesort`
- `insertionsort`

Apesar do `insertionsort` ser melhor na prática, os três algoritmos são $\mathrm{O}(n^2)$

Na unidade anterior...

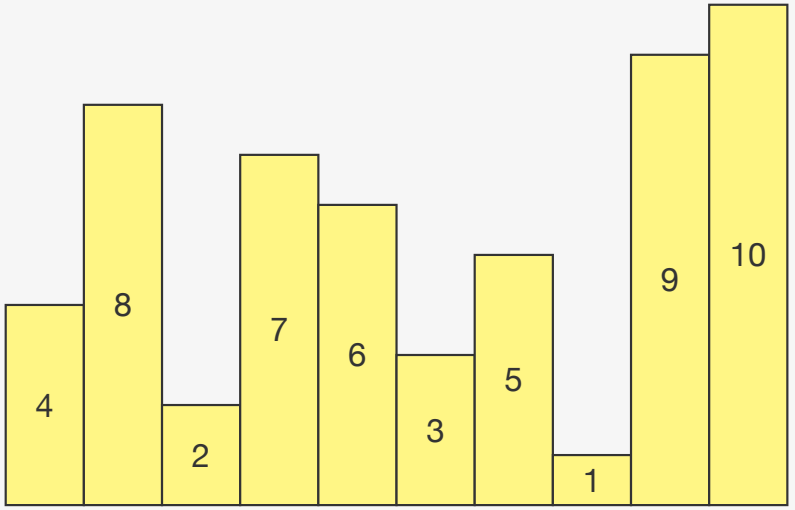
Vimos três algoritmos de ordenação:

- `selectionsort`
- `bubblesort`
- `insertionsort`

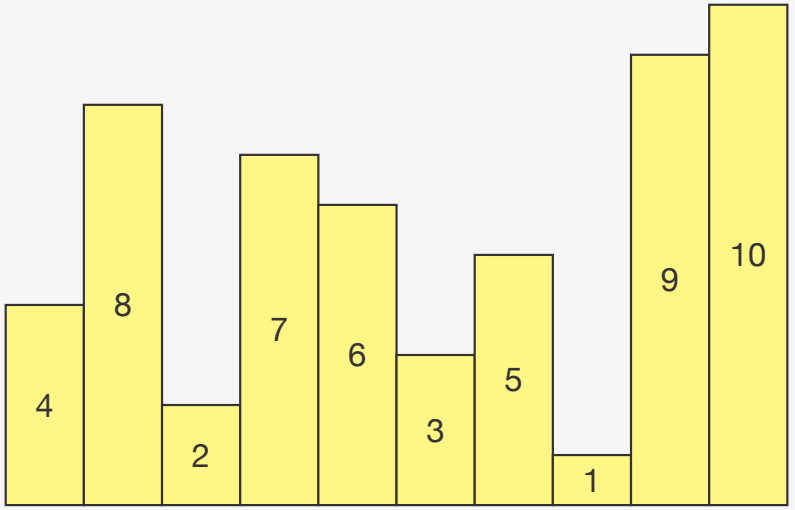
Apesar do `insertionsort` ser melhor na prática, os três algoritmos são $\mathrm{O}(n^2)$

Nessa unidade veremos um algoritmo $\mathrm{O}(n \log n)$

Estratégia: recursão

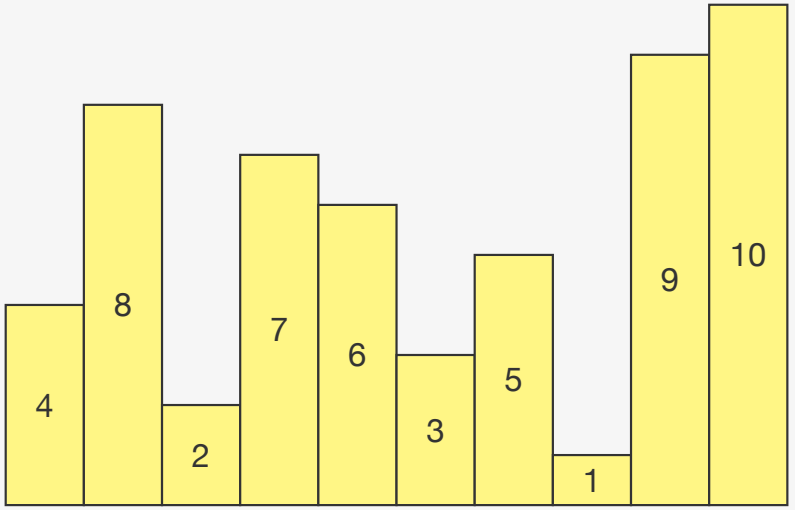


Estratégia: recursão



Como ordenar a primeira metade do vetor?

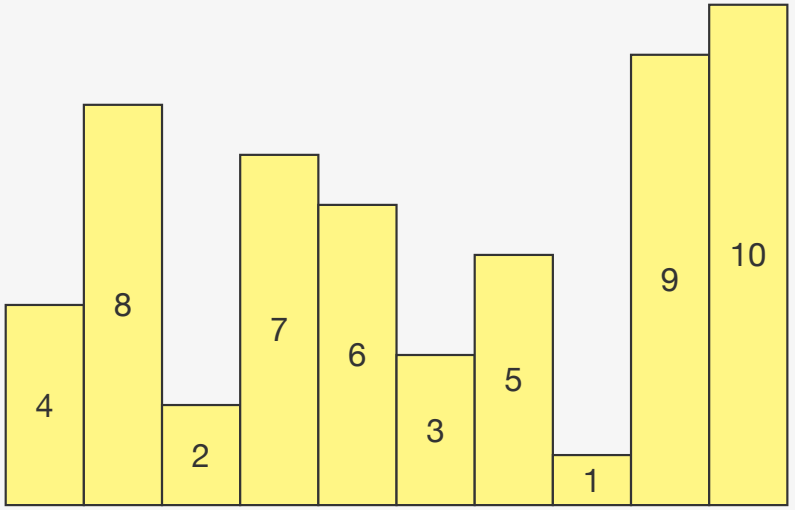
Estratégia: recursão



Como ordenar a primeira metade do vetor?

- usamos uma função `ordernar(int *v, int l, int r)`

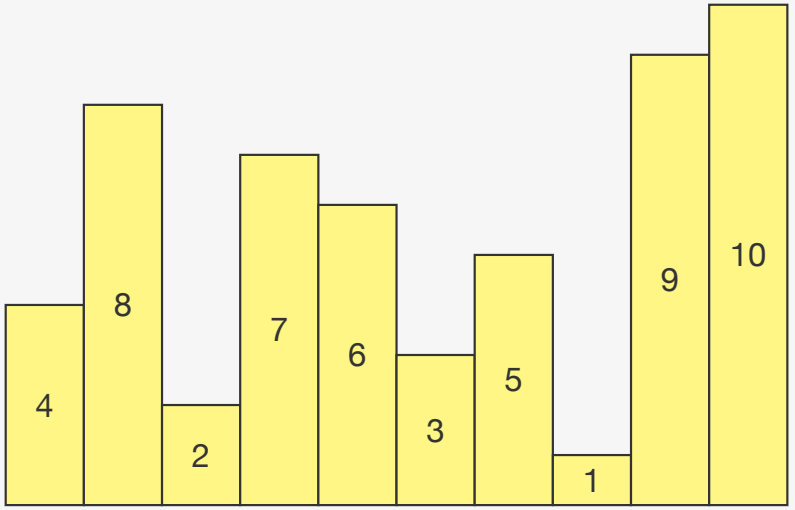
Estratégia: recursão



Como ordenar a primeira metade do vetor?

- usamos uma função `ordernar(int *v, int l, int r)`
  - poderia ser `bubblesort`, `selectionsort` ou `insertionsort`

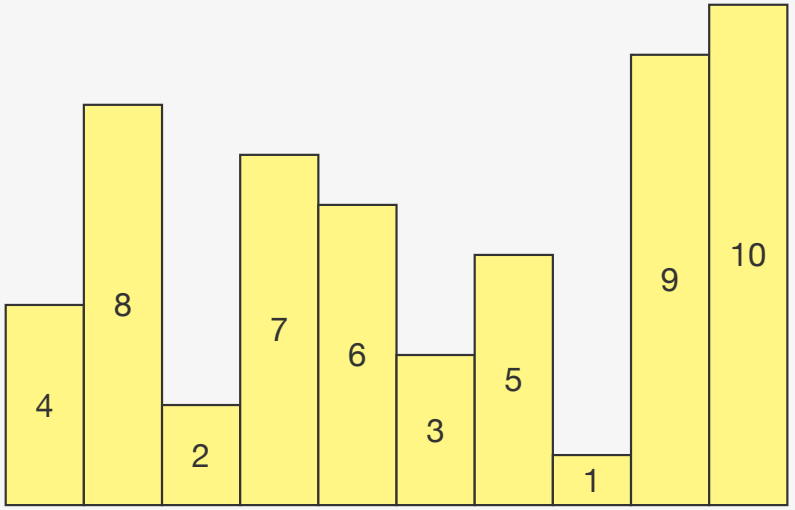
Estratégia: recursão



Como ordenar a primeira metade do vetor?

- usamos uma função `ordernar(int *v, int l, int r)`
  - poderia ser `bubblesort`, `selectionsort` ou `insertionsort`
  - mas vamos fazer algo melhor do que isso

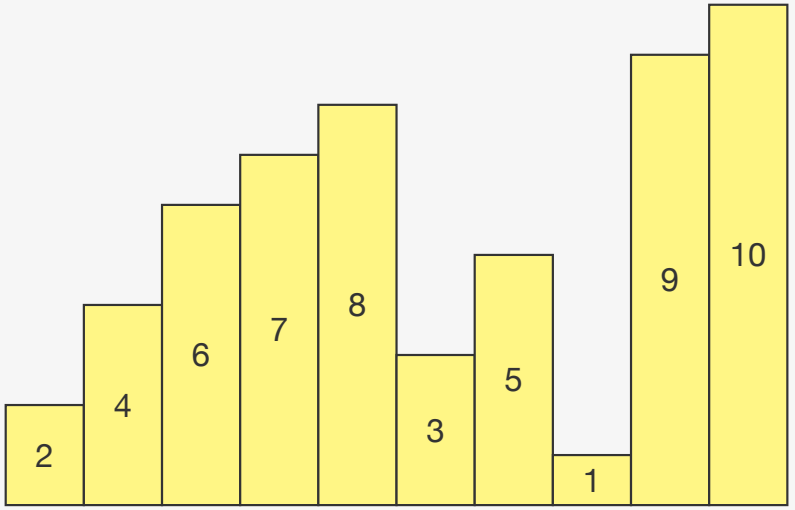
Estratégia: recursão



Como ordenar a primeira metade do vetor?

- usamos uma função `ordernar(int *v, int l, int r)`
  - poderia ser `bubblesort`, `selectionsort` ou `insertionsort`
  - mas vamos fazer algo melhor do que isso
- executamos `ordenar(v, 0, 4);`

Estratégia: recursão

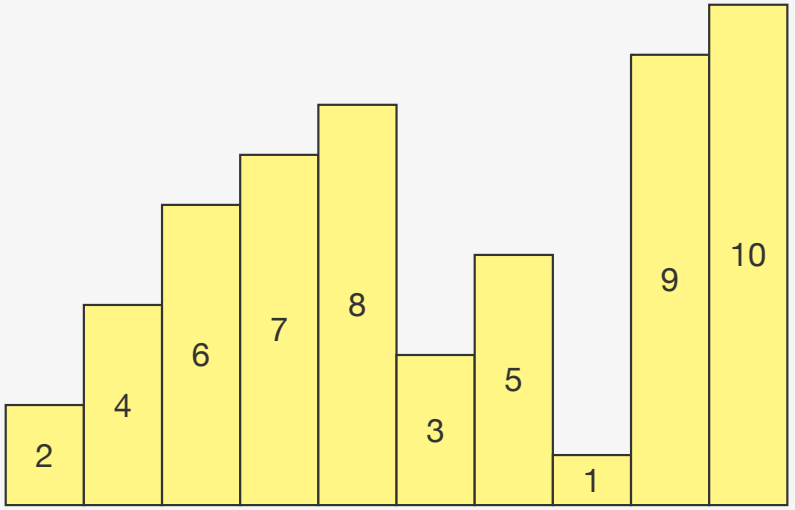


Como ordenar a primeira metade do vetor?

- usamos uma função `ordernar(int *v, int l, int r)`
  - poderia ser `bubblesort`, `selectionsort` ou `insertionsort`
  - mas vamos fazer algo melhor do que isso
- executamos `ordenar(v, 0, 4);`

E se quiséssemos ordenar a segunda parte?

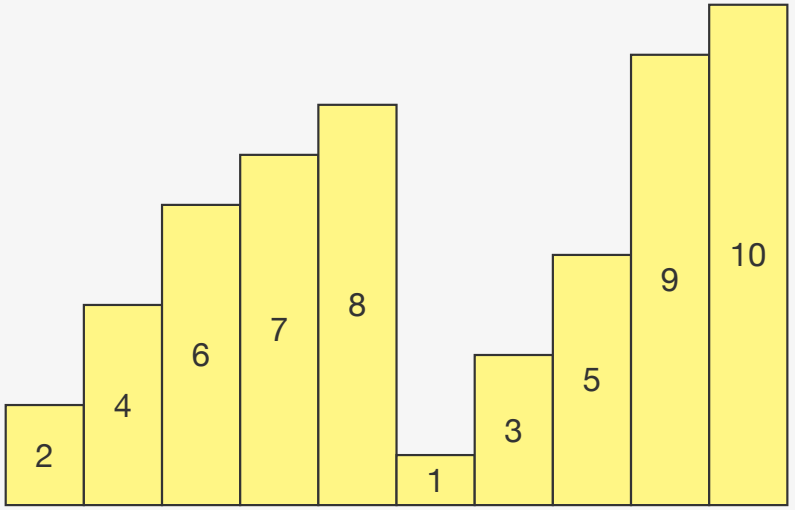
Ordenando a segunda parte



Para ordenar a segunda metade:

- executamos `ordenar(vetor, 5, 9);`

Ordenando a segunda parte



Para ordenar a segunda metade:

- executamos `ordenar(vetor, 5, 9);`

Ordenando todo o vetor

Suponha que temos um vetor com as suas duas metades já ordenadas

Ordenando todo o vetor

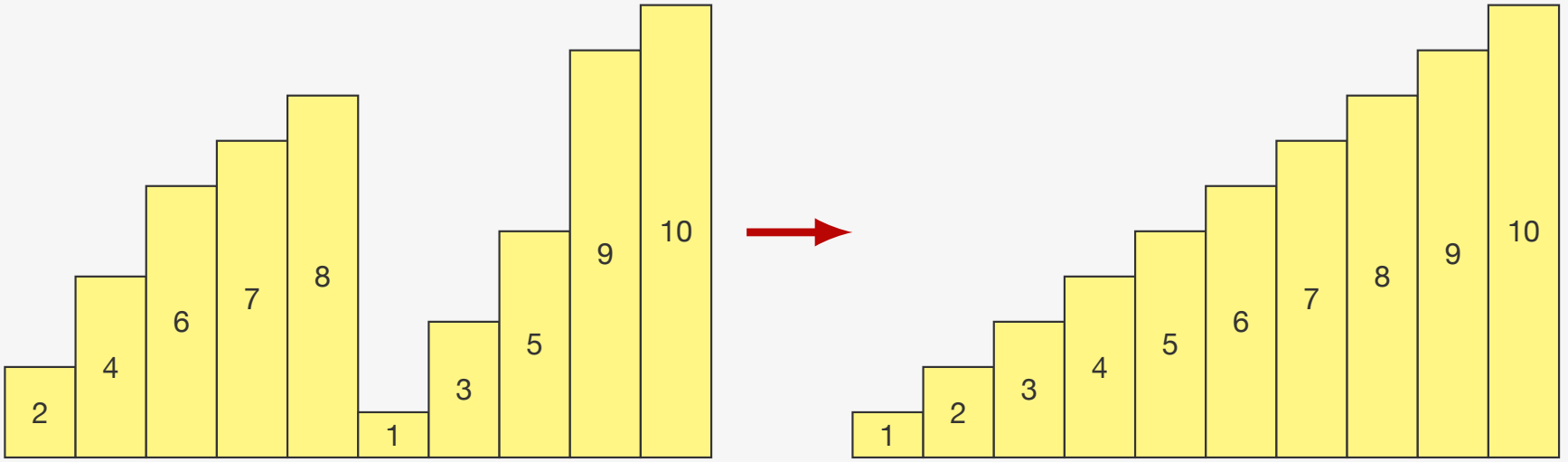
Suponha que temos um vetor com as suas duas metades já ordenadas

- Como ordernar todo o vetor?

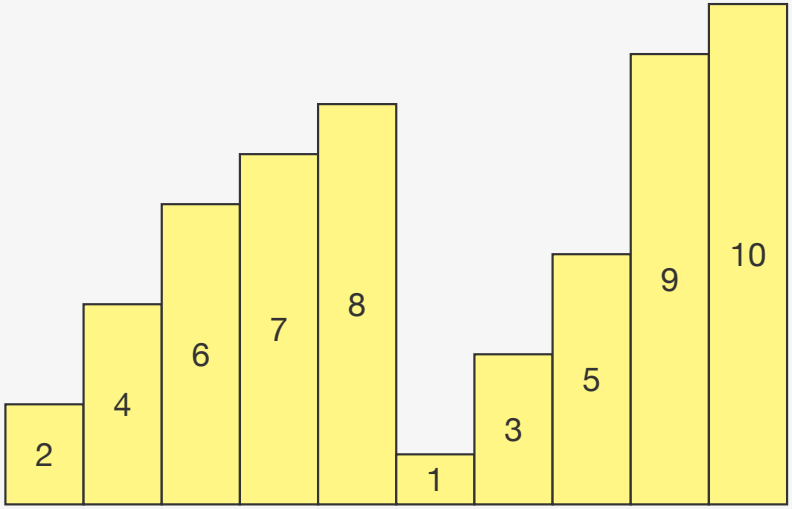
Ordenando todo o vetor

Suponha que temos um vetor com as suas duas metades já ordenadas

- Como ordernar todo o vetor?

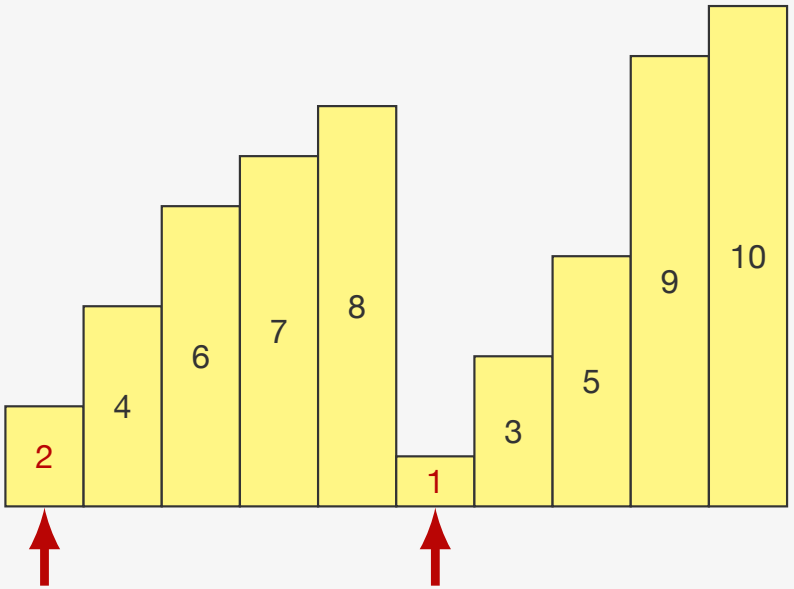


Intercalando



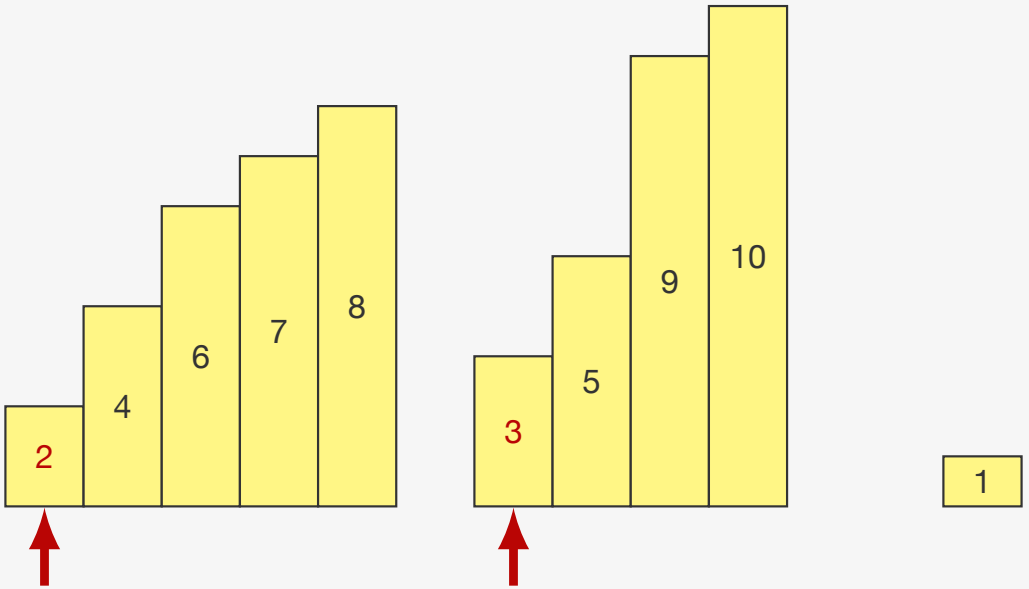
- Percorremos os dois subvetores

Intercalando



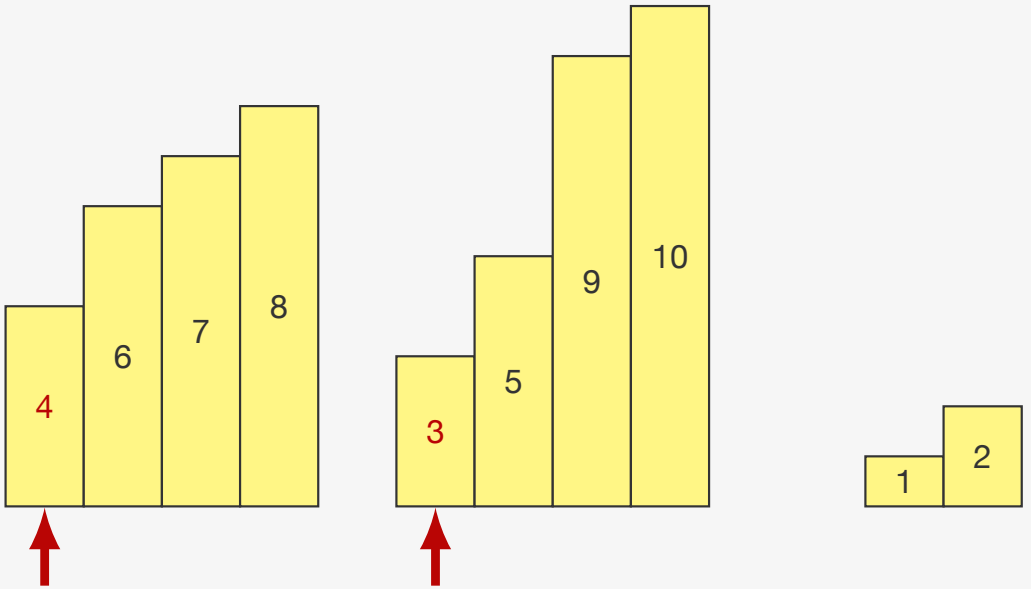
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o mínimo e inserimos em um vetor auxiliar

Intercalando



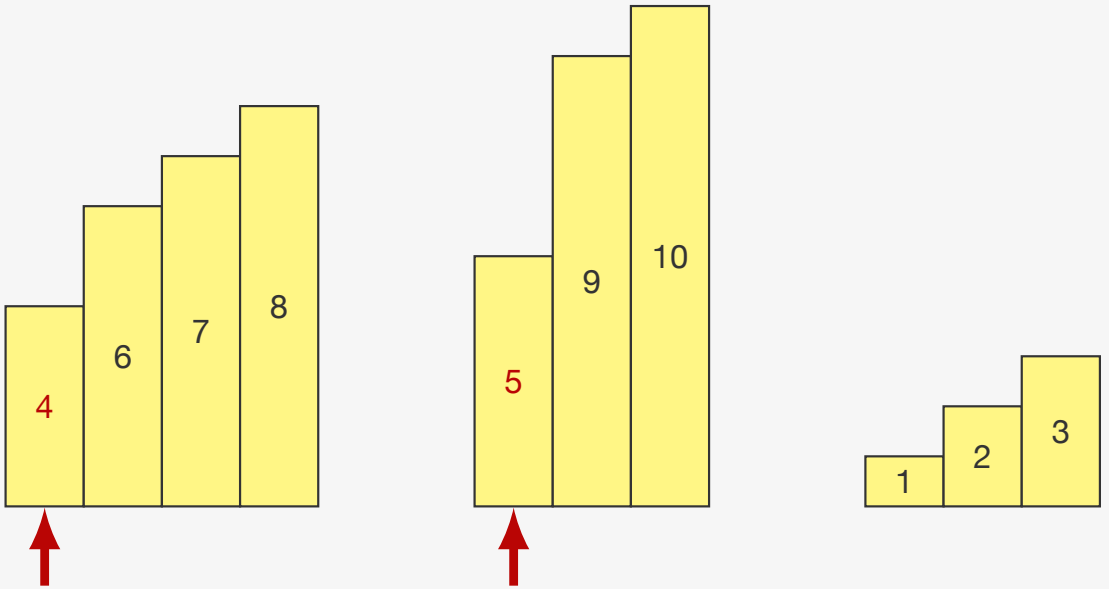
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o mínimo e inserimos em um vetor auxiliar

Intercalando



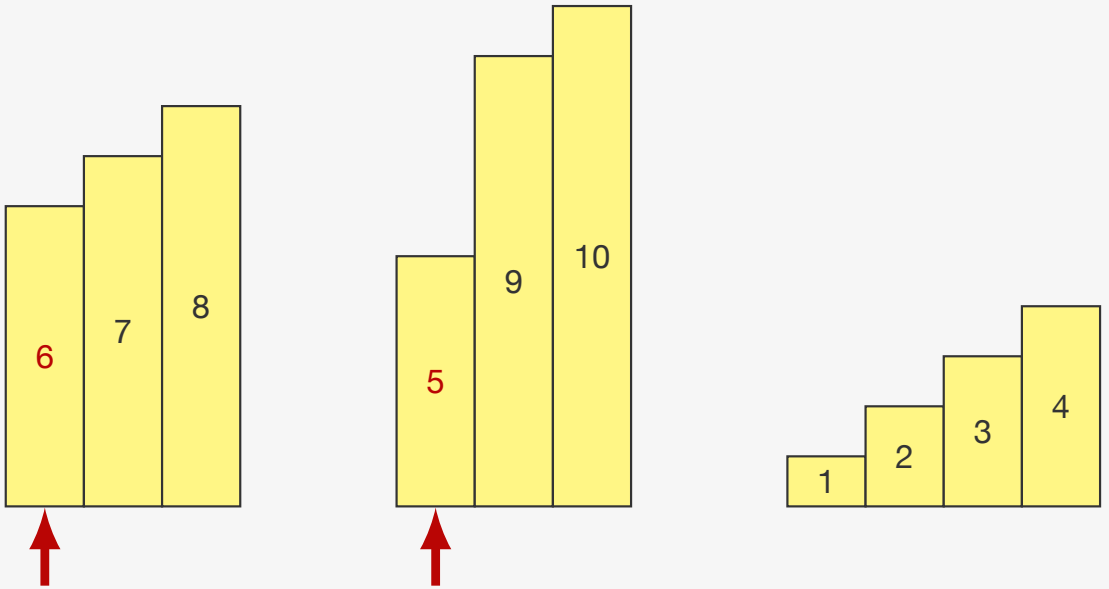
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o mínimo e inserimos em um vetor auxiliar

Intercalando



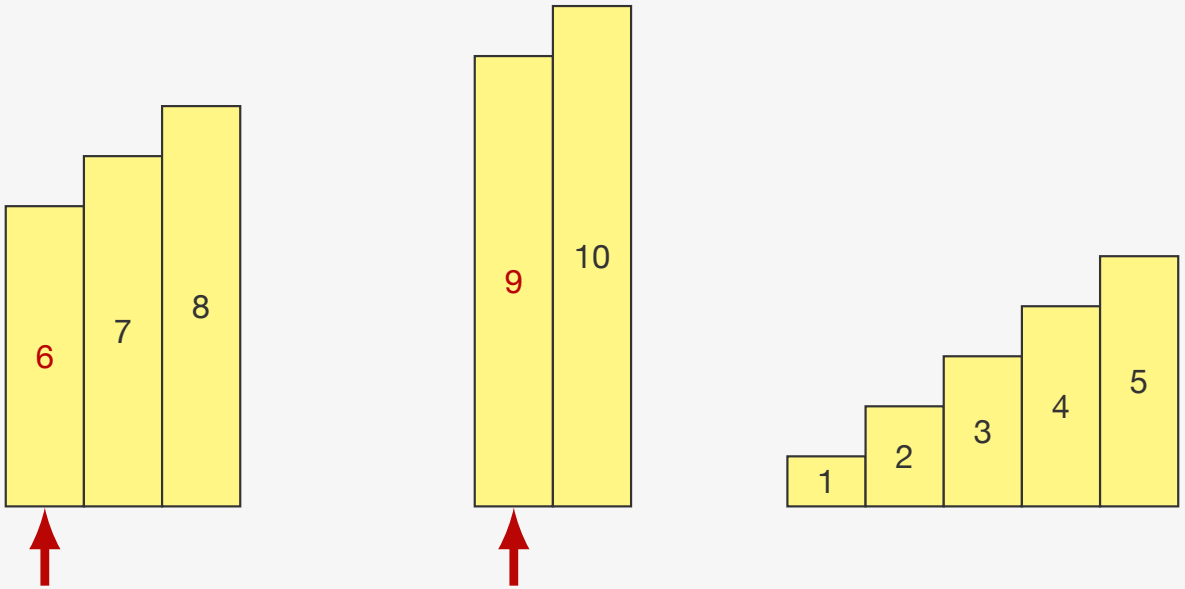
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o mínimo e inserimos em um vetor auxiliar

Intercalando



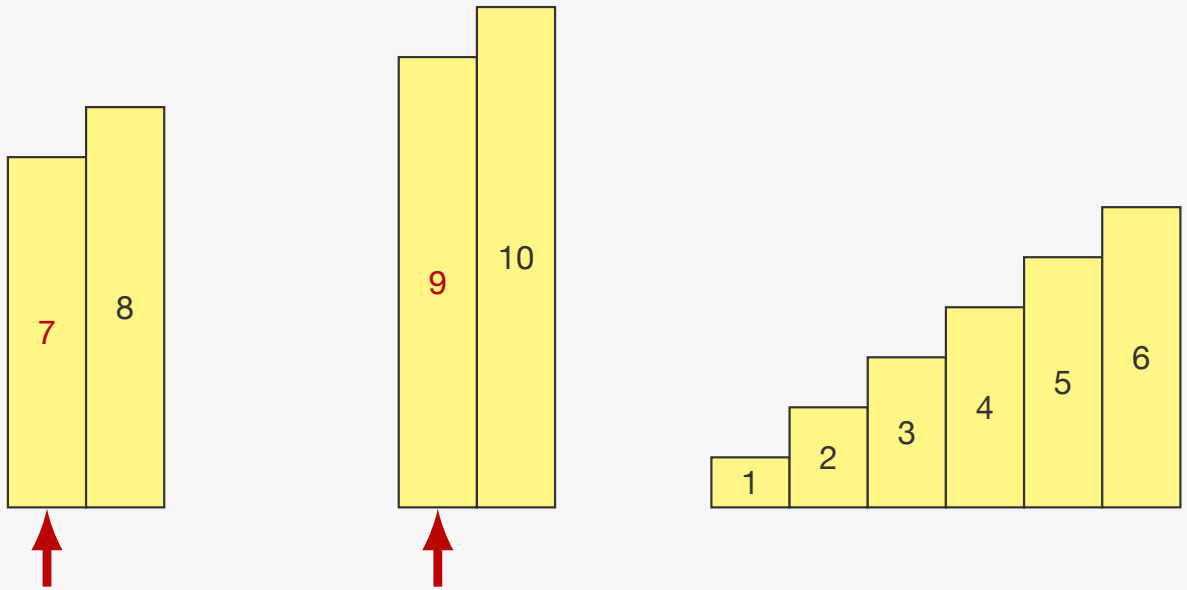
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o mínimo e inserimos em um vetor auxiliar

Intercalando



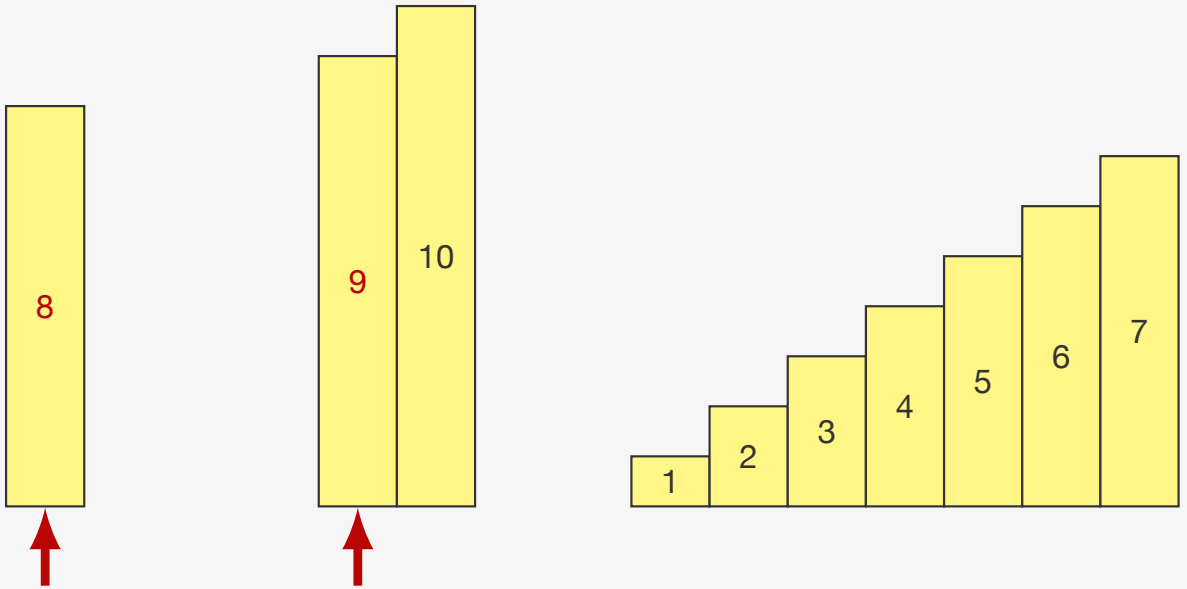
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o mínimo e inserimos em um vetor auxiliar

Intercalando



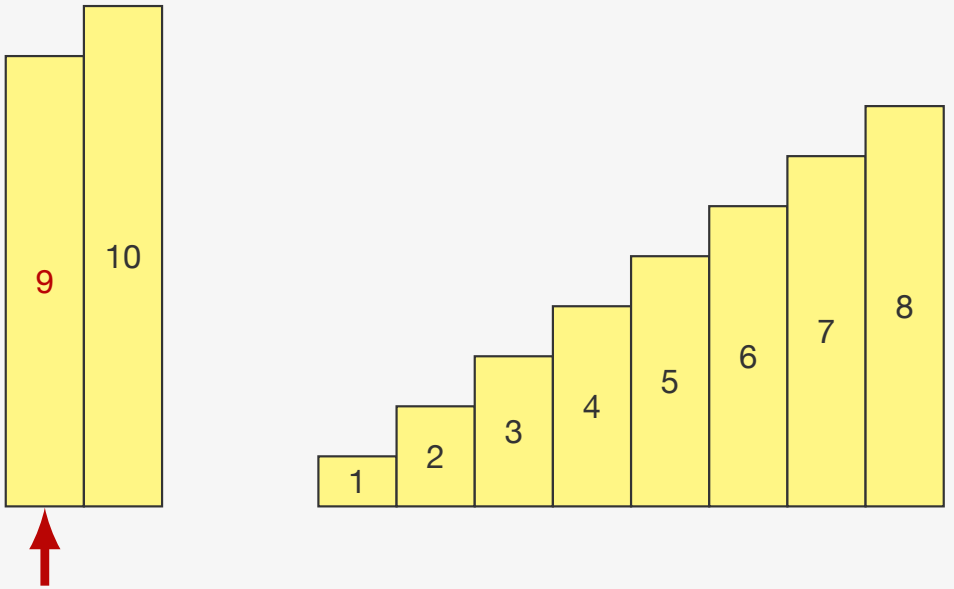
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o mínimo e inserimos em um vetor auxiliar

Intercalando



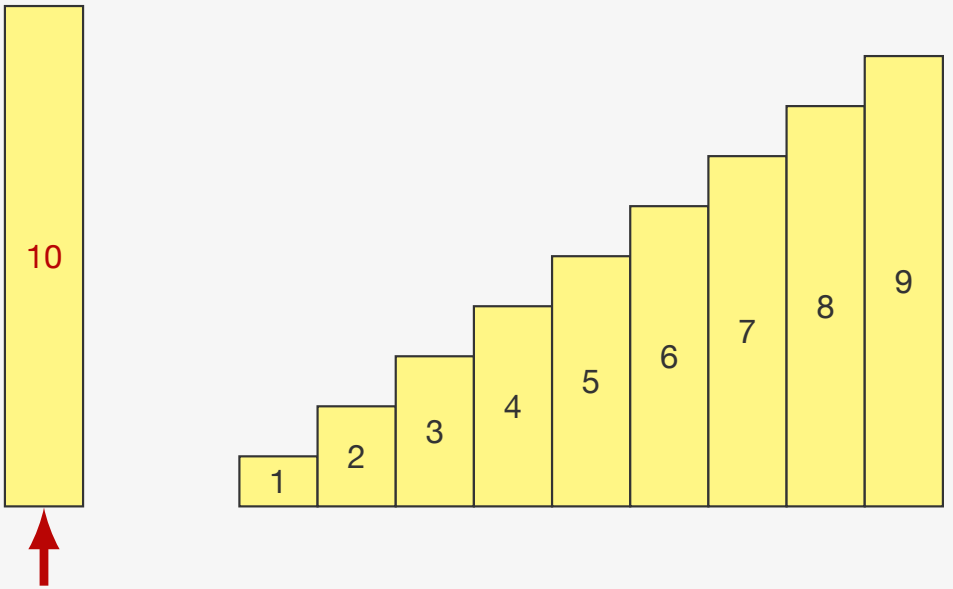
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o mínimo e inserimos em um vetor auxiliar

Intercalando



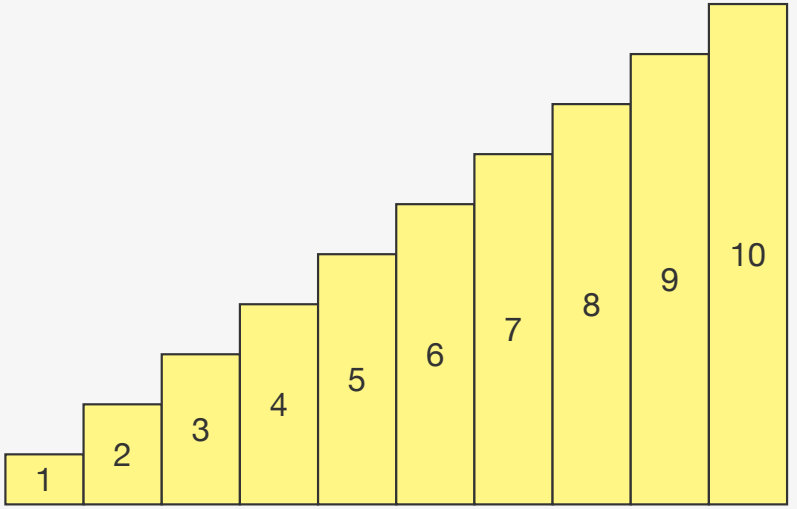
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o mínimo e inserimos em um vetor auxiliar
- Depois copiamos o restante

Intercalando



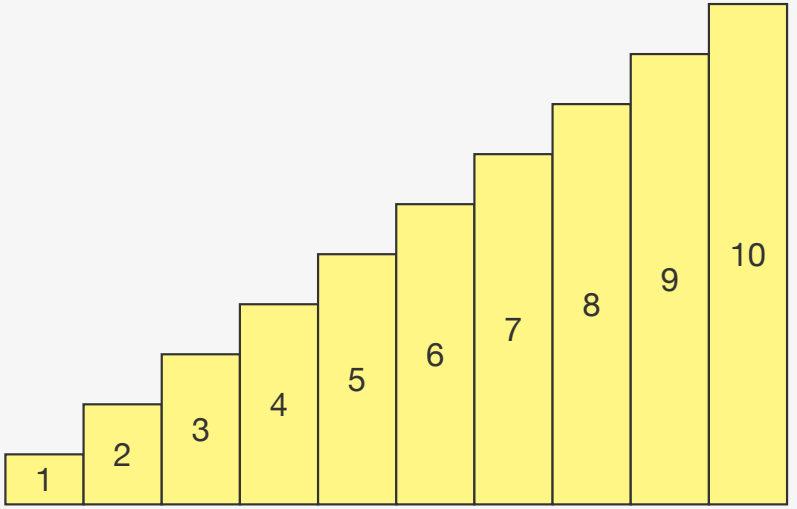
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o mínimo e inserimos em um vetor auxiliar
- Depois copiamos o restante

Intercalando



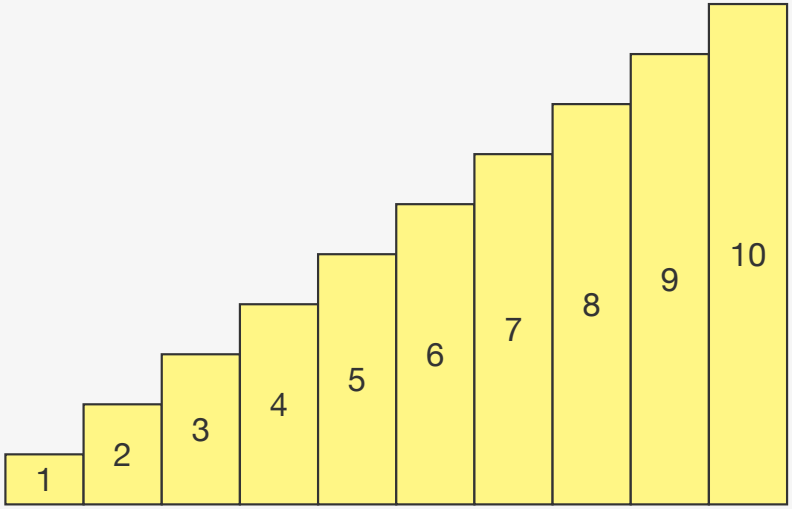
- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o mínimo e inserimos em um vetor auxiliar
- Depois copiamos o restante

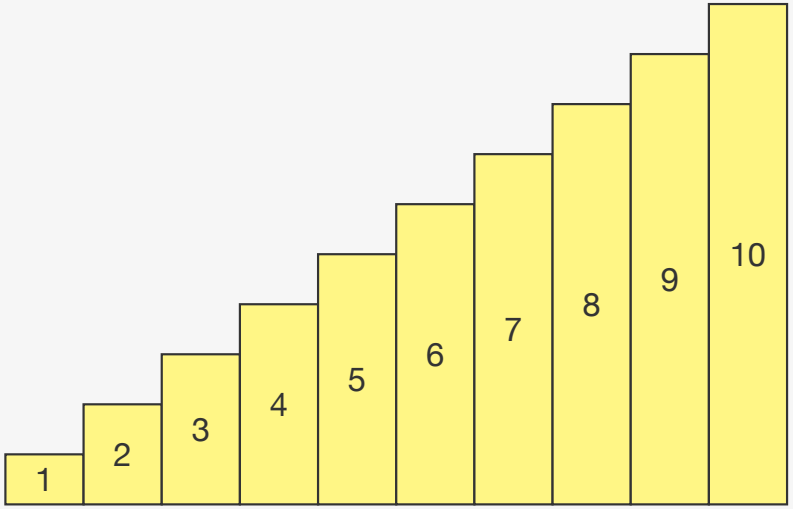
Intercalando



- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o mínimo e inserimos em um vetor auxiliar
- Depois copiamos o restante
- No final, copiamos do vetor auxiliar para o original

Intercalando





- Percorremos os dois subvetores
- Pegamos o mínimo e inserimos em um vetor auxiliar
- Depois copiamos o restante
- No final, copiamos do vetor auxiliar para o original

Divisão e conquista

Observação:

Divisão e conquista

Observação:

- A recursão parte do princípio que é mais fácil resolver problemas menores

Divisão e conquista

Observação:

- A recursão parte do princípio que é mais fácil resolver problemas menores
- Para certos problemas, podemos dividi-lo em duas ou mais partes

Divisão e conquista

Observação:

- A recursão parte do princípio que é mais fácil resolver problemas menores
- Para certos problemas, podemos dividi-lo em duas ou mais partes

Divisão e conquista:

Divisão e conquista

Observação:

- A recursão parte do princípio que é mais fácil resolver problemas menores
- Para certos problemas, podemos dividi-lo em duas ou mais partes

Divisão e conquista:

- Divisão: Quebramos o problema em vários subproblemas menores

Divisão e conquista

Observação:

- A recursão parte do princípio que é mais fácil resolver problemas menores
- Para certos problemas, podemos dividi-lo em duas ou mais partes

Divisão e conquista:

- Divisão: Quebramos o problema em vários subproblemas menores
  - ex: quebramos um vetor a ser ordenado em dois

Divisão e conquista

Observação:

- A recursão parte do princípio que é mais fácil resolver problemas menores
- Para certos problemas, podemos dividi-lo em duas ou mais partes

Divisão e conquista:

- Divisão: Quebramos o problema em vários subproblemas menores
  - ex: quebramos um vetor a ser ordenado em dois
- Conquista: Combinamos a solução dos problemas menores

Divisão e conquista

Observação:

- A recursão parte do princípio que é mais fácil resolver problemas menores
- Para certos problemas, podemos dividi-lo em duas ou mais partes

Divisão e conquista:

- Divisão: Quebramos o problema em vários subproblemas menores
  - ex: quebramos um vetor a ser ordenado em dois
- Conquista: Combinamos a solução dos problemas menores
  - ex: intercalamos os dois vetores ordenados

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Intercalação:

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Intercalação:

- Os dois subvetores estão armazenados em `v`:

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Intercalação:

- Os dois subvetores estão armazenados em `v`:
  - O primeiro nas posições de `l` até `m`

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Intercalação:

- Os dois subvetores estão armazenados em `v`:
  - O primeiro nas posições de `l` até `m`
  - O segundo nas posições de `m + 1` até `r`

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Intercalação:

- Os dois subvetores estão armazenados em `v`:
  - O primeiro nas posições de `l` até `m`
  - O segundo nas posições de `m + 1` até `r`
- Precisamos de um vetor auxiliar do tamanho do vetor

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Intercalação:

- Os dois subvetores estão armazenados em `v`:
  - O primeiro nas posições de `l` até `m`
  - O segundo nas posições de `m + 1` até `r`
- Precisamos de um vetor auxiliar do tamanho do vetor
- Vamos considerar que o maior vetor tem tamanho `MAX`

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Intercalação:

- Os dois subvetores estão armazenados em `v`:
  - O primeiro nas posições de `l` até `m`
  - O segundo nas posições de `m + 1` até `r`
- Precisamos de um vetor auxiliar do tamanho do vetor
- Vamos considerar que o maior vetor tem tamanho `MAX`
  - Exemplo `#define MAX 100`

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1 void merge(int *v, int l, int m, int r) {
```

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1 void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2   int aux[MAX];
3   int i = l, j = m + 1, k = 0;
```

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1 void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2   int aux[MAX];
3   int i = l, j = m + 1, k = 0;
4   //intercala
5   while(i <= m && j <= r)
6     if (v[i] <= v[j])
7       aux[k++] = v[i++];
8     else
9       aux[k++] = v[j++];
```

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1  void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2    int aux[MAX];
3    int i = l, j = m + 1, k = 0;
4    //intercala
5    while(i <= m && j <= r)
6      if (v[i] <= v[j])
7        aux[k++] = v[i++];
8      else
9        aux[k++] = v[j++];
10   //copia o resto do subvetor que não terminou
11   while (i <= m)
12     aux[k++] = v[i++];
```

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1  void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2    int aux[MAX];
3    int i = l, j = m + 1, k = 0;
4    //intercala
5    while(i <= m && j <= r)
6      if (v[i] <= v[j])
7        aux[k++] = v[i++];
8      else
9        aux[k++] = v[j++];
10   //copia o resto do subvetor que não terminou
11   while (i <= m)
12     aux[k++] = v[i++];
13   while (j <= r)
14     aux[k++] = v[j++];
```

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1  void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2    int aux[MAX];
3    int i = l, j = m + 1, k = 0;
4    //intercala
5    while(i <= m && j <= r)
6      if (v[i] <= v[j])
7        aux[k++] = v[i++];
8      else
9        aux[k++] = v[j++];
10   //copia o resto do subvetor que não terminou
11   while (i <= m)
12     aux[k++] = v[i++];
13   while (j <= r)
14     aux[k++] = v[j++];
15   //copia de volta para v
16   for (i = l, k=0; i <= r; i++, k++)
17       v[i] = aux[k];
18 }
```

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1  void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2    int aux[MAX];
3    int i = l, j = m + 1, k = 0;
4    //intercala
5    while(i <= m && j <= r)
6      if (v[i] <= v[j])
7        aux[k++] = v[i++];
8      else
9        aux[k++] = v[j++];
10   //copia o resto do subvetor que não terminou
11   while (i <= m)
12     aux[k++] = v[i++];
13   while (j <= r)
14     aux[k++] = v[j++];
15   //copia de volta para v
16   for (i = l, k=0; i <= r; i++, k++)
17       v[i] = aux[k];
18 }
```

Quantas comparações são feitas?

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1  void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2    int aux[MAX];
3    int i = l, j = m + 1, k = 0;
4    //intercala
5    while(i <= m && j <= r)
6      if (v[i] <= v[j])
7        aux[k++] = v[i++];
8      else
9        aux[k++] = v[j++];
10   //copia o resto do subvetor que não terminou
11   while (i <= m)
12     aux[k++] = v[i++];
13   while (j <= r)
14     aux[k++] = v[j++];
15   //copia de volta para v
16   for (i = l, k=0; i <= r; i++, k++)
17       v[i] = aux[k];
18 }
```

Quantas comparações são feitas?

- a cada passo, aumentamos um em `i` ou em `j`

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

```
1  void merge(int *v, int l, int m, int r) {
2    int aux[MAX];
3    int i = l, j = m + 1, k = 0;
4    //intercala
5    while(i <= m && j <= r)
6      if (v[i] <= v[j])
7        aux[k++] = v[i++];
8      else
9        aux[k++] = v[j++];
10   //copia o resto do subvetor que não terminou
11   while (i <= m)
12     aux[k++] = v[i++];
13   while (j <= r)
14     aux[k++] = v[j++];
15   //copia de volta para v
16   for (i = l, k=0; i <= r; i++, k++)
17       v[i] = aux[k];
18 }
```

Quantas comparações são feitas?

- a cada passo, aumentamos um em `i` ou em `j`
- no máximo $n := r - l + 1$

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

- Recebemos um `vetor` de tamanho n com limites:

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

- Recebemos um `vetor` de tamanho n com limites:
  - O vetor começa na posição `vetor[l]`

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

- Recebemos um `vetor` de tamanho n com limites:
  - O vetor começa na posição `vetor[l]`
  - O vetor termina na posição `vetor[r]`

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

- Recebemos um `vetor` de tamanho n com limites:
  - O vetor começa na posição `vetor[l]`
  - O vetor termina na posição `vetor[r]`
- Dividimos o vetor em dois subvetores de tamanho $n/2$

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

- Recebemos um `vetor` de tamanho n com limites:
  - O vetor começa na posição `vetor[l]`
  - O vetor termina na posição `vetor[r]`
- Dividimos o vetor em dois subvetores de tamanho $n/2$
- O caso base é um vetor de tamanho 0 ou 1

Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

- Recebemos um `vetor` de tamanho n com limites:
  - O vetor começa na posição `vetor[l]`
  - O vetor termina na posição `vetor[r]`
- Dividimos o vetor em dois subvetores de tamanho $n/2$
- O caso base é um vetor de tamanho 0 ou 1

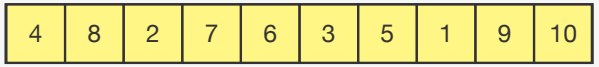
Ordenação por intercalação (*MergeSort*)

Ordenação:

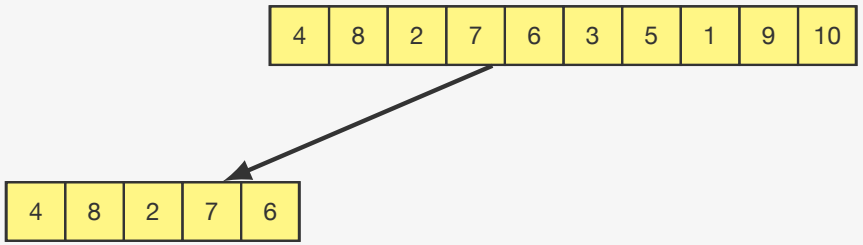
- Recebemos um `vetor` de tamanho n com limites:
  - O vetor começa na posição `vetor[l]`
  - O vetor termina na posição `vetor[r]`
- Dividimos o vetor em dois subvetores de tamanho $n/2$
- O caso base é um vetor de tamanho 0 ou 1

```
1  void mergesort(int *v, int l, int r) {
2    int m = (l + r) / 2;;
3    if (l < r) {
4      //divisão
5      mergesort(v, l, m);
6      mergesort(v, m + 1, r);
7      //conquista
8      merge(v, l, m, r);
9    }
10 }
```

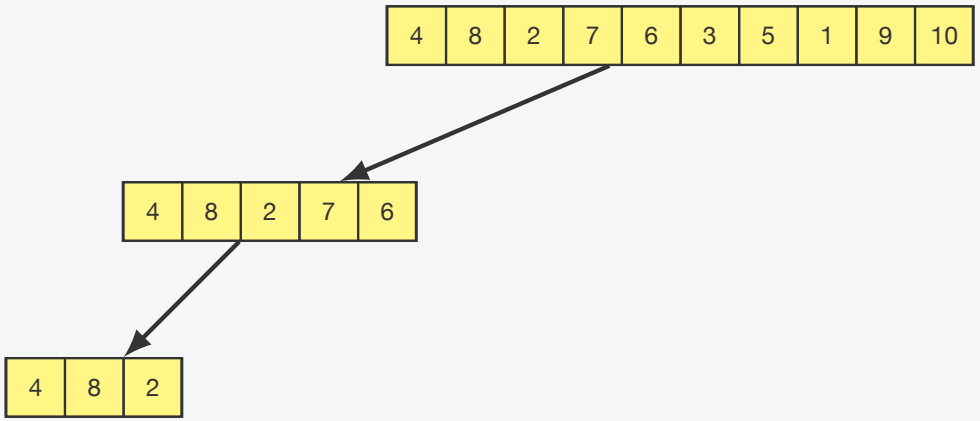
Simulação



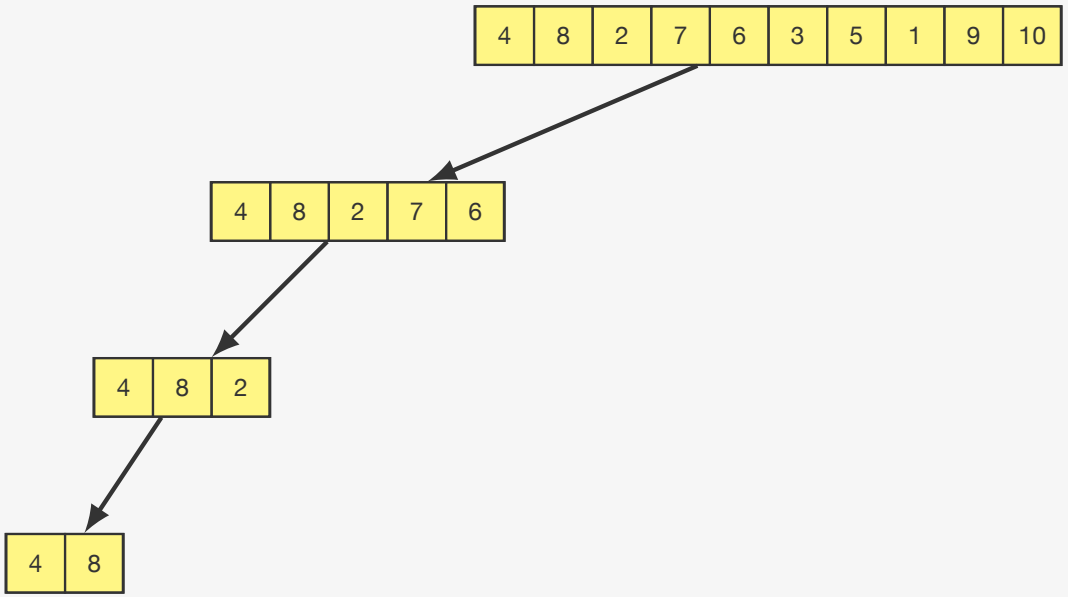
Simulação



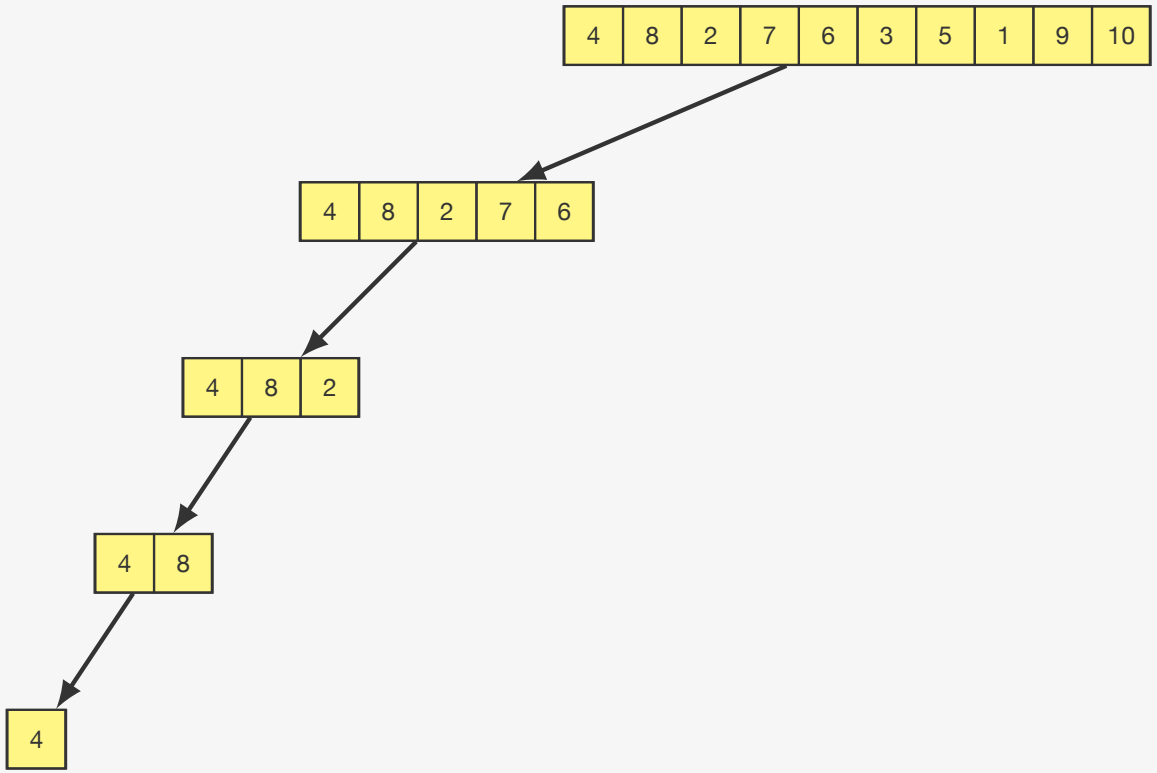
Simulação



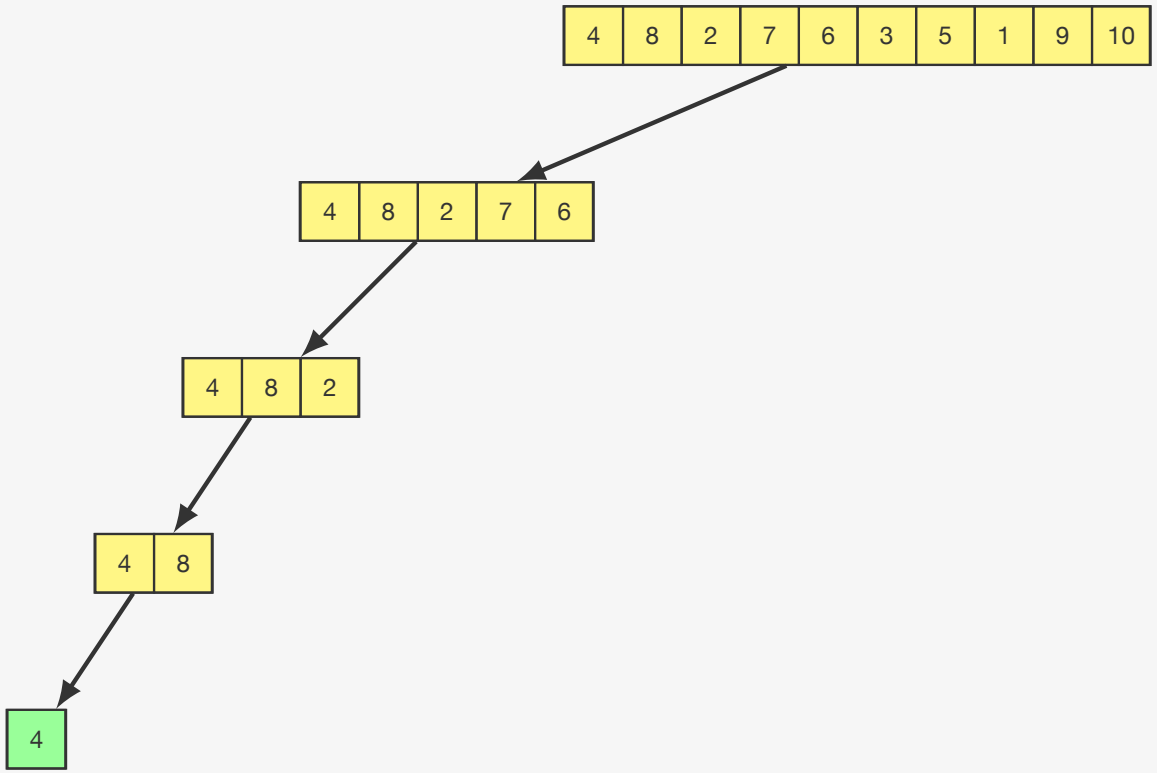
Simulação



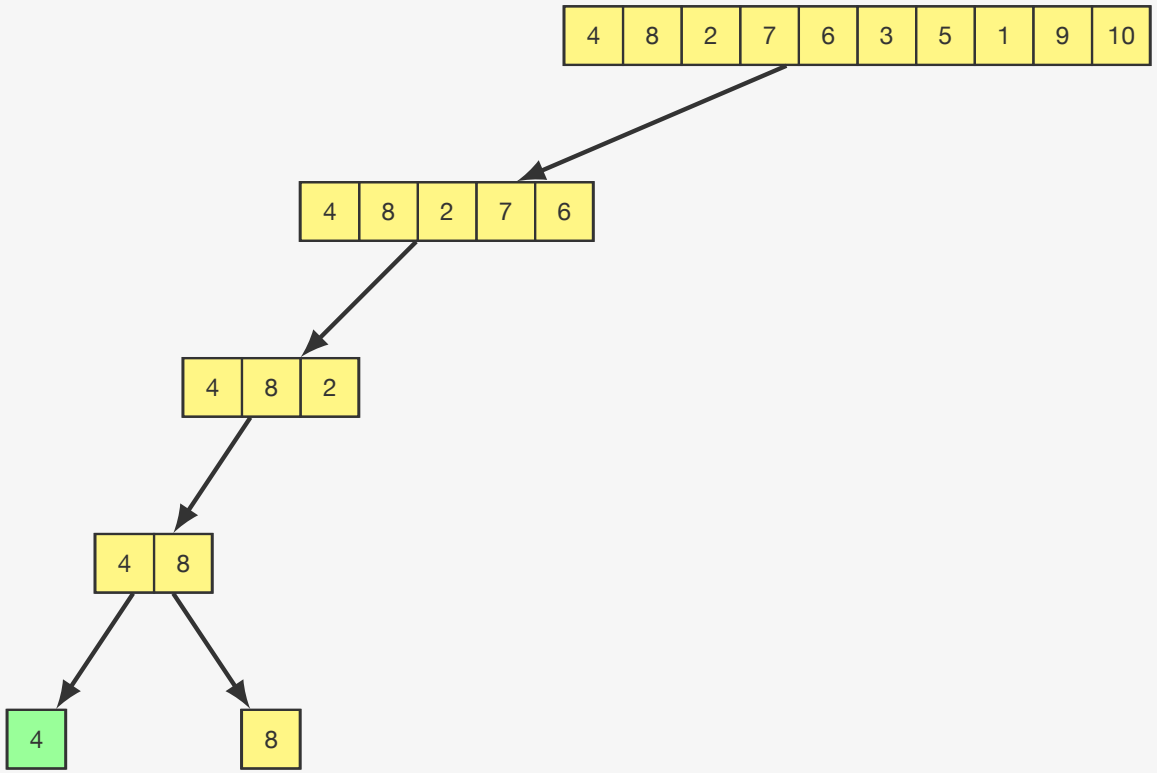
Simulação



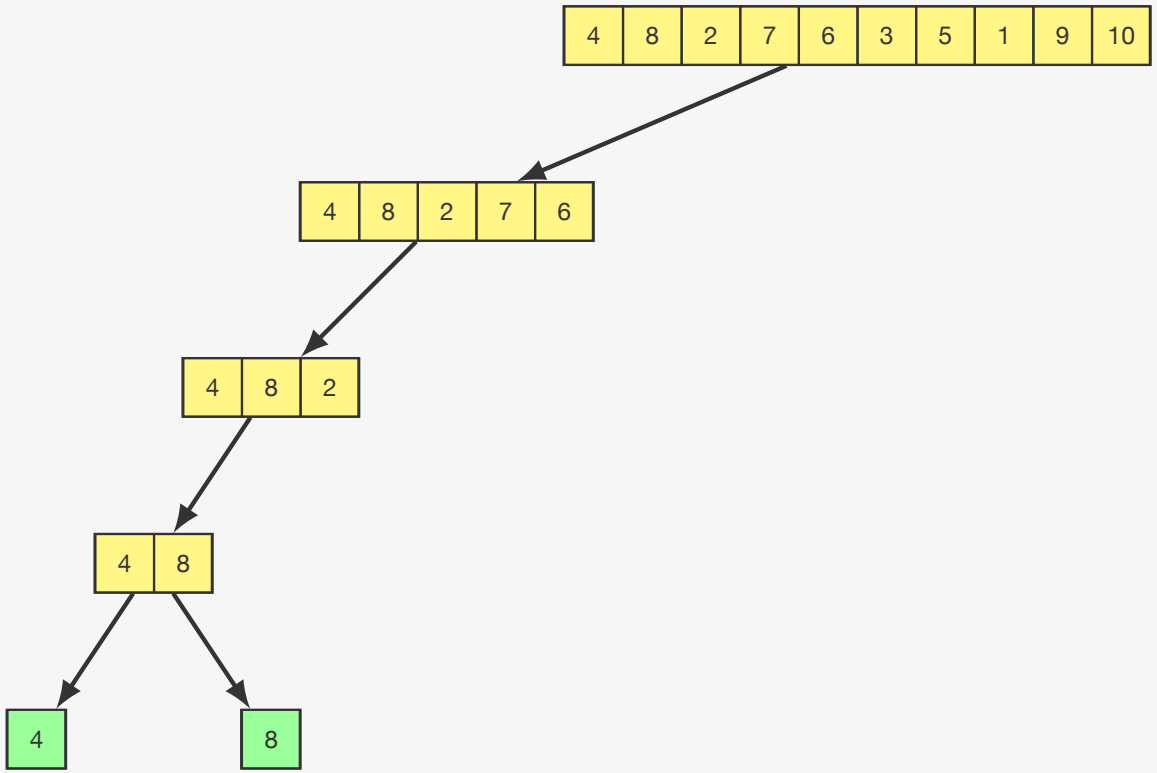
Simulação



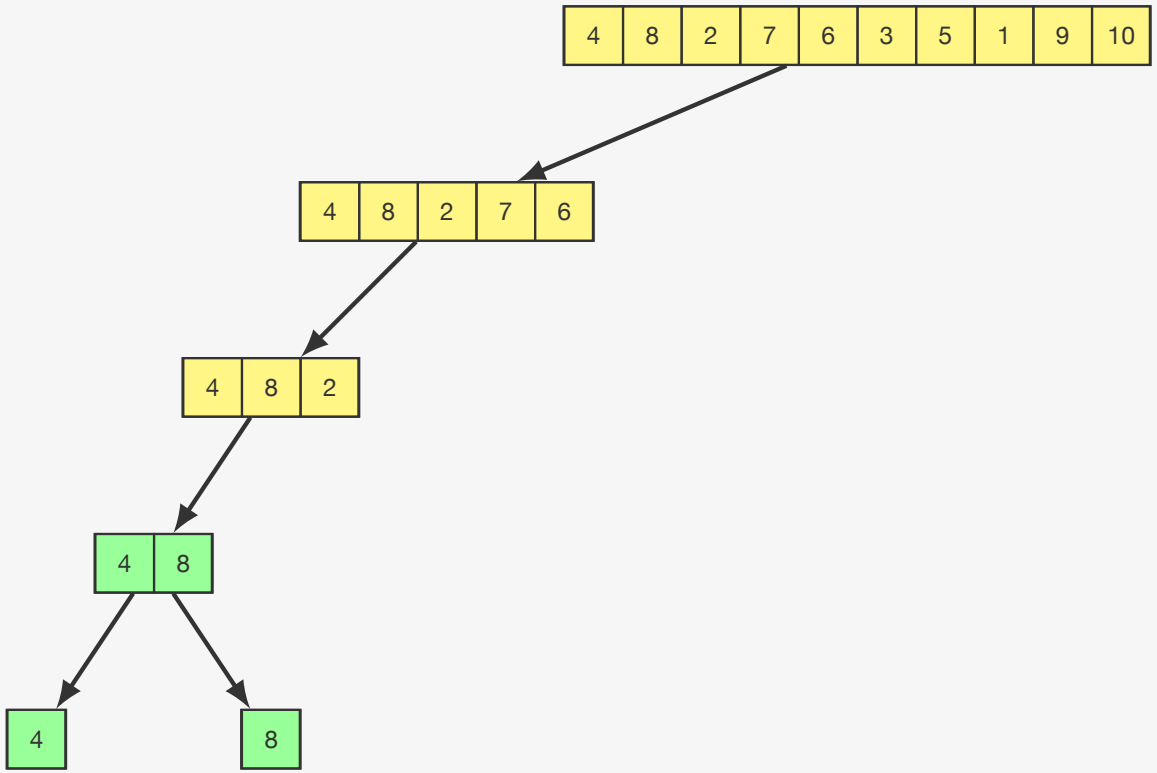
Simulação



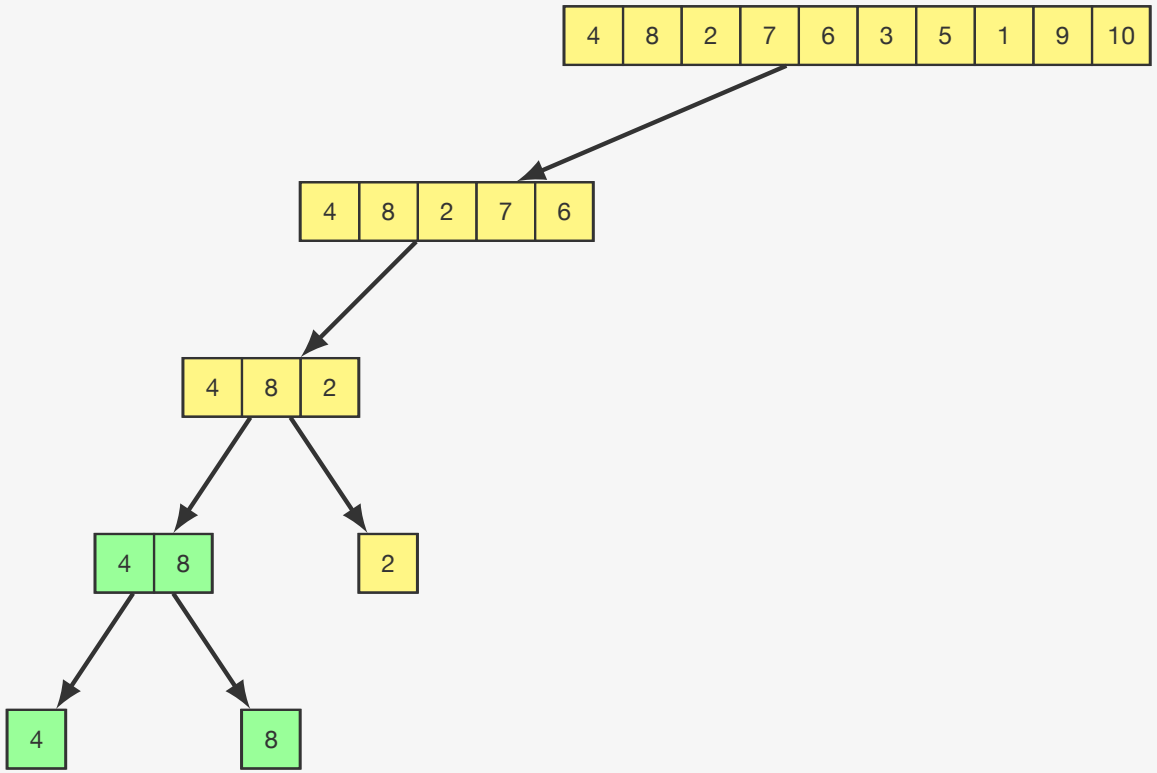
Simulação



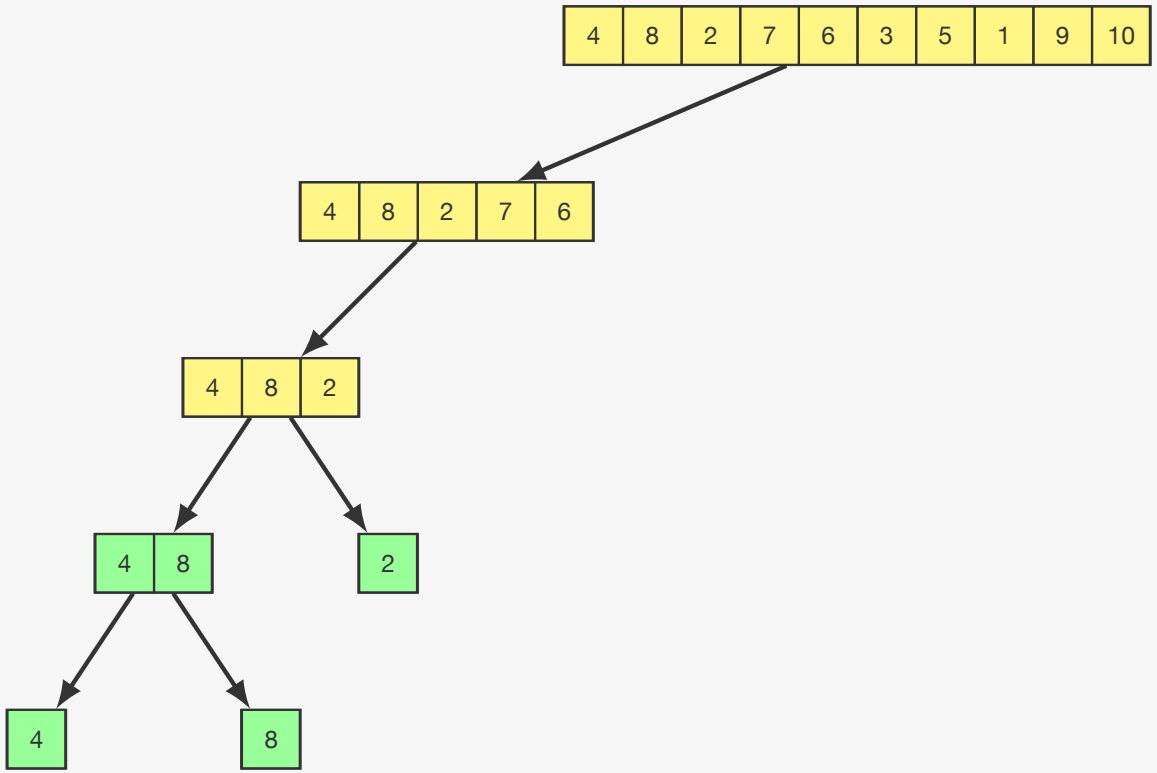
Simulação



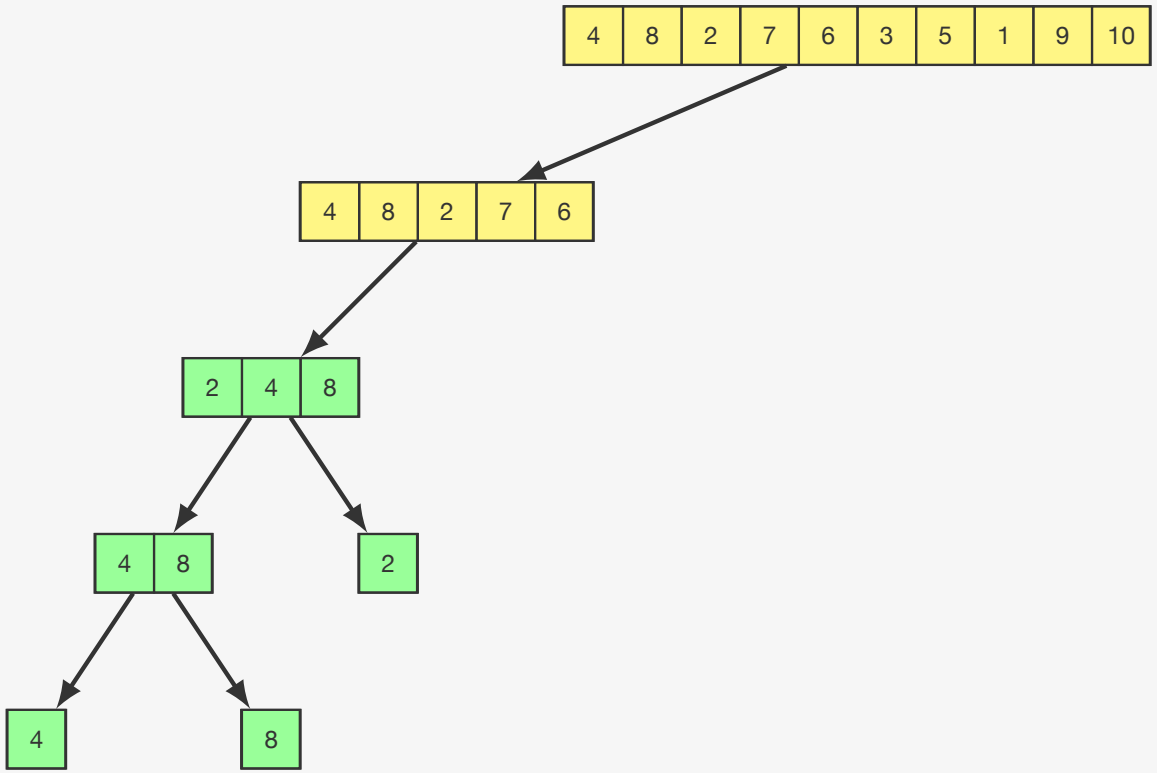
Simulação



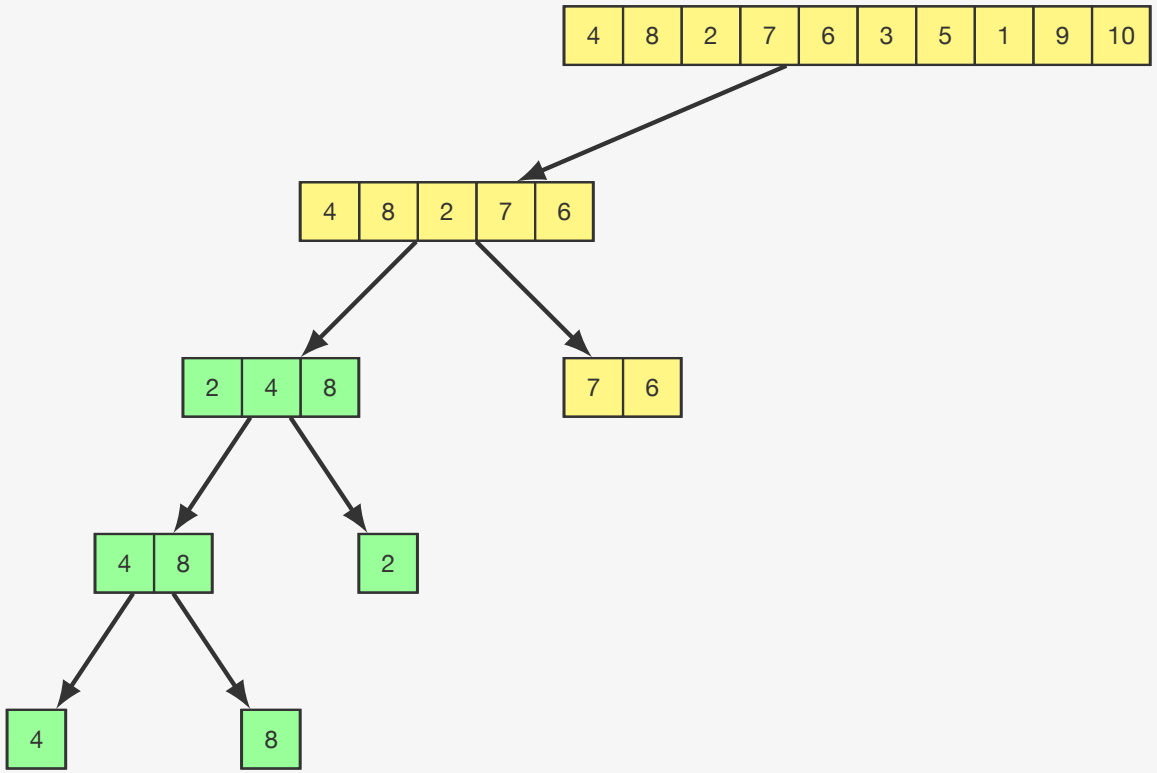
Simulação



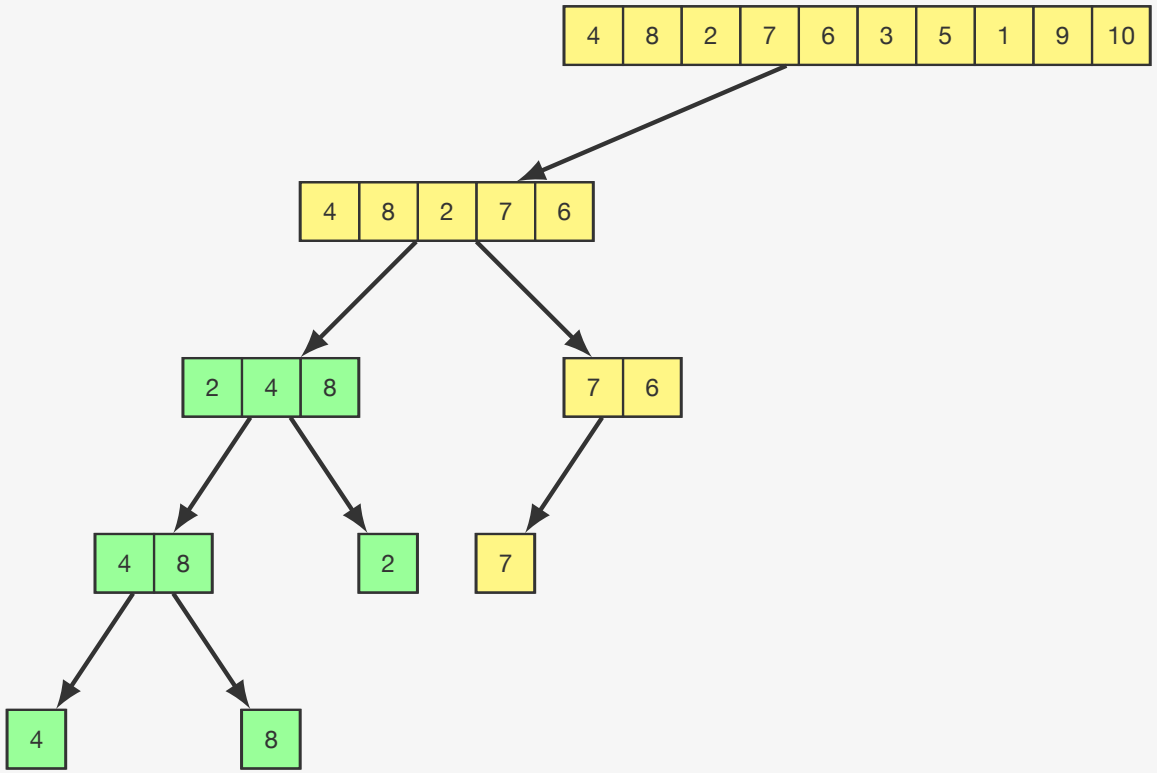
Simulação



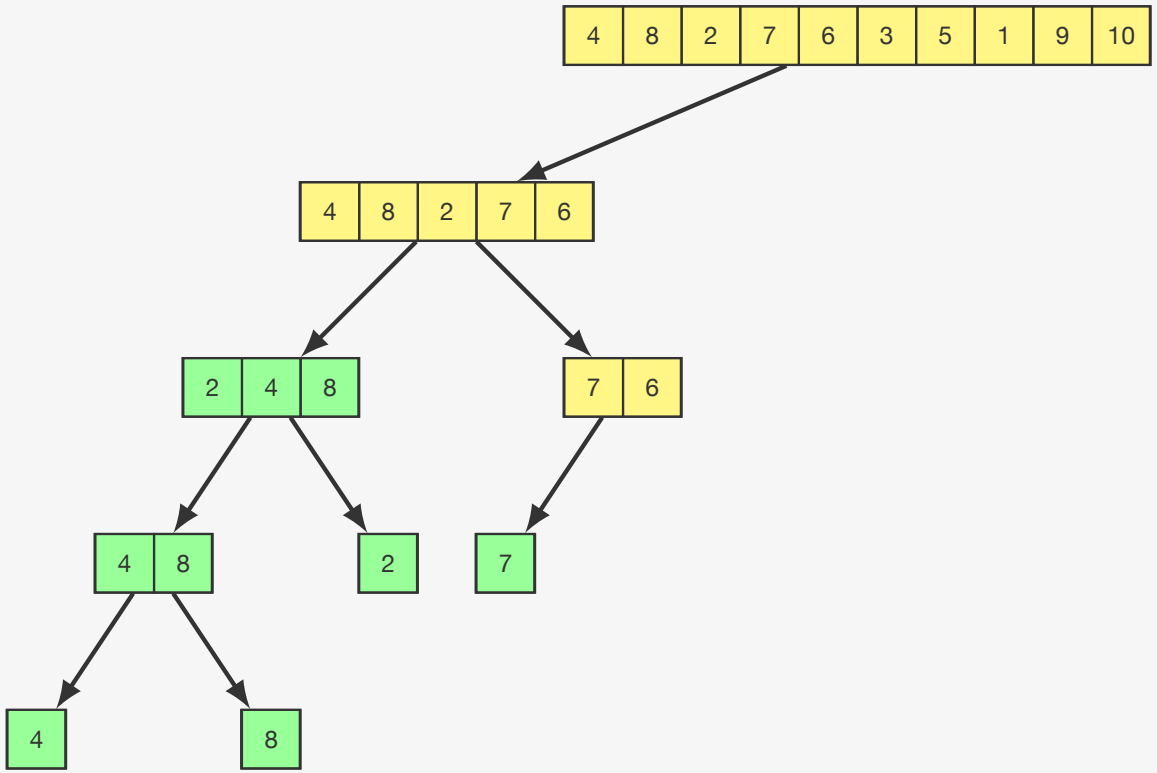
Simulação



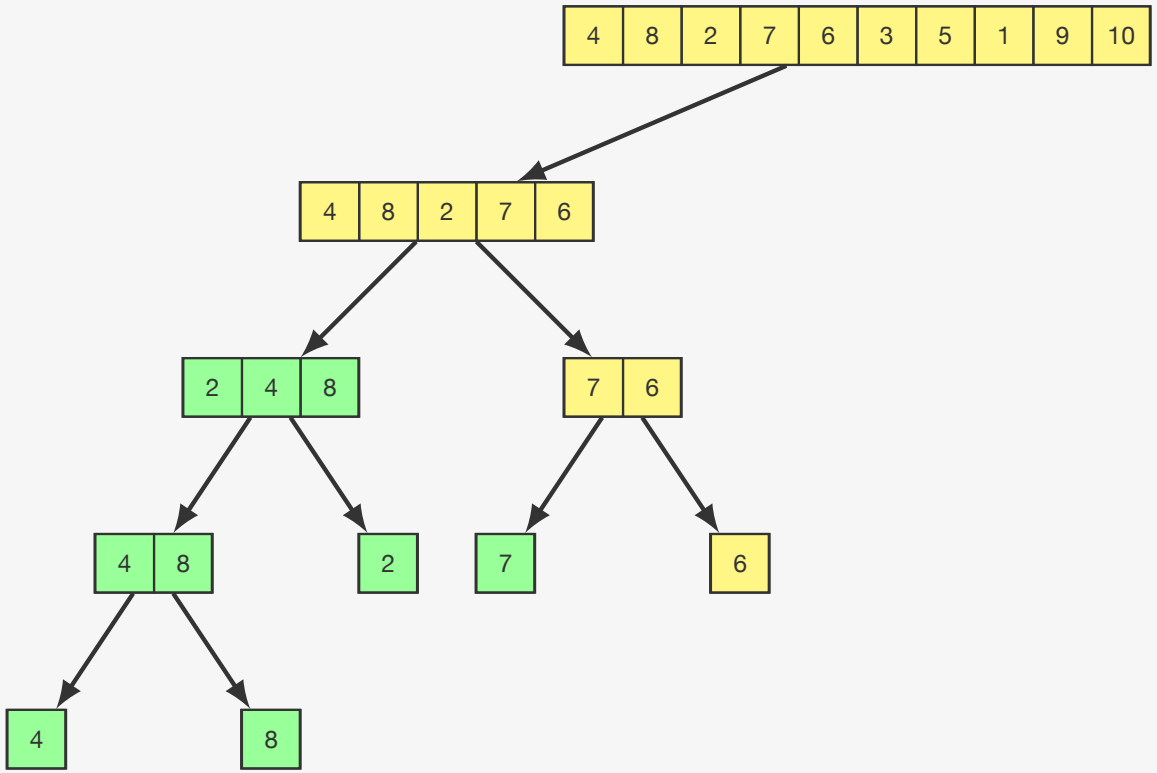
Simulação



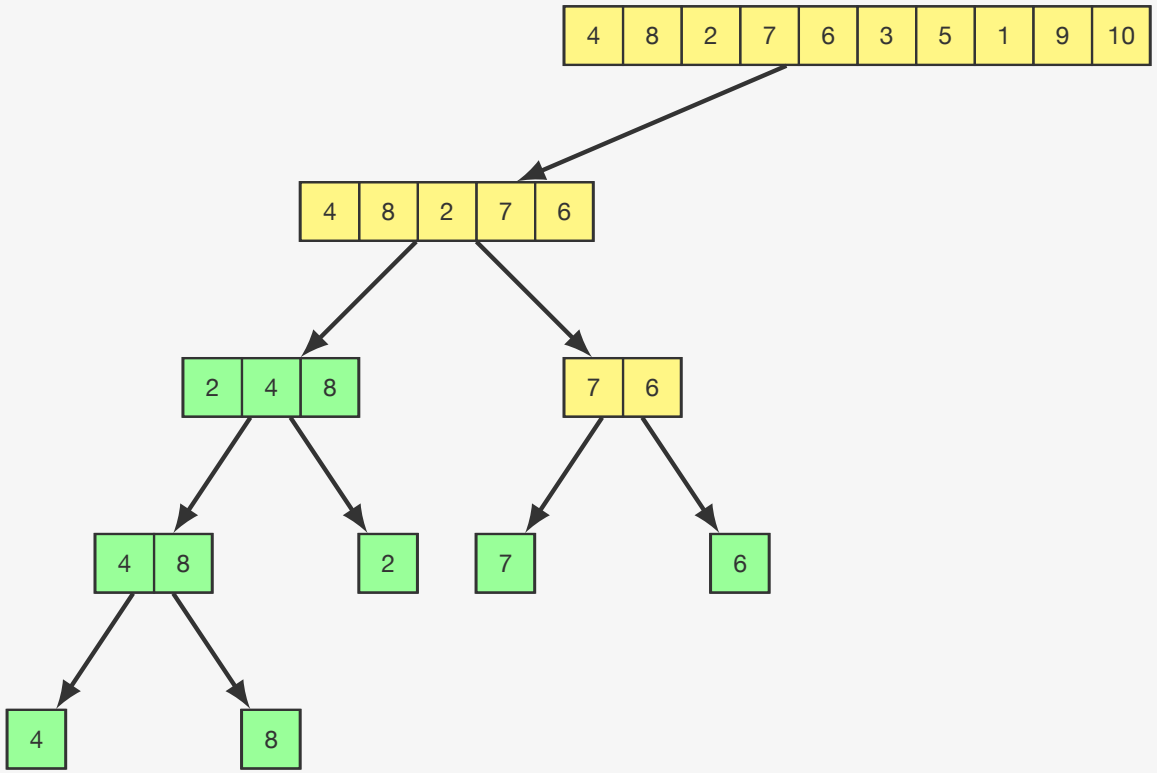
Simulação



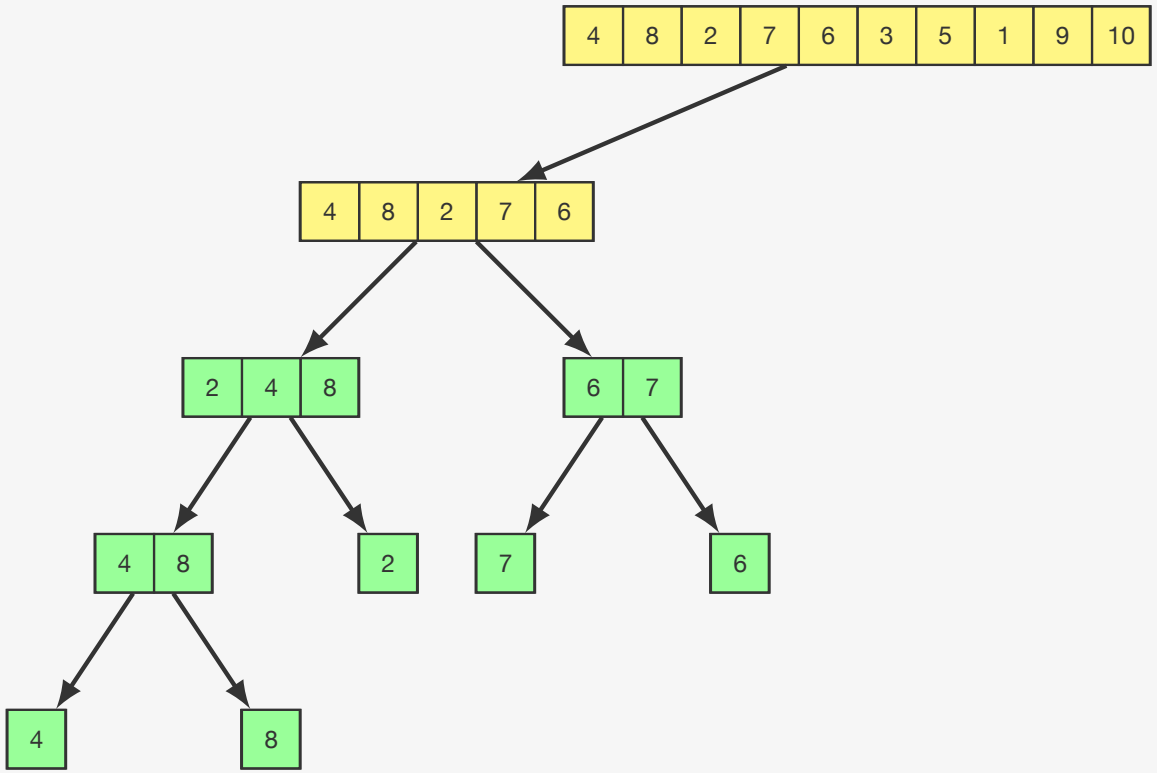
Simulação



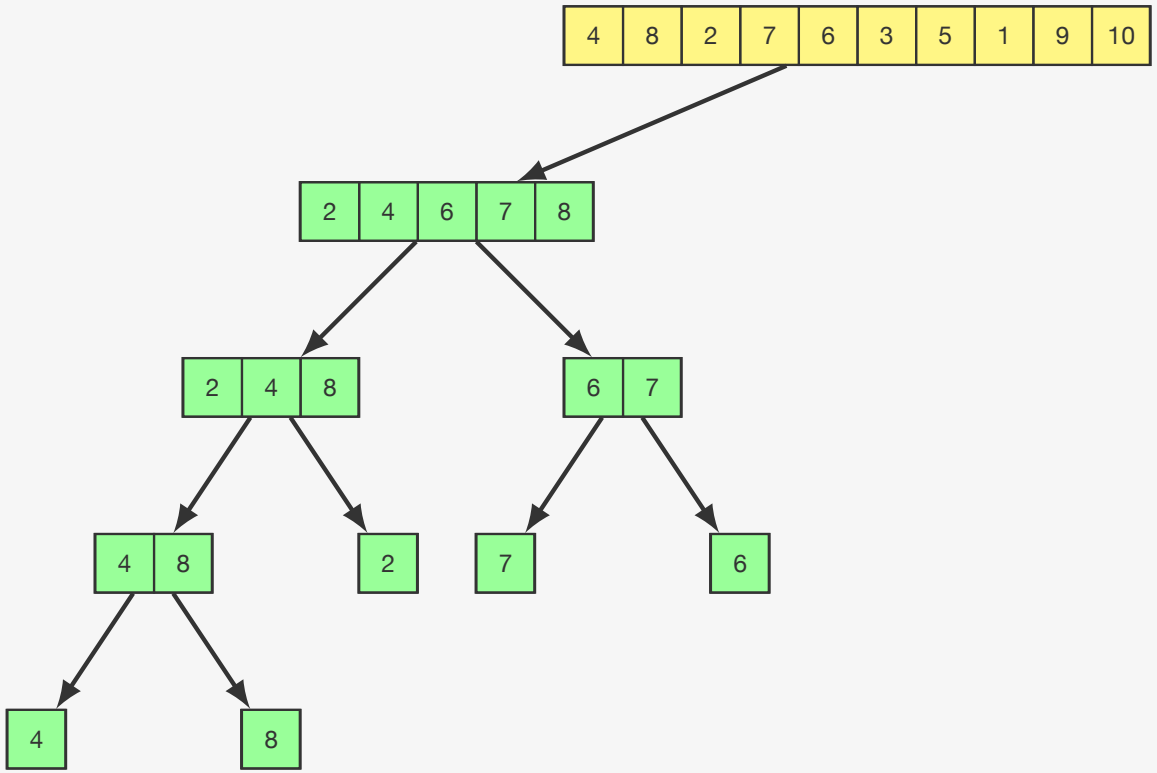
Simulação



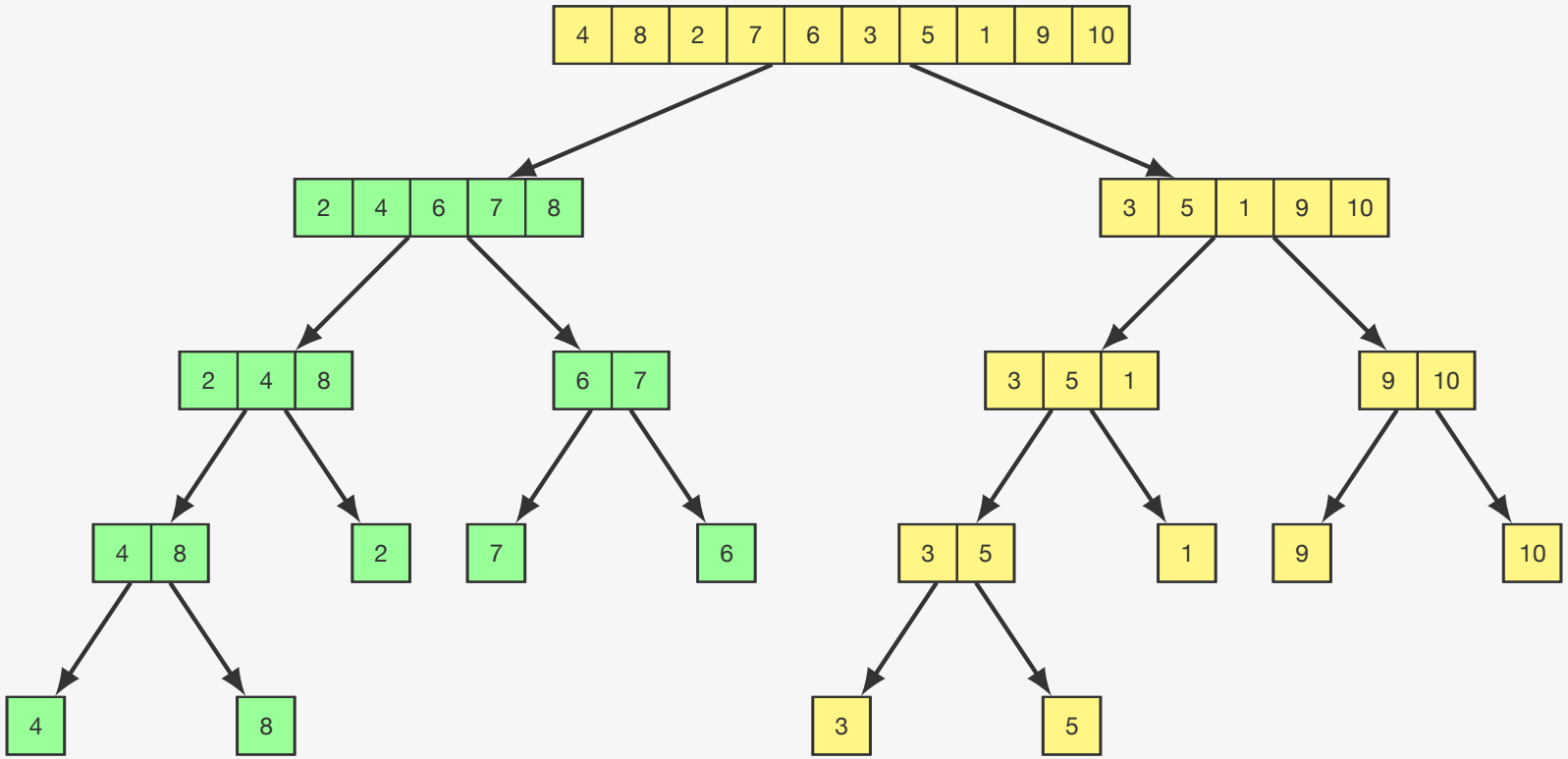
Simulação



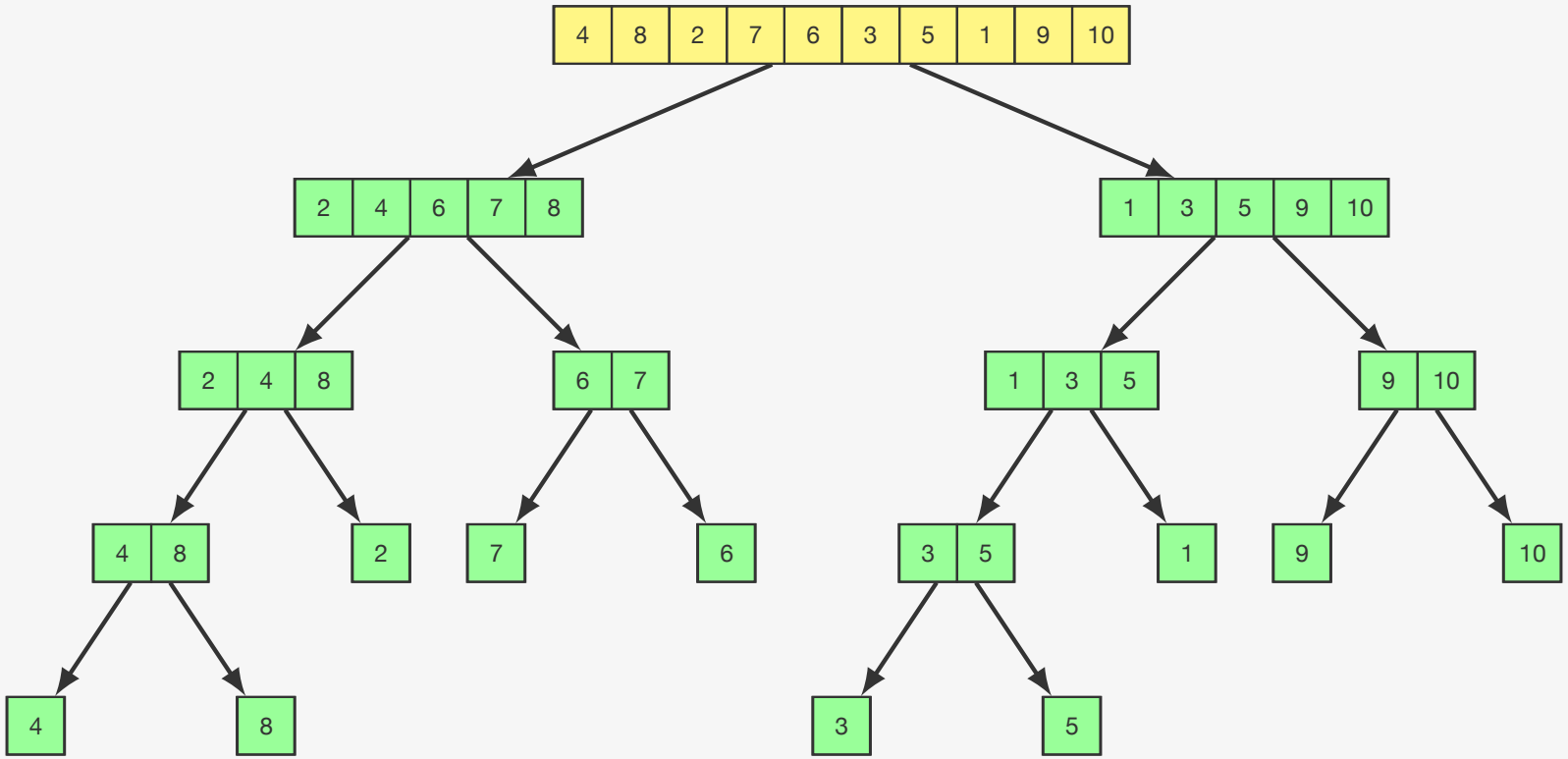
Simulação



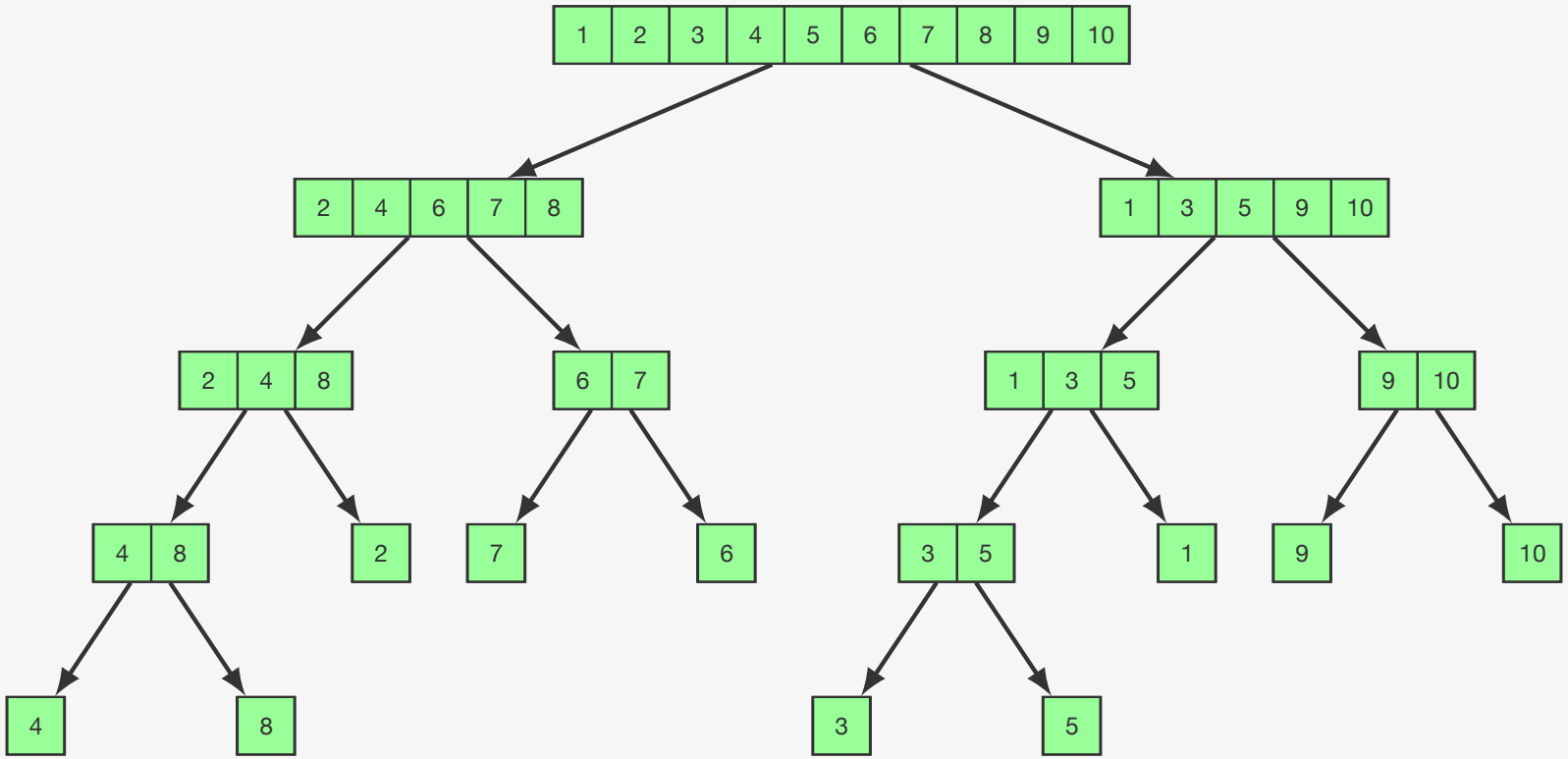
Simulação



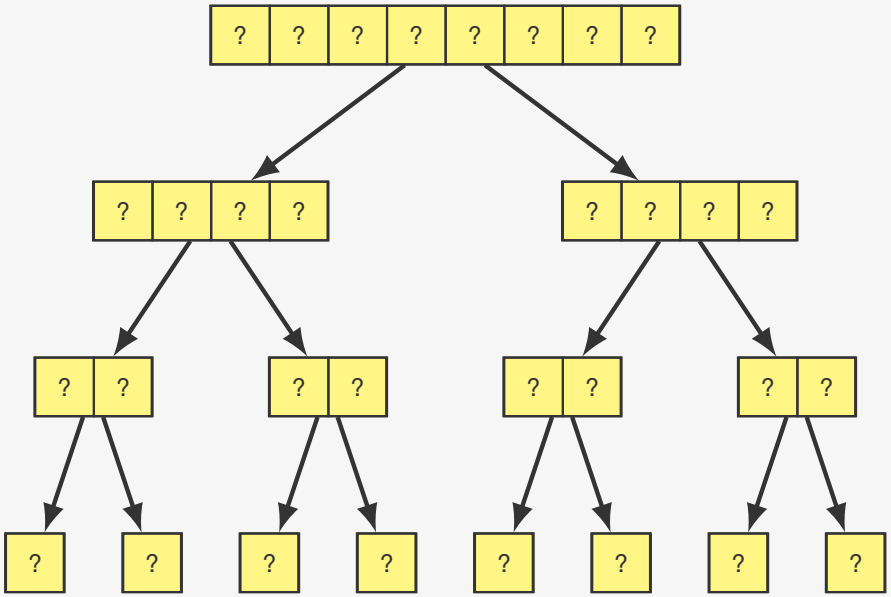
Simulação



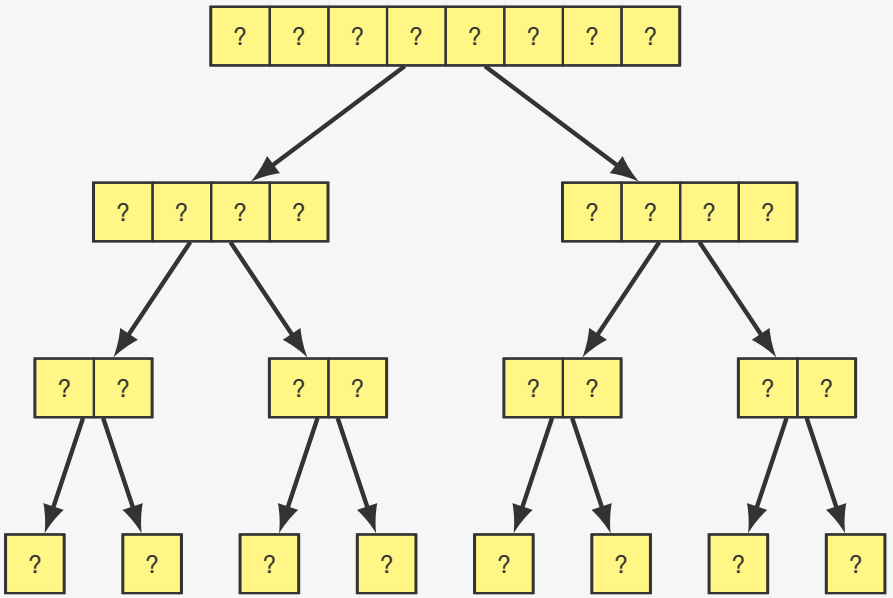
Simulação



Tempo de execução para $n = 2^l$



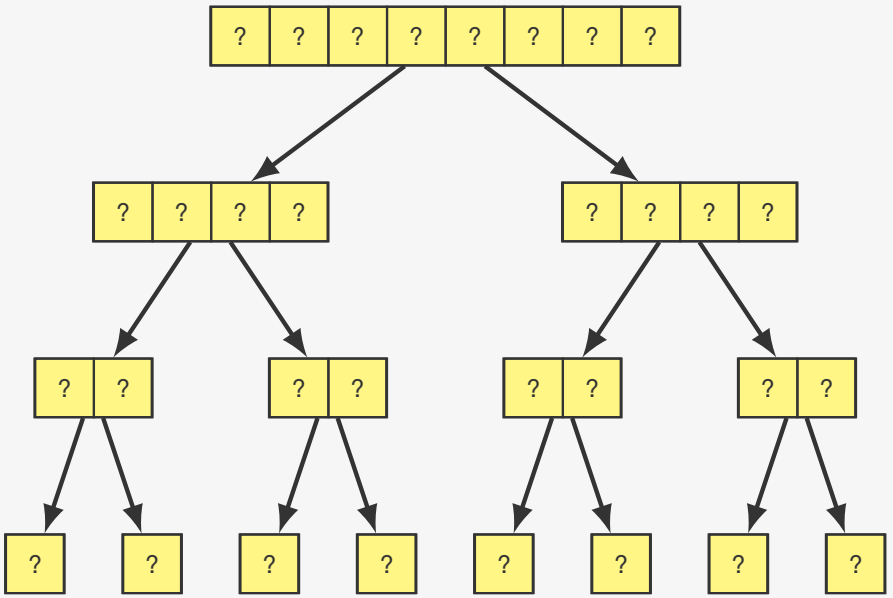
Tempo de execução para $n = 2^l$



$\leq c \cdot n$

- No primeiro nível fazemos um `merge` com n elementos

Tempo de execução para $n = 2^l$

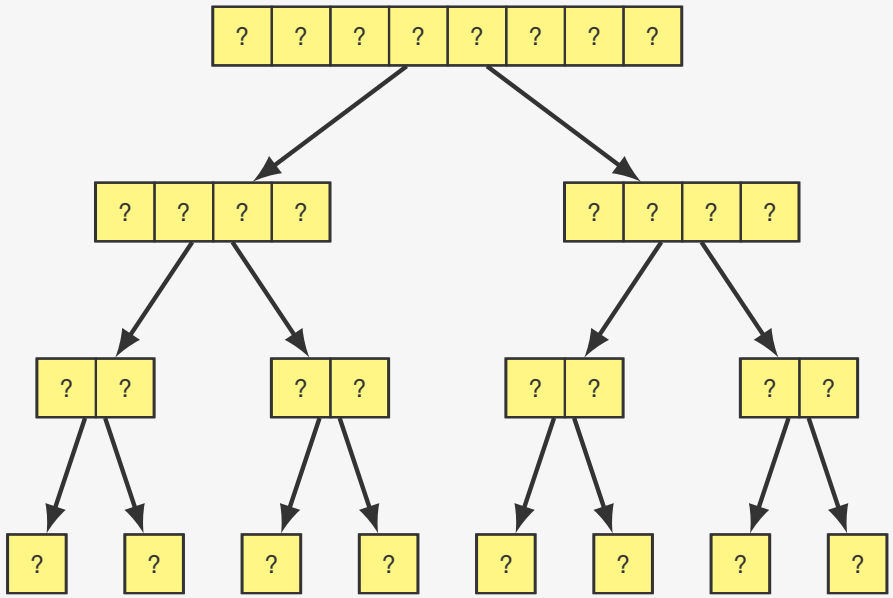


$\leq c \cdot n$

$\leq c \cdot 2(n/2)$

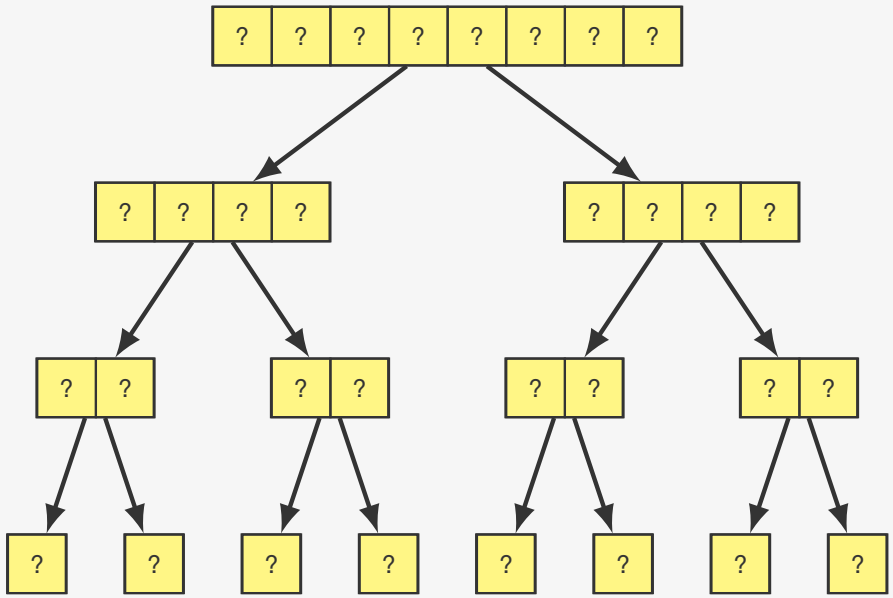
- No primeiro nível fazemos um `merge` com n elementos
- No segundo fazemos dois `merge` com $n/2$ elementos

Tempo de execução para $n = 2^l$



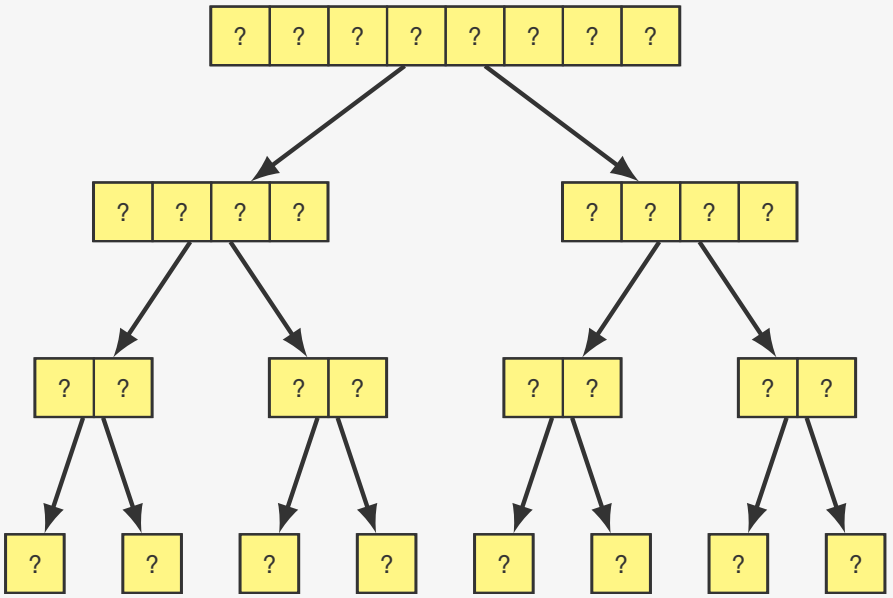
- No primeiro nível fazemos um `merge` com n elementos
- No segundo fazemos dois `merge` com $n/2$ elementos
- No k-ésimo fazemos 2^k `merge` com $n/2^k$ elementos

Tempo de execução para $n = 2^l$



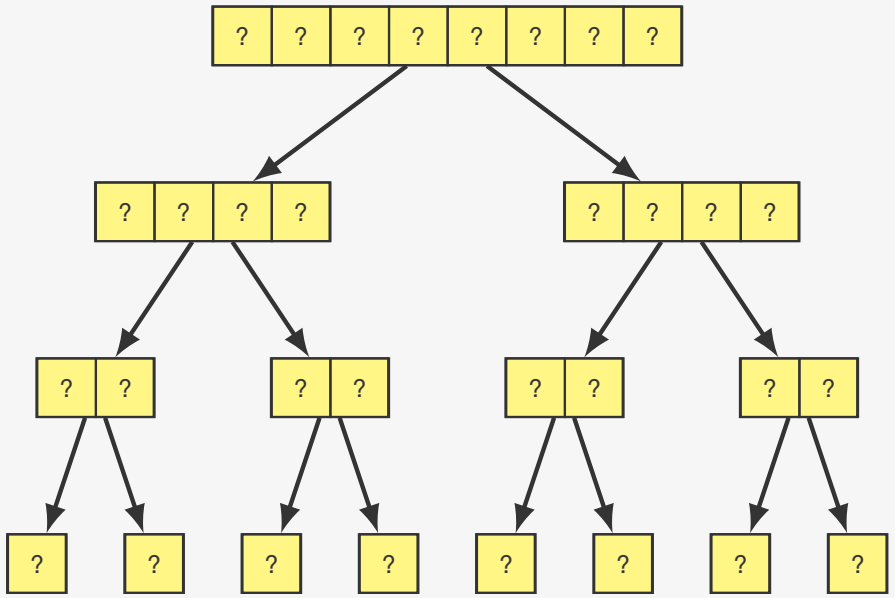
- No primeiro nível fazemos um `merge` com n elementos
- No segundo fazemos dois `merge` com $n/2$ elementos
- No k-ésimo fazemos 2^k `merge` com $n/2^k$ elementos
- No último gastamos tempo constante n vezes

Tempo de execução para $n = 2^l$



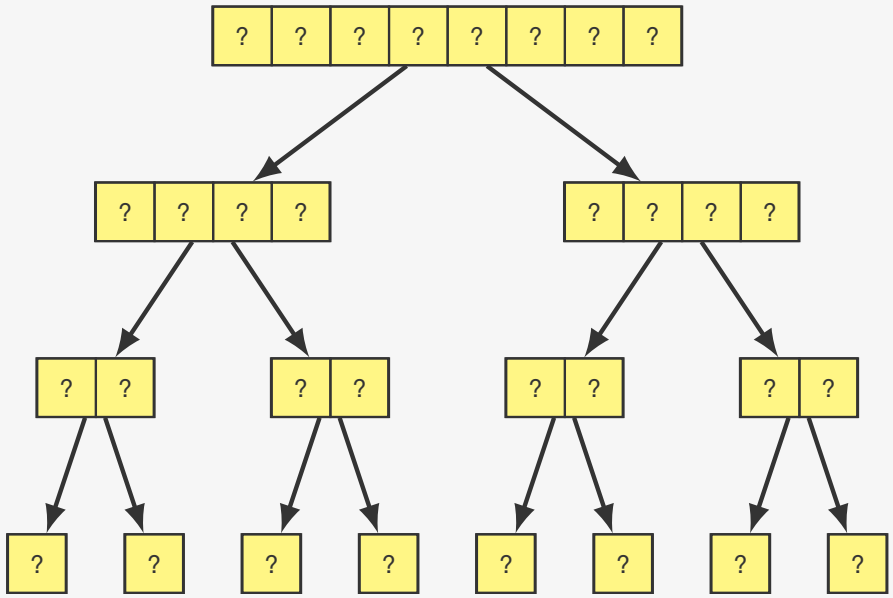
- No nível k gastamos tempo $\leq c \cdot n$

Tempo de execução para $n = 2^l$



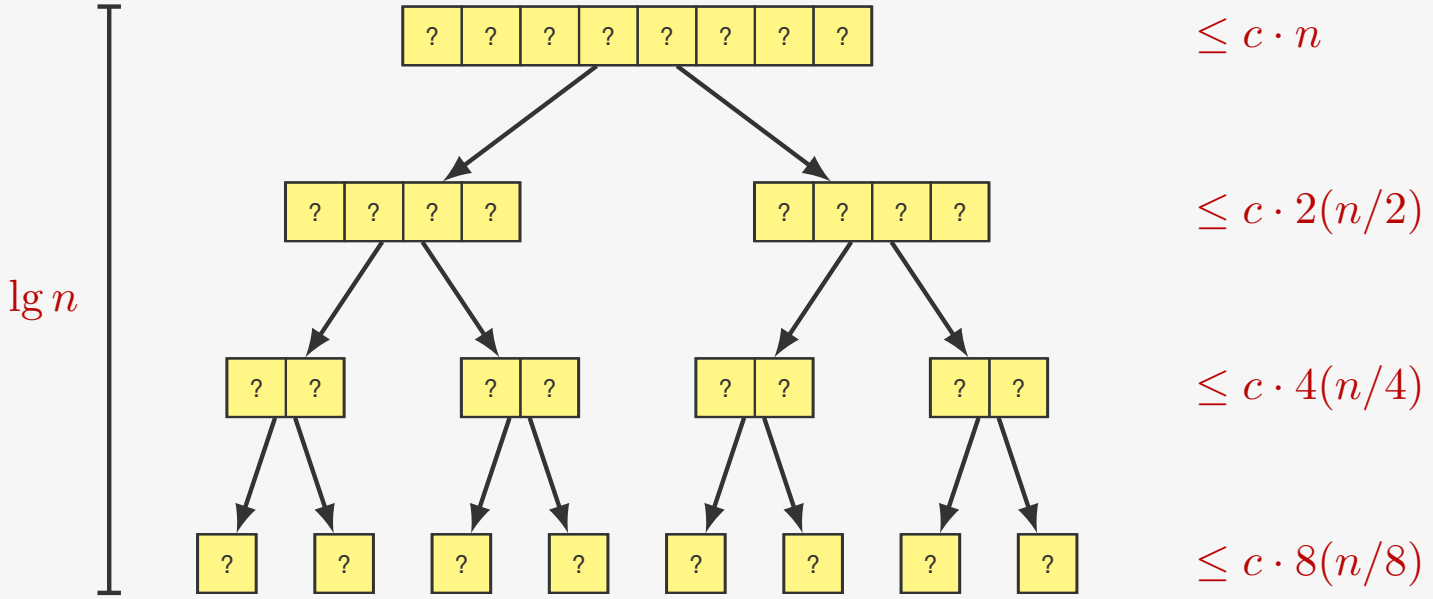
- No nível k gastamos tempo $\leq c \cdot n$
- Quantos níveis temos?

Tempo de execução para $n = 2^l$



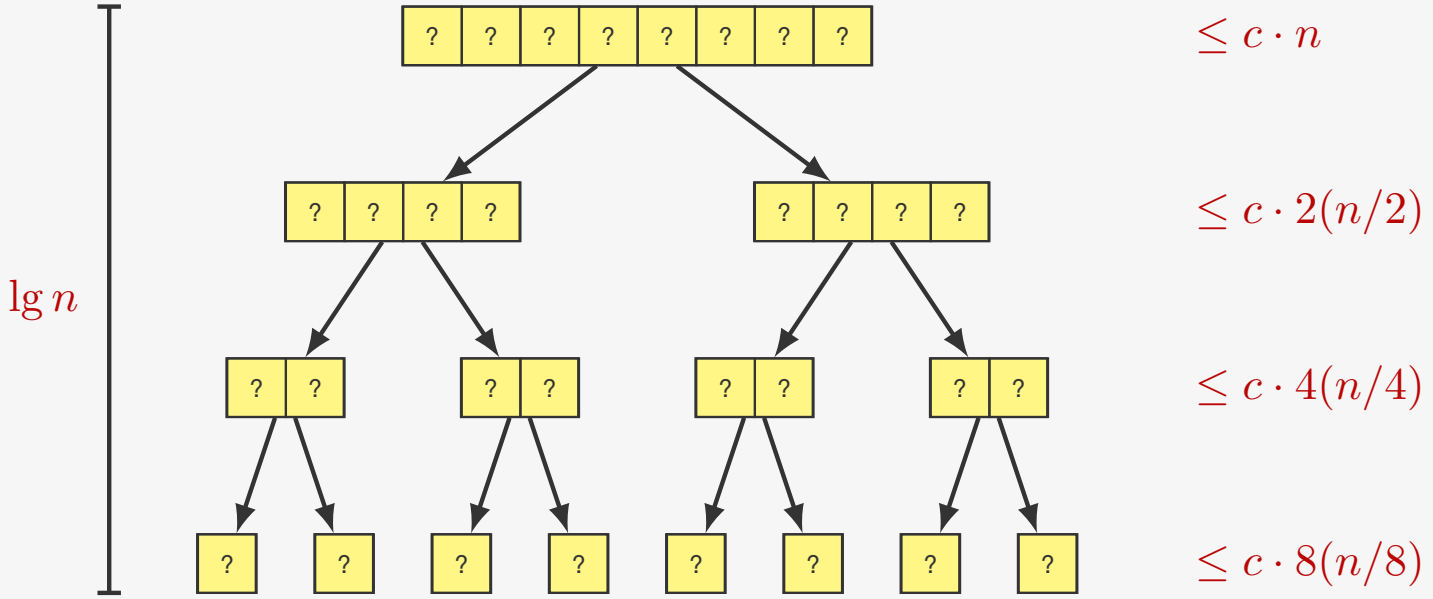
- No nível k gastamos tempo $\leq c \cdot n$
- Quantos níveis temos?
  - Dividimos n por 2 até que fique menor igual a 1

Tempo de execução para $n = 2^l$



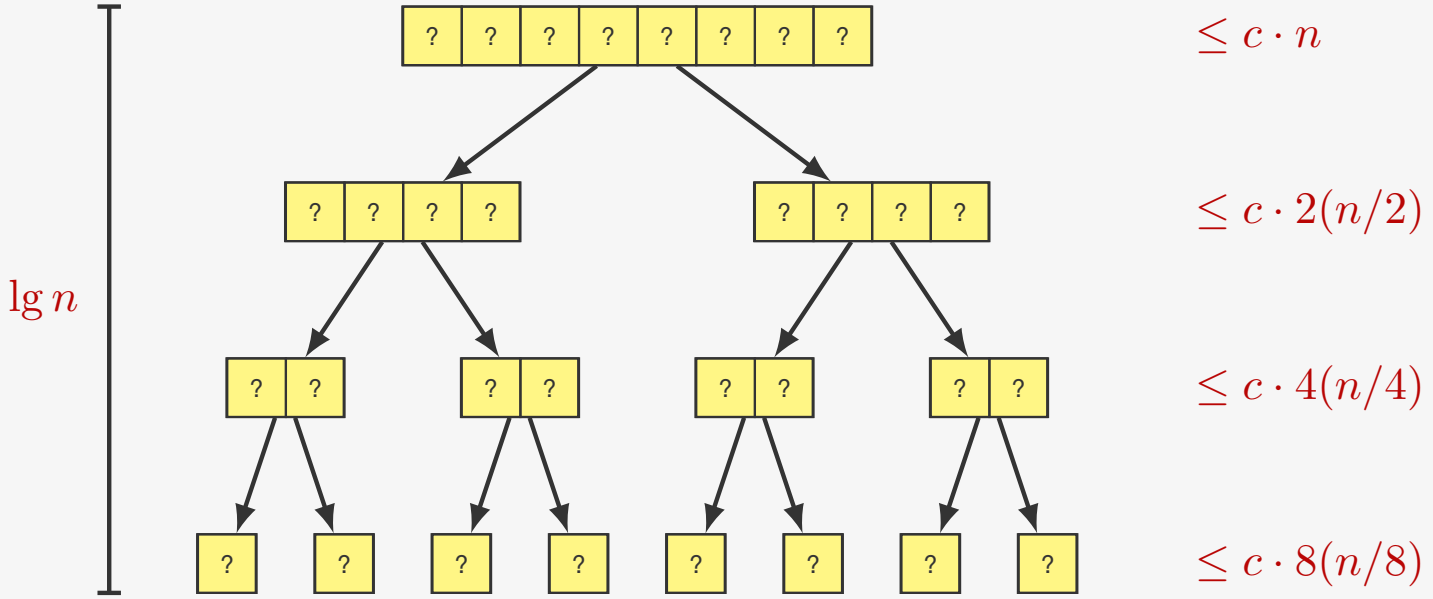
- No nível k gastamos tempo $\leq c \cdot n$
- Quantos níveis temos?
  - Dividimos n por 2 até que fique menor igual a 1
  - Ou seja, $l = \log_2 n$

Tempo de execução para $n = 2^l$



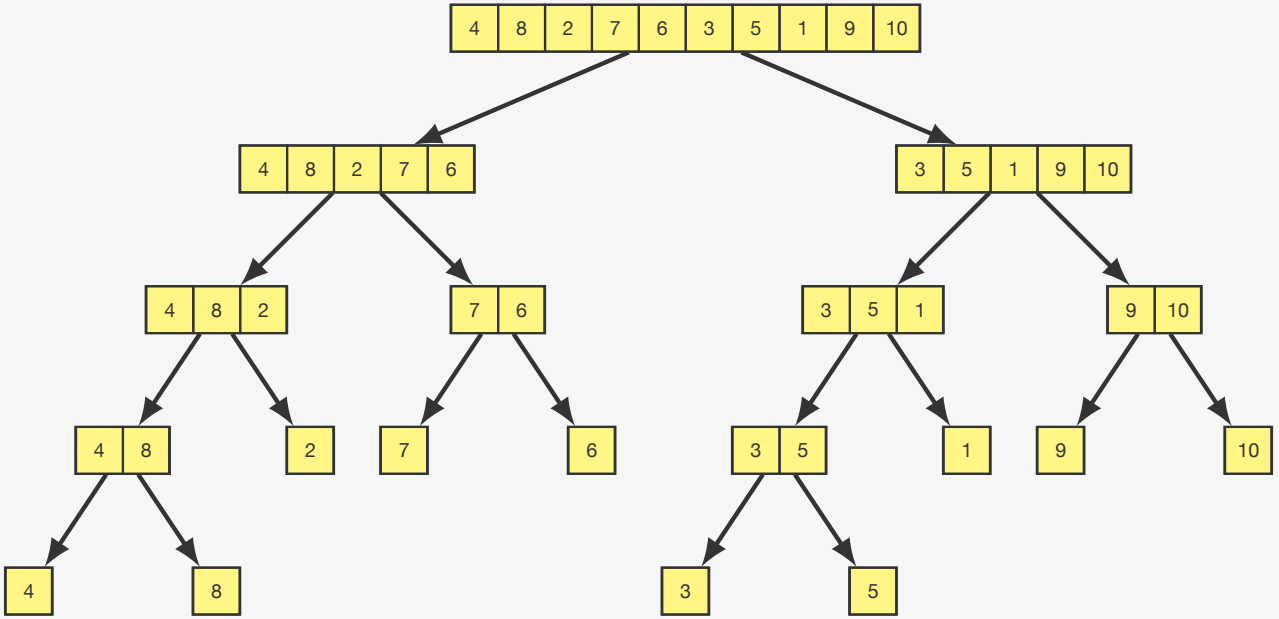
- No nível k gastamos tempo $\leq c \cdot n$
- Quantos níveis temos?
  - Dividimos n por 2 até que fique menor igual a 1
  - Ou seja, $l = \log_2 n$
- Como $\log_2 n$ é muito comum, escrevemos $\lg n$

Tempo de execução para $n = 2^l$

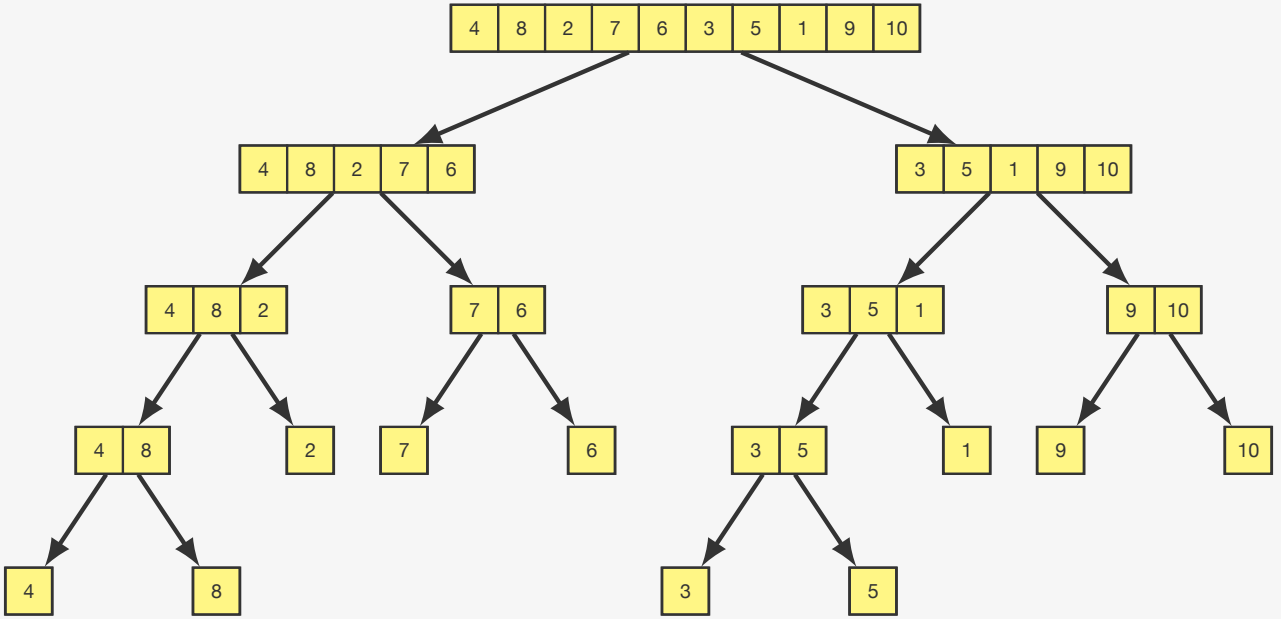


- No nível k gastamos tempo $\leq c \cdot n$
- Quantos níveis temos?
  - Dividimos n por 2 até que fique menor igual a 1
  - Ou seja, $l = \log_2 n$
- Como $\log_2 n$ é muito comum, escrevemos $\lg n$
- Tempo total: $cn \lg n = \mathrm{O}(n \lg n)$

Tempo de execução para n qualquer

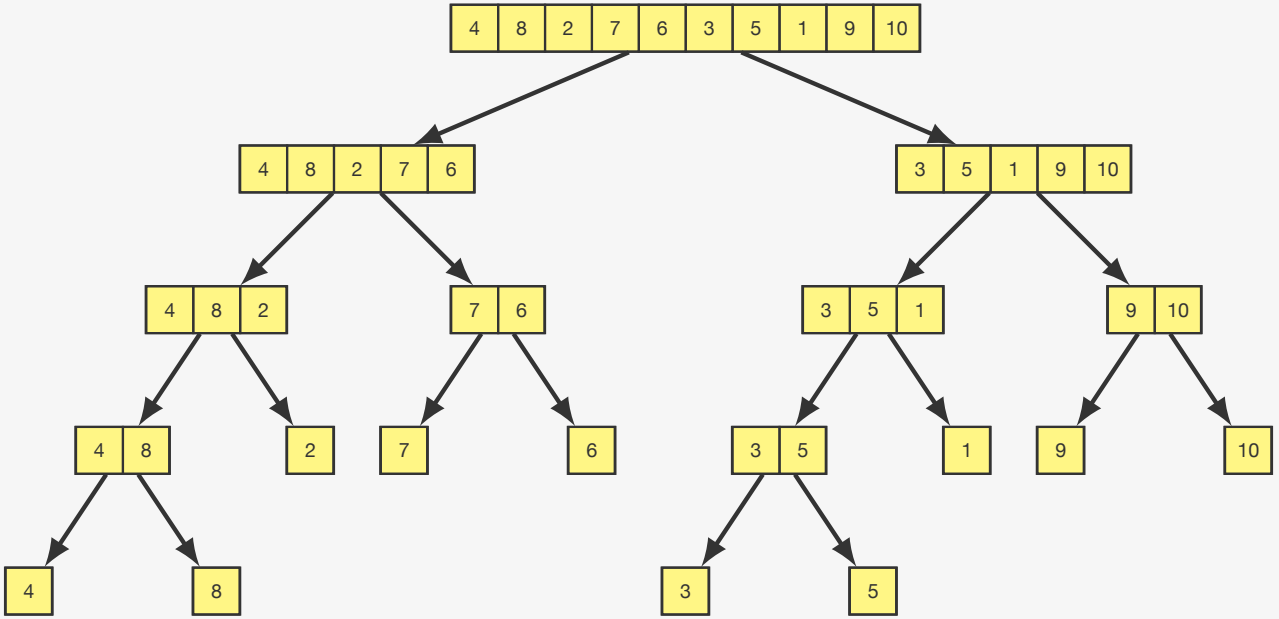


Tempo de execução para n qualquer



Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

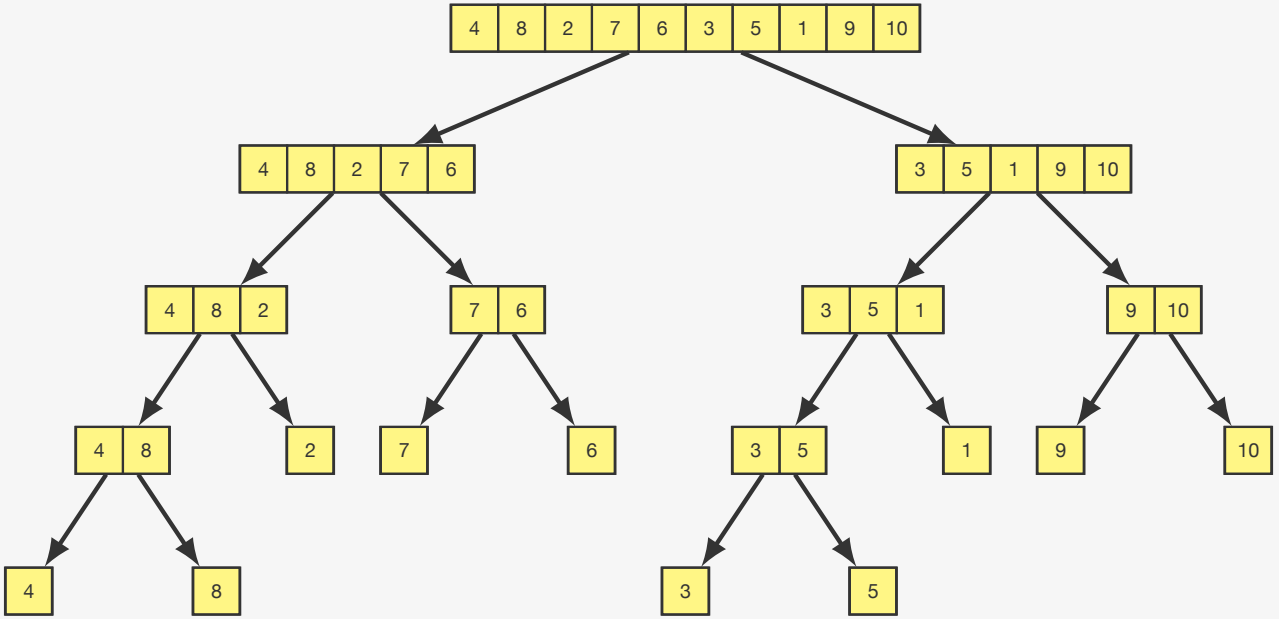
Tempo de execução para n qualquer



Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n

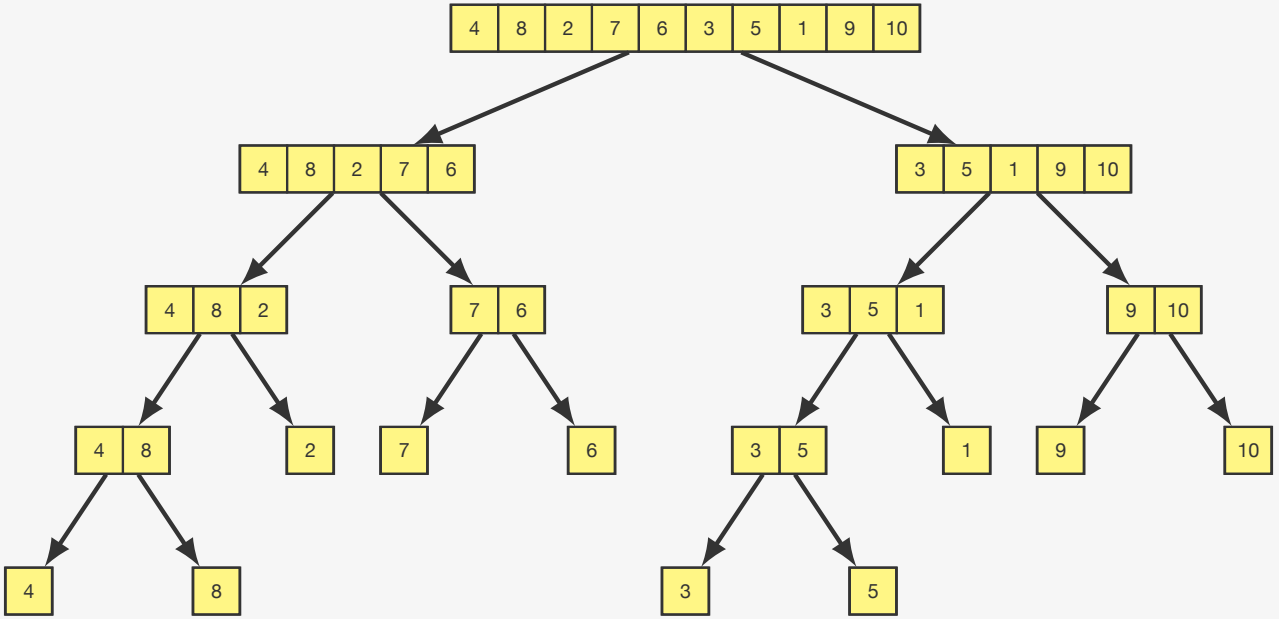
Tempo de execução para n qualquer



Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
  - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096

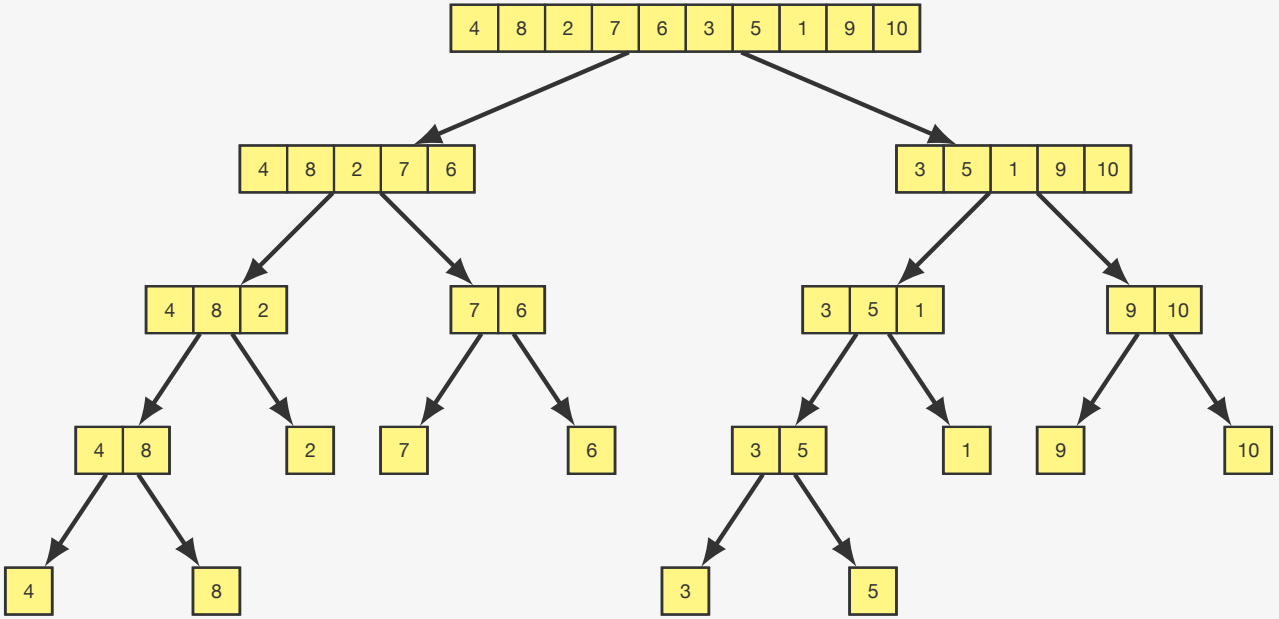
Tempo de execução para n qualquer



Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
  - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$

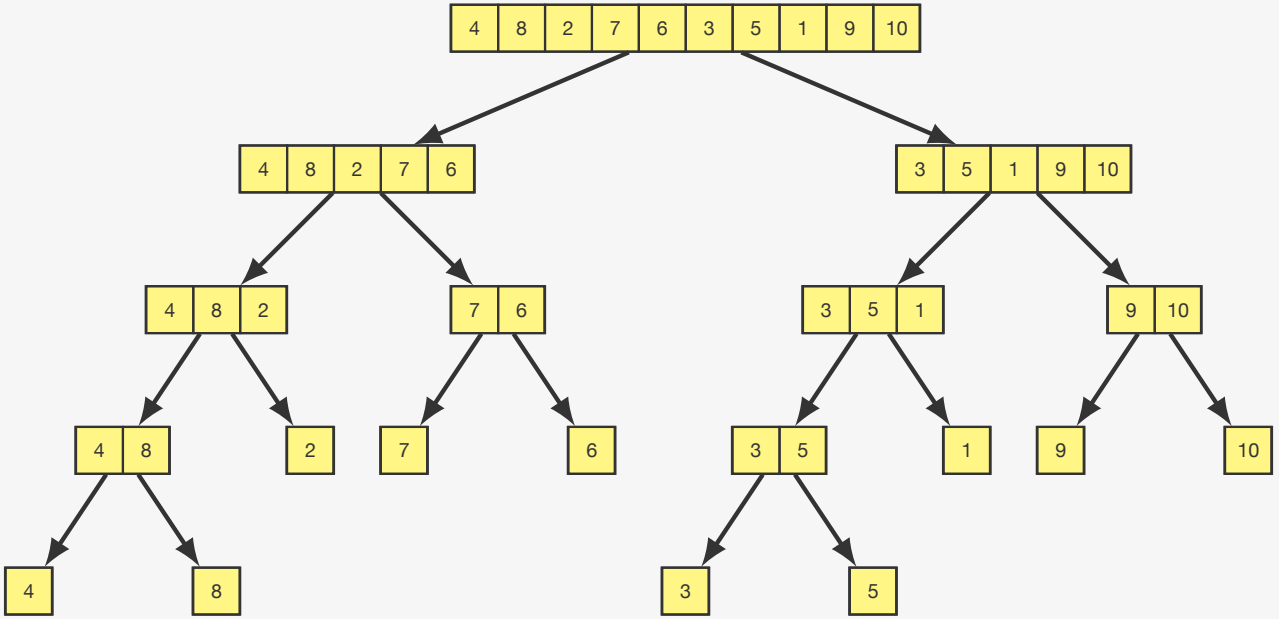
Tempo de execução para n qualquer



Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
  - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
  - Ou seja, $2^k < 2n$

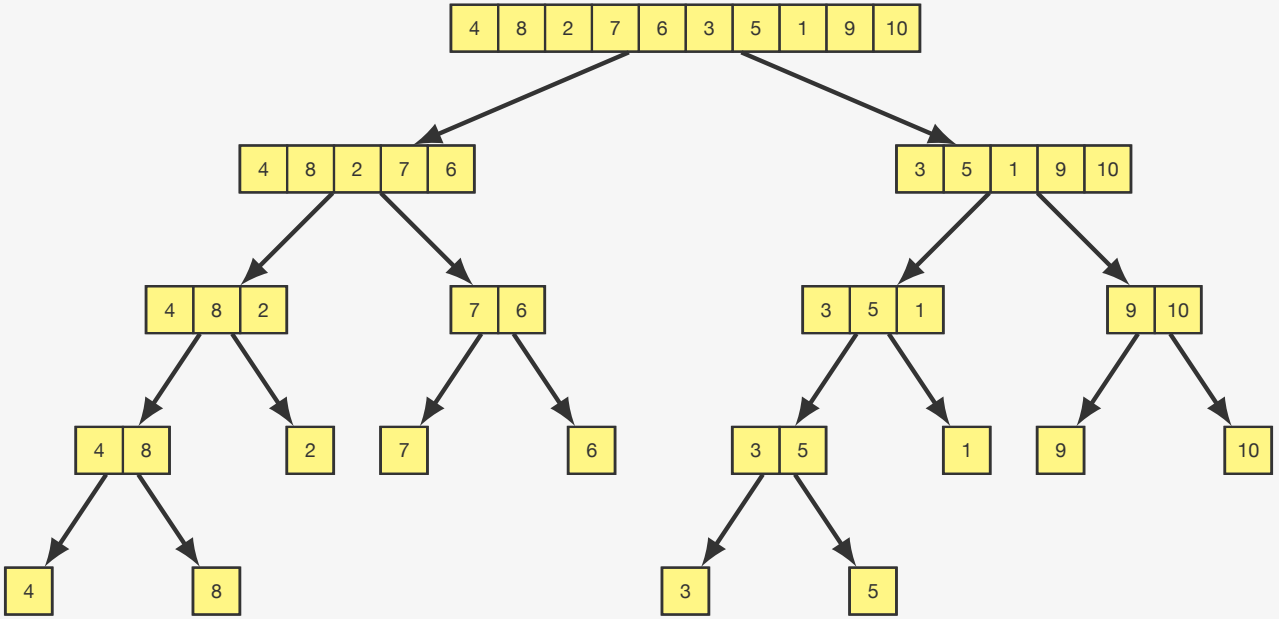
Tempo de execução para n qualquer



Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
  - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
  - Ou seja, $2^k < 2n$
- O tempo de execução para n é menor do que

Tempo de execução para n qualquer

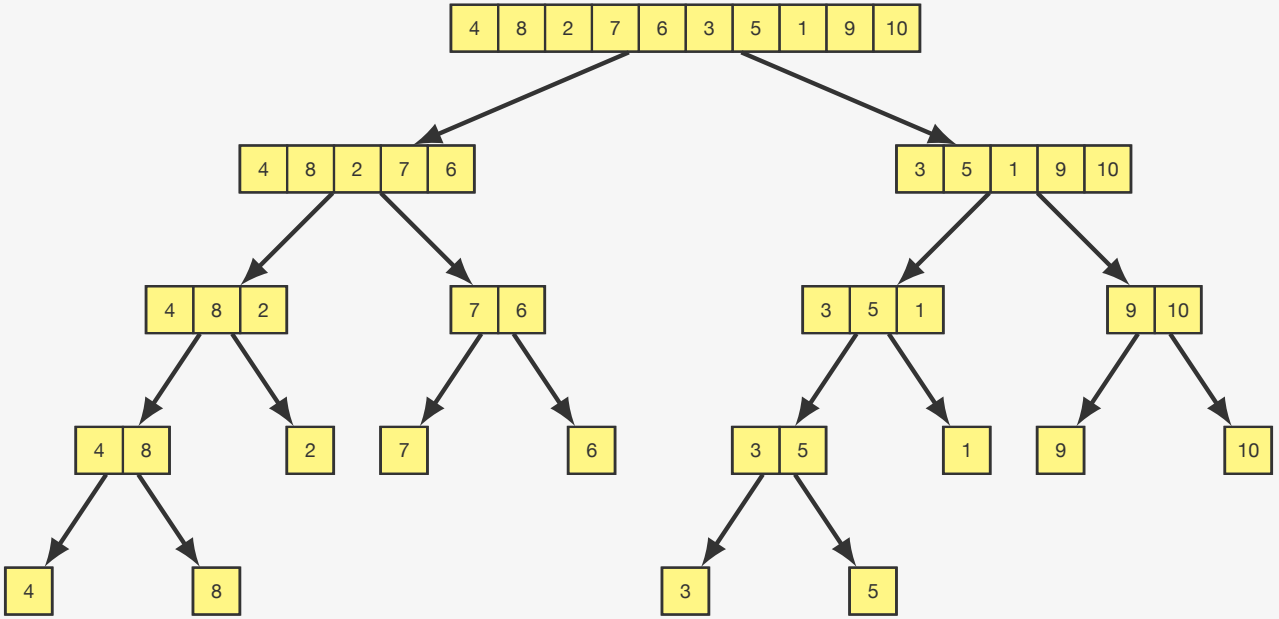


Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
  - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
  - Ou seja, $2^k < 2n$
- O tempo de execução para n é menor do que

$c\,2^k \lg 2^k$

Tempo de execução para n qualquer

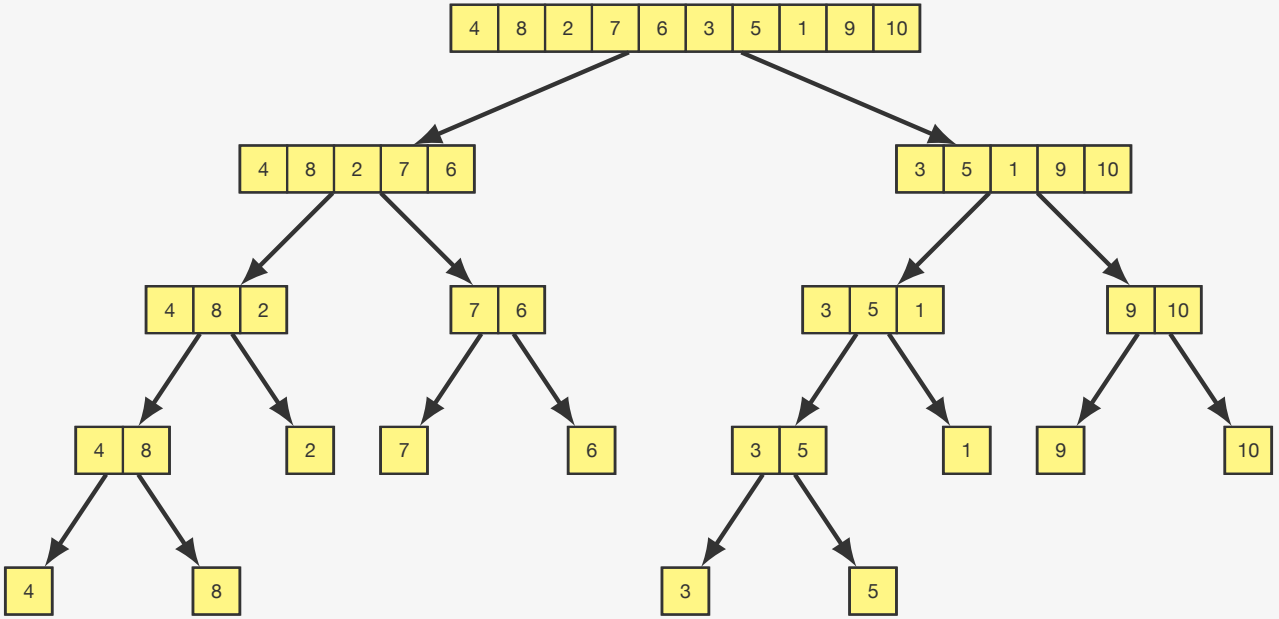


Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
  - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
  - Ou seja, $2^k < 2n$
- O tempo de execução para n é menor do que

$c\,2^k \lg 2^k$

Tempo de execução para n qualquer

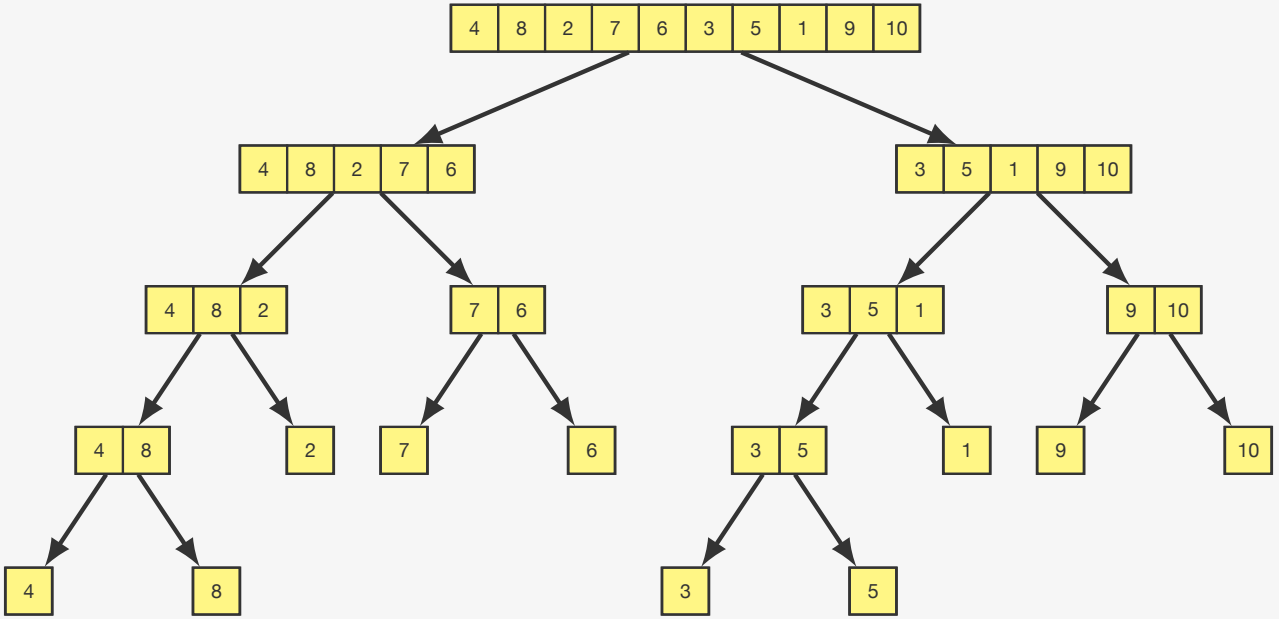


Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
  - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
  - Ou seja, $2^k < 2n$
- O tempo de execução para n é menor do que

$$c\,2^k \lg 2^k \leq 2cn \lg(2n)$$

Tempo de execução para n qualquer

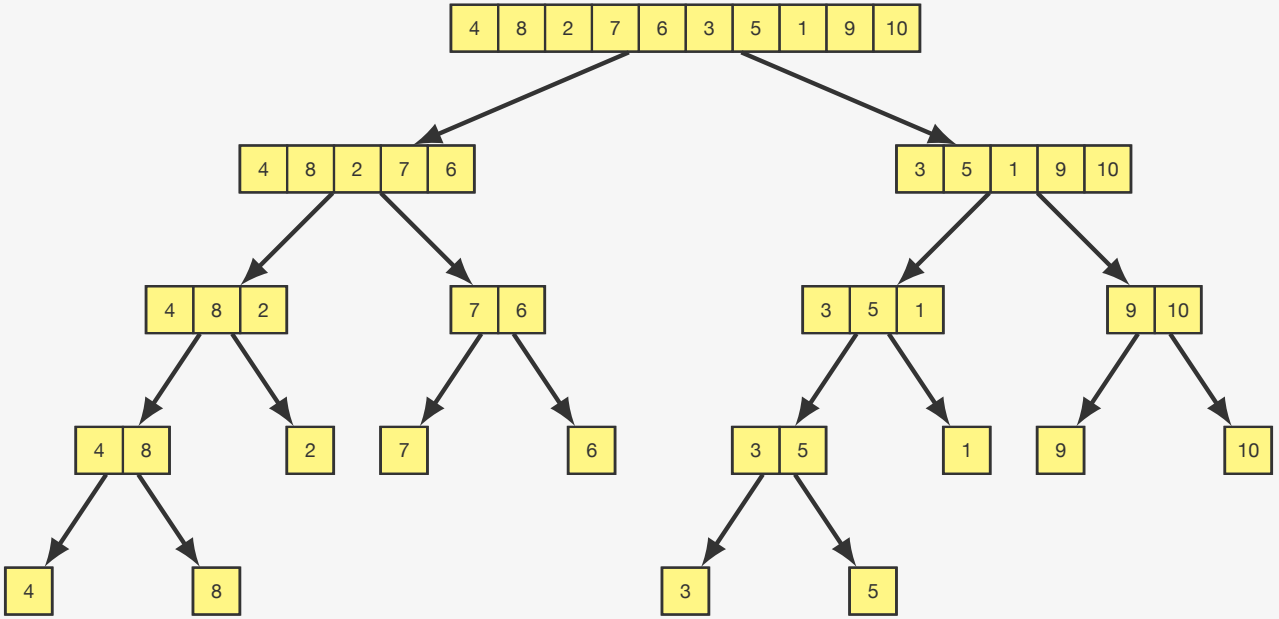


Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
  - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
  - Ou seja, $2^k < 2n$
- O tempo de execução para n é menor do que

$$c\,2^k \lg 2^k \leq 2cn \lg(2n) = 2cn(\lg 2 + \lg n)$$

Tempo de execução para n qualquer

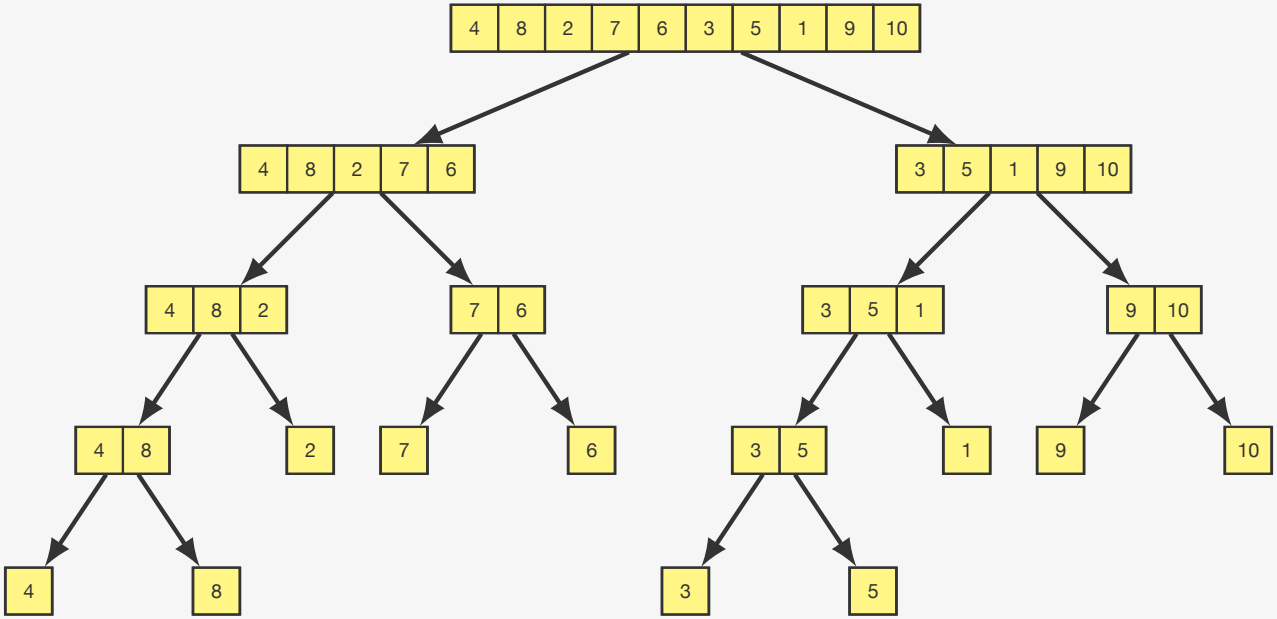


Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
  - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
  - Ou seja, $2^k < 2n$
- O tempo de execução para n é menor do que

$$c\,2^k \lg 2^k \leq 2cn \lg(2n) = 2cn(\lg 2 + \lg n) = 2cn + 2cn \lg n$$

Tempo de execução para n qualquer

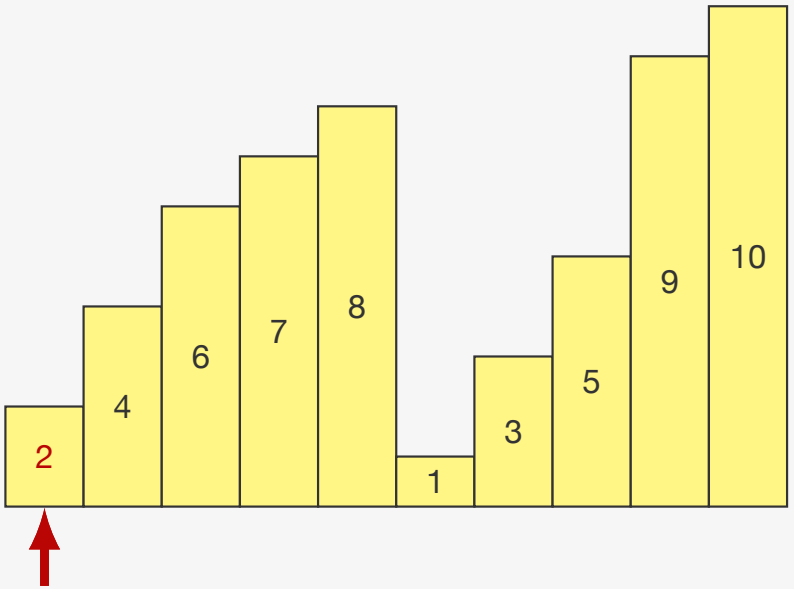


Qual o tempo de execução para n que não é potência de 2?

- Seja 2^k a próxima potência de 2 depois de n
  - Ex: Se $n = 3000$, a próxima potência é 4096
- Temos que $2^{k-1} < n < 2^k$
  - Ou seja, $2^k < 2n$
- O tempo de execução para n é menor do que

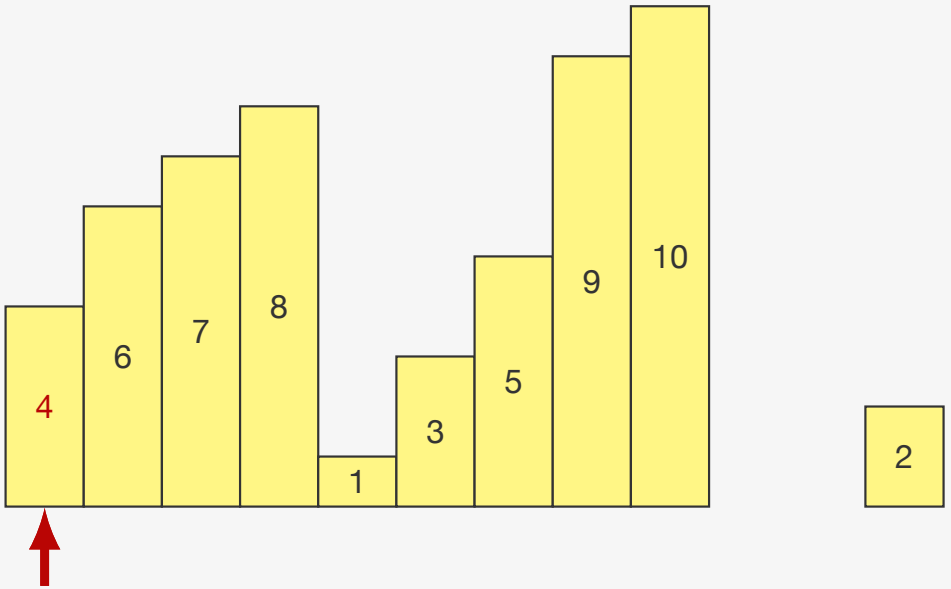
$$c\,2^k \lg 2^k \leq 2cn \lg(2n) = 2cn(\lg 2 + \lg n) = 2cn + 2cn \lg n = \mathrm{O}(n \lg n)$$

Otimizando a intercalação



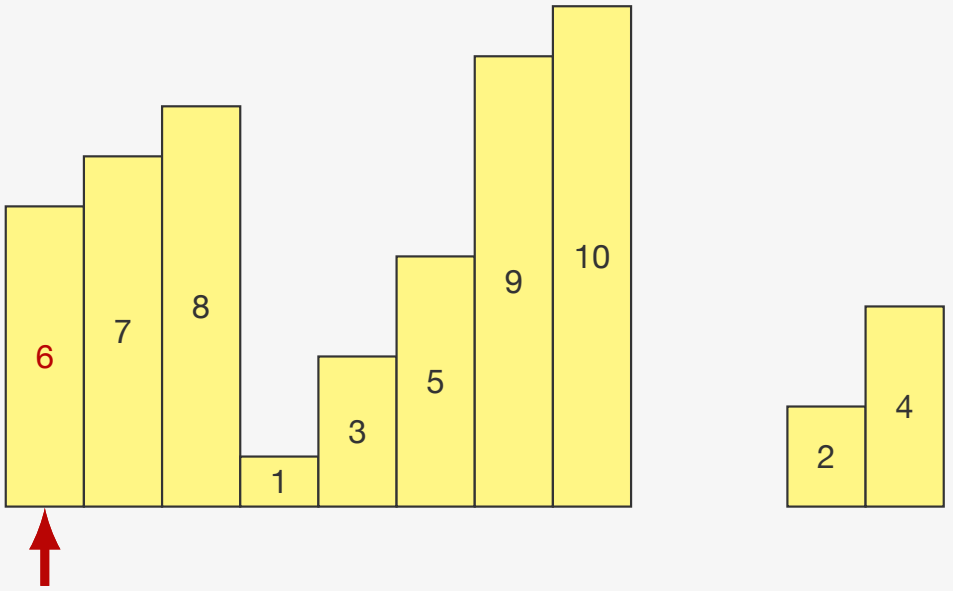
- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar

Otimizando a intercalação



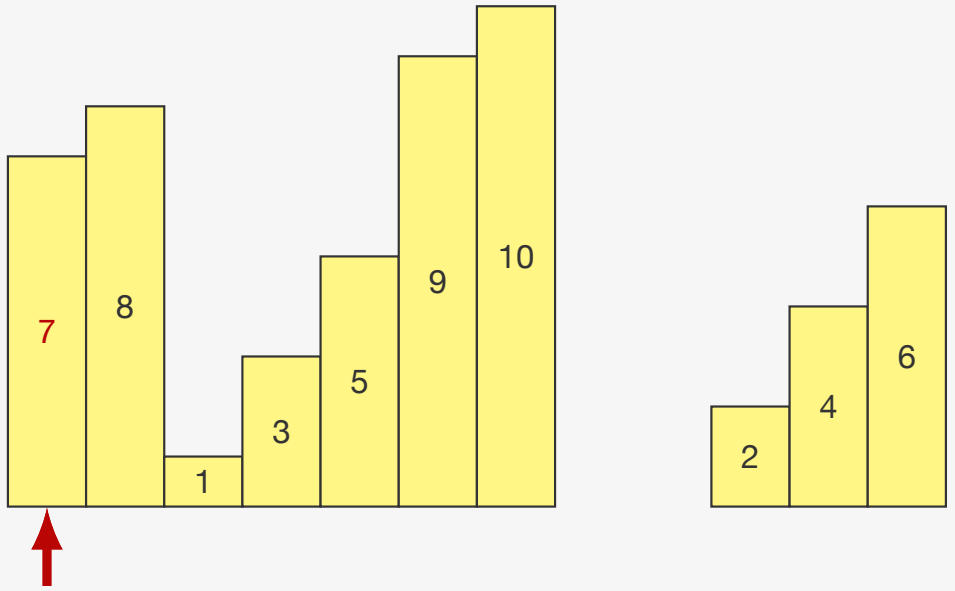
- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar

Otimizando a intercalação



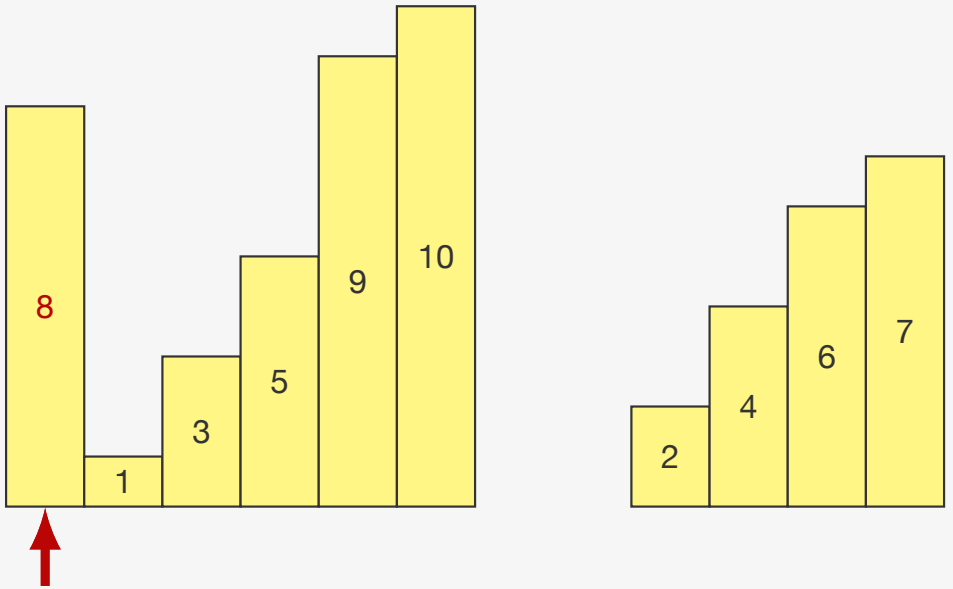
- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar

Otimizando a intercalação



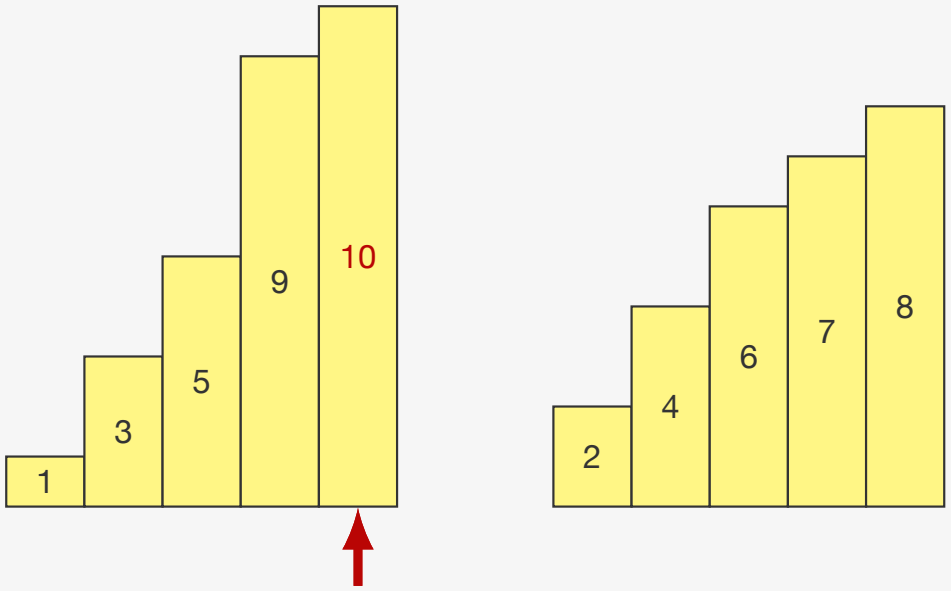
- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar

Otimizando a intercalação



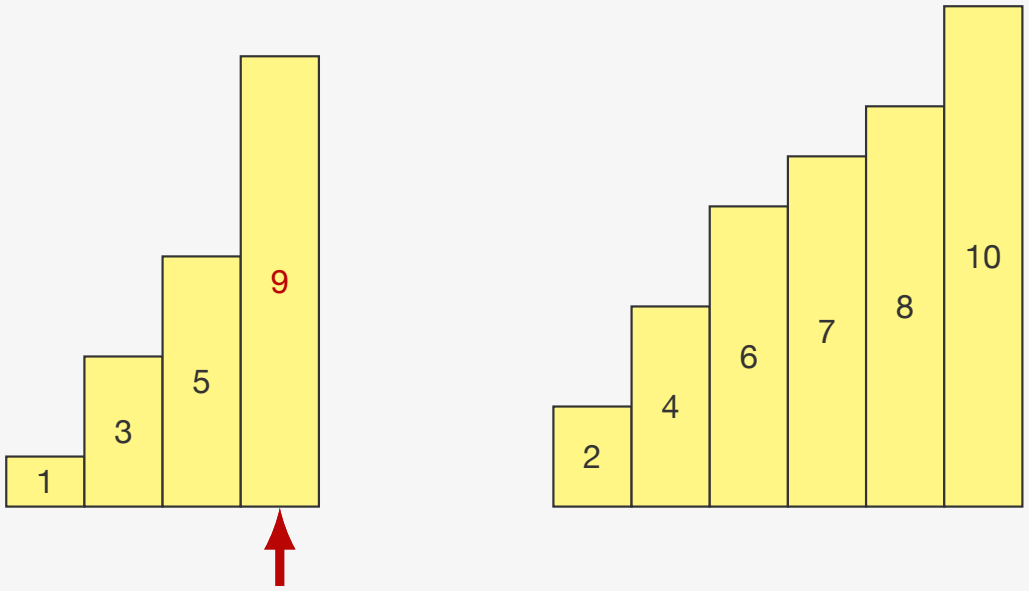
- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar

Otimizando a intercalação



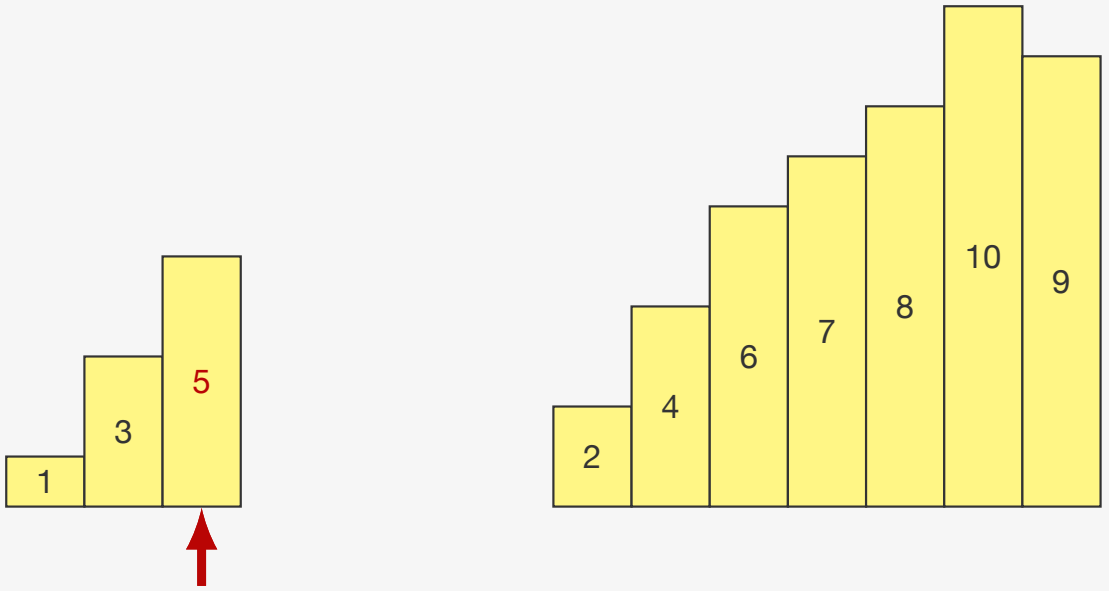
- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar

Otimizando a intercalação



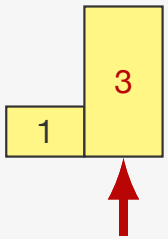
- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar

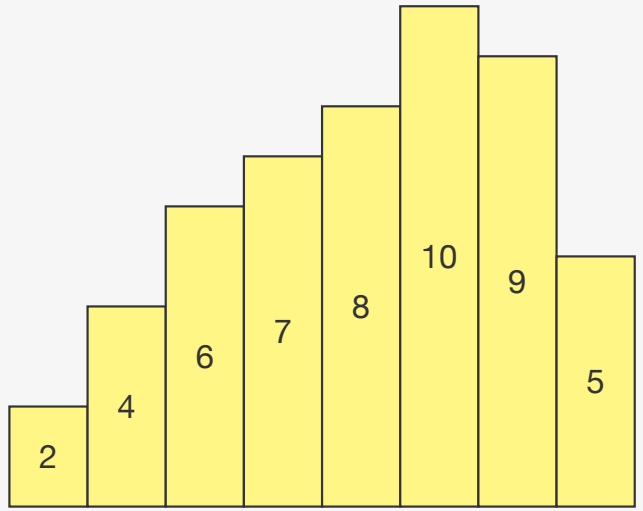
Otimizando a intercalação



- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar

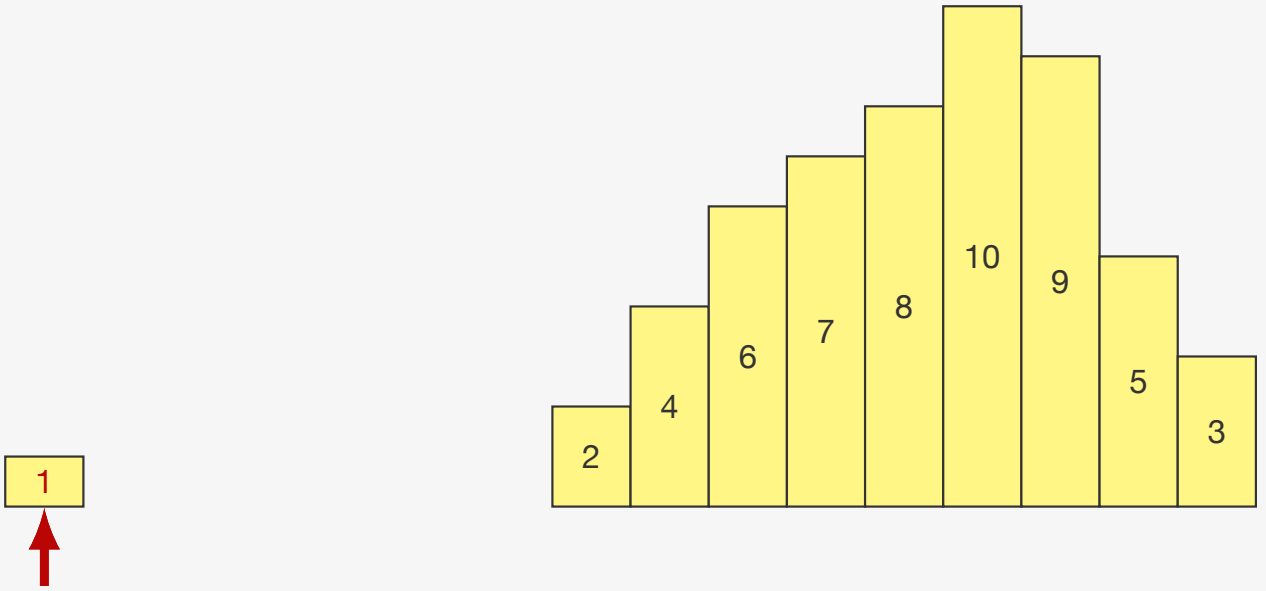
Otimizando a intercalação





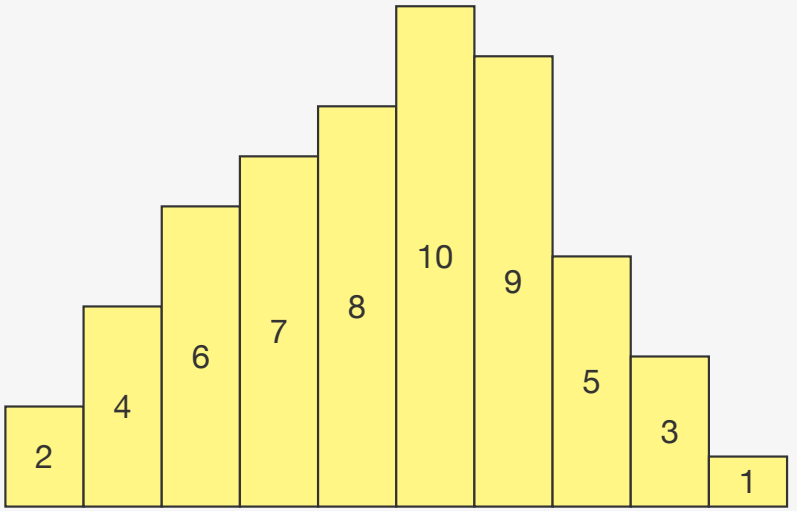
- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar

Otimizando a intercalação



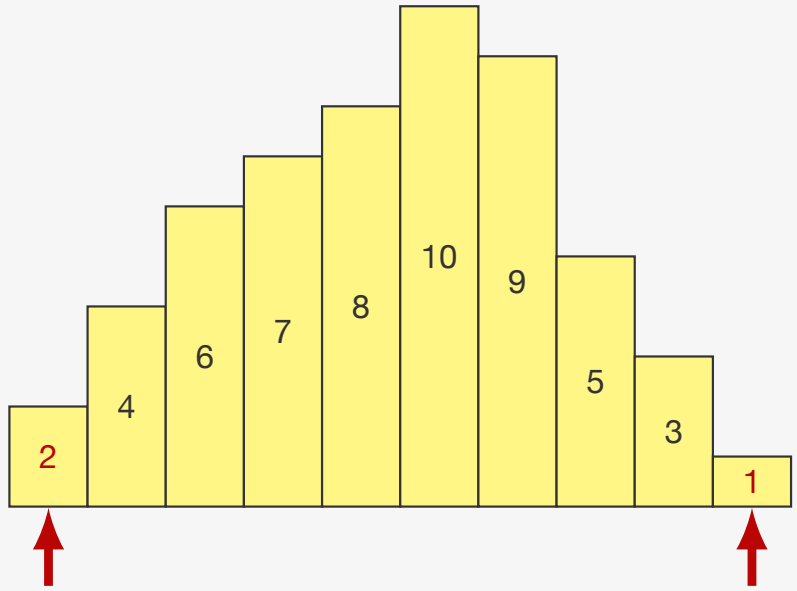
- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar

Otimizando a intercalação



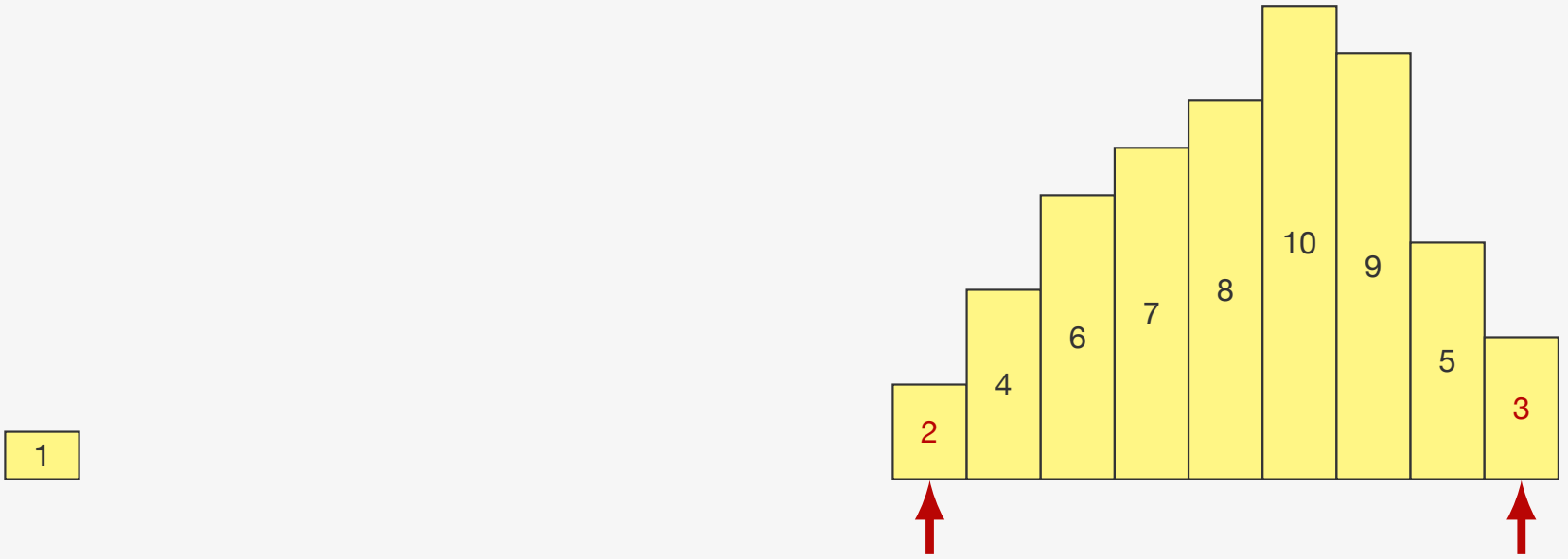
- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar

Otimizando a intercalação



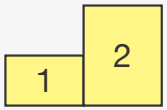
- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar
- Basta ir comparando
  - da esquerda para a direita
  - e da direita para a esquerda

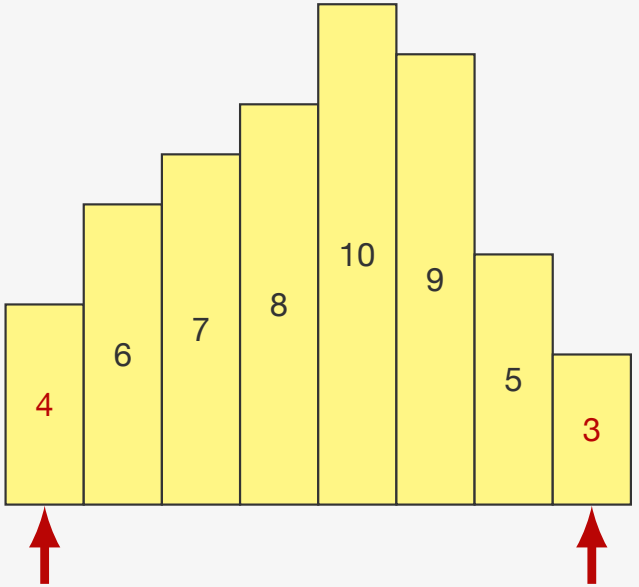
Otimizando a intercalação



- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar
- Basta ir comparando
  - da esquerda para a direita
  - e da direita para a esquerda

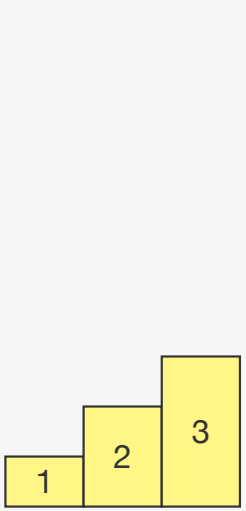
Otimizando a intercalação

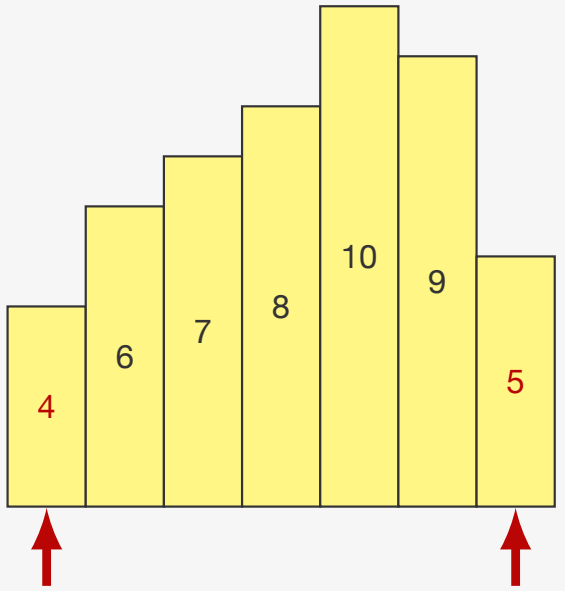




- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar
- Basta ir comparando
  - da esquerda para a direita
  - e da direita para a esquerda

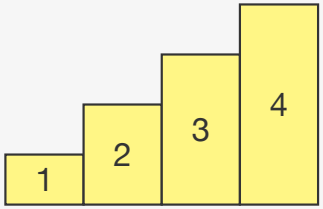
Otimizando a intercalação

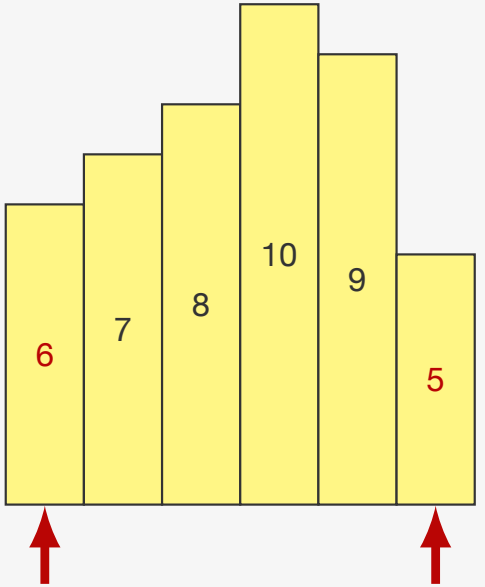




- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar
- Basta ir comparando
  - da esquerda para a direita
  - e da direita para a esquerda

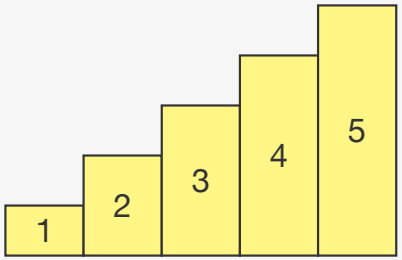
Otimizando a intercalação

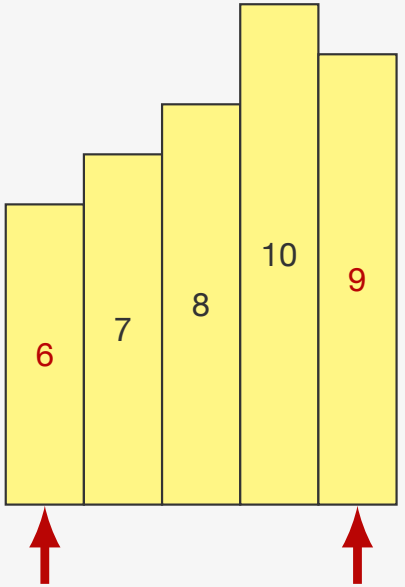




- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar
- Basta ir comparando
  - da esquerda para a direita
  - e da direita para a esquerda

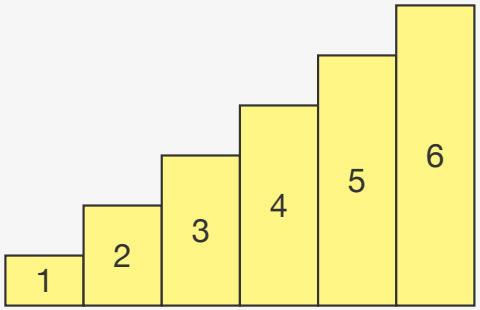
Otimizando a intercalação

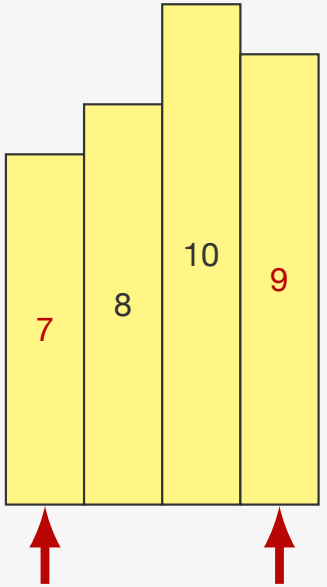




- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar
- Basta ir comparando
  - da esquerda para a direita
  - e da direita para a esquerda

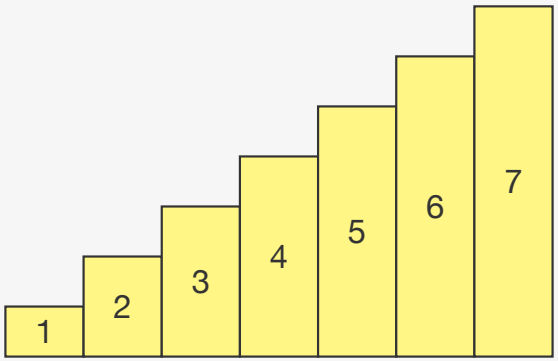
Otimizando a intercalação

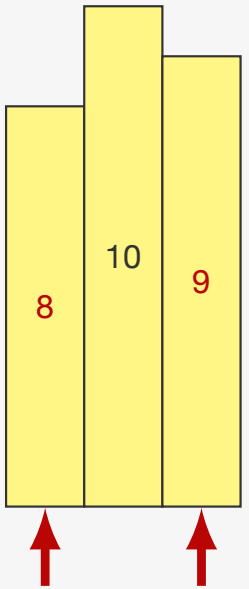




- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar
- Basta ir comparando
  - da esquerda para a direita
  - e da direita para a esquerda

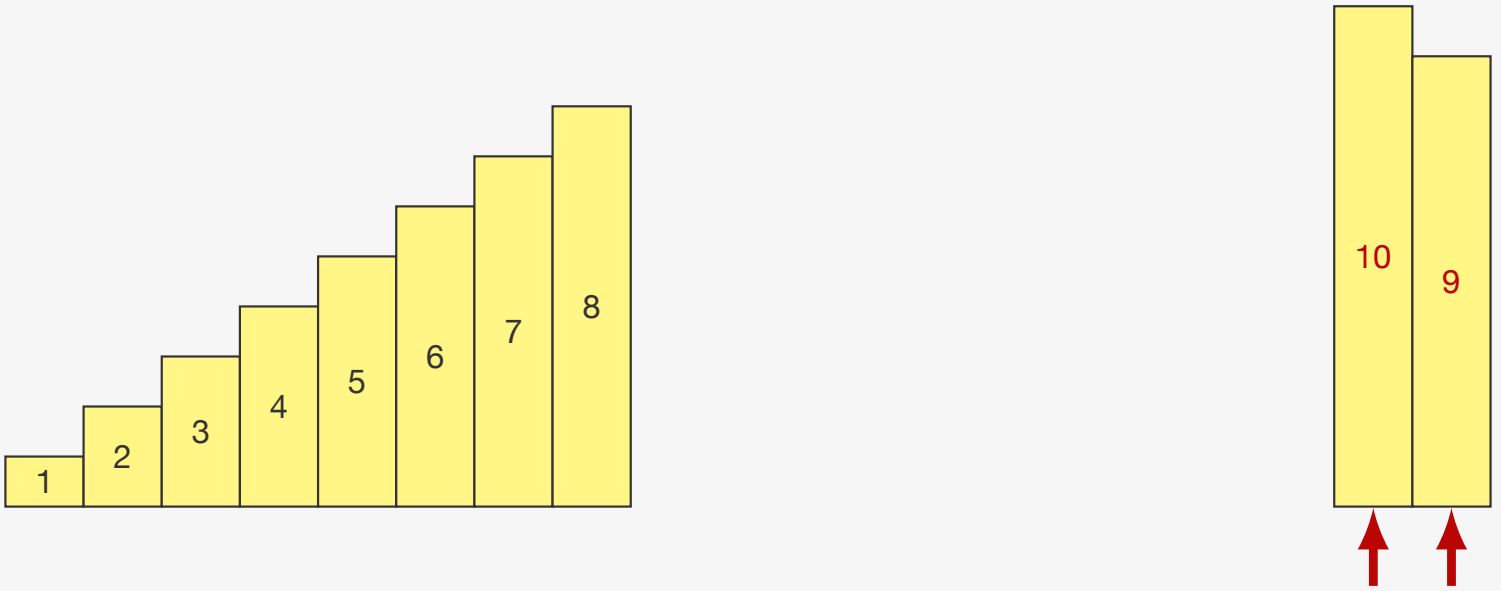
Otimizando a intercalação





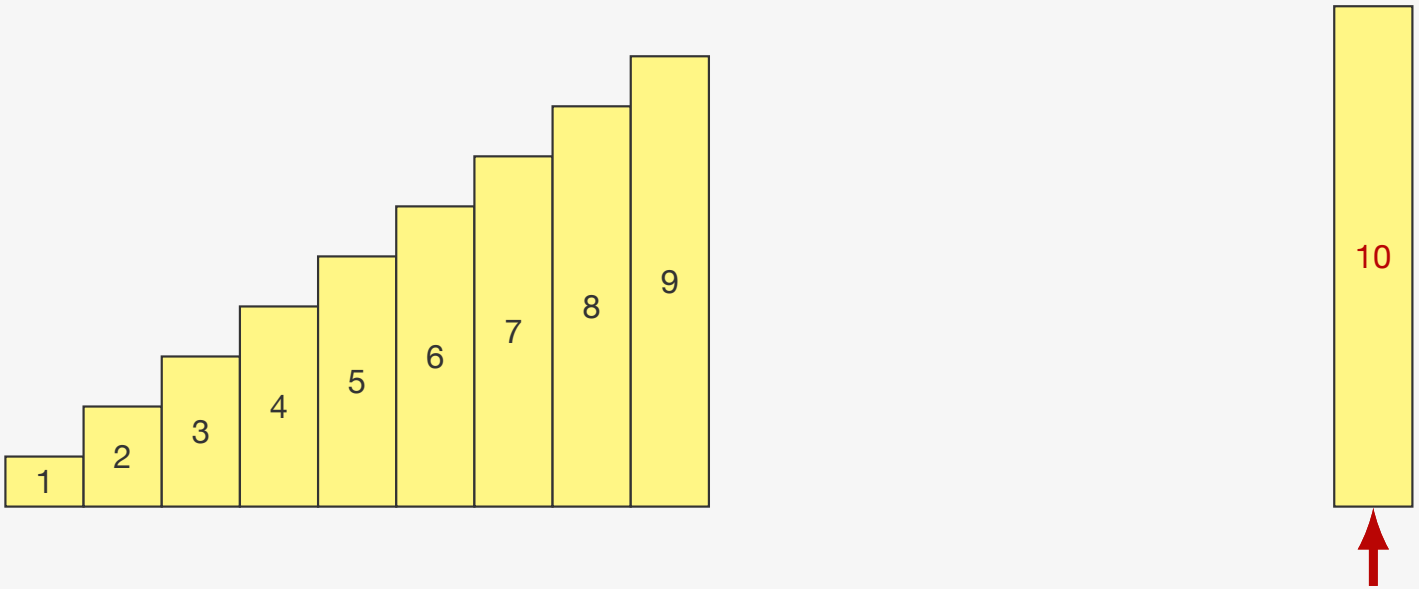
- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar
- Basta ir comparando
  - da esquerda para a direita
  - e da direita para a esquerda

Otimizando a intercalação



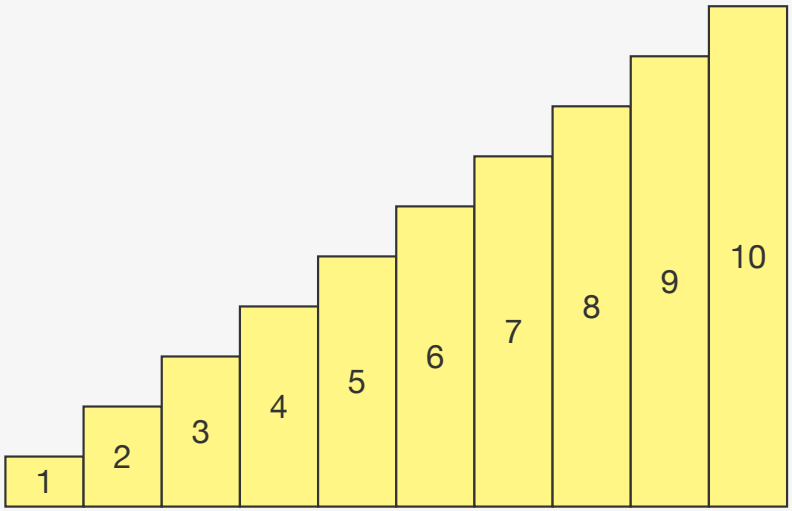
- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar
- Basta ir comparando
  - da esquerda para a direita
  - e da direita para a esquerda

Otimizando a intercalação



- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar
- Basta ir comparando
  - da esquerda para a direita
  - e da direita para a esquerda

Otimizando a intercalação



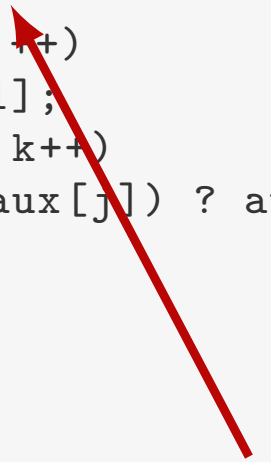
- Copiamos a primeira metade do vetor para o vetor auxiliar
- Copiamos a segunda metade invertida no vetor auxiliar
- Basta ir comparando
  - da esquerda para a direita
  - e da direita para a esquerda

Otimizando a intercalação

```
 1 void merge_v2(int *v, int l, int m, int r) {
 2   int i, j, k;
 3   int aux[MAX];
 4   for (i = m+1; i > l; i--)
 5     aux[i-1] = v[i-1];
 6   for (j = m; j < r; j++)
 7     aux[r+m-j] = v[j+1];
 8   for (k = l; k <= r; k++)
 9     v[k] = (aux[i] < aux[j]) ? aux[i++] :  aux[j--];
10 }
```

Otimizando a intercalação

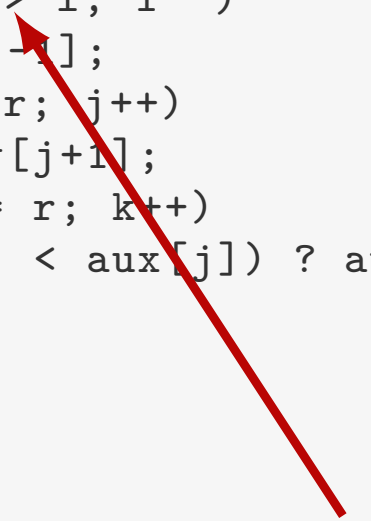
```
 1 void merge_v2(int *v, int l, int m, int r) {
 2   int i, j, k;
 3   int aux[MAX];
 4   for (i = m+1; i > l; i--)
 5     aux[i-1] = v[i-1];
 6   for (j = m; j < r; j++)
 7     aux[r+m-j] = v[j+1];
 8   for (k = l; k <= r; k++)
 9     v[k] = (aux[i] < aux[j]) ? aux[i++] :  aux[j--];
10 }
```



copia a primeira metade para `aux`

Otimizando a intercalação

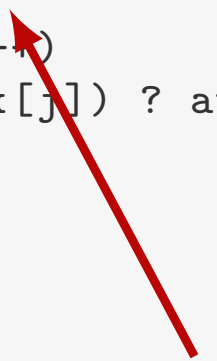
```
 1 void merge_v2(int *v, int l, int m, int r) {
 2   int i, j, k;
 3   int aux[MAX];
 4   for (i = m+1; i > l; i--)
 5     aux[i-1] = v[i-1];
 6   for (j = m; j < r; j++)
 7     aux[r+m-j] = v[j+1];
 8   for (k = l; k <= r; k++)
 9     v[k] = (aux[i] < aux[j]) ? aux[i++] :  aux[j--];
10 }
```



quando o `for` acaba, `i == l`

Otimizando a intercalação

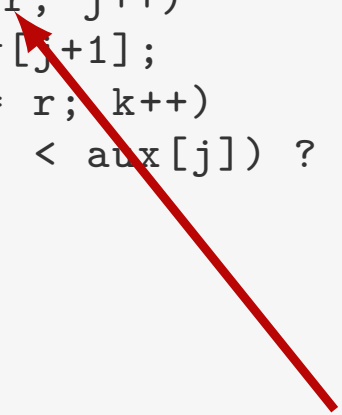
```
 1 void merge_v2(int *v, int l, int m, int r) {
 2   int i, j, k;
 3   int aux[MAX];
 4   for (i = m+1; i > l; i--)
 5     aux[i-1] = v[i-1];
 6   for (j = m; j < r; j++)
 7     aux[r+m-j] = v[j+1];
 8   for (k = l; k <= r; k++)
 9     v[k] = (aux[i] < aux[j]) ? aux[i++] :  aux[j--];
10 }
```



copia a segunda metade invertido para `aux`

Otimizando a intercalação

```
 1 void merge_v2(int *v, int l, int m, int r) {
 2   int i, j, k;
 3   int aux[MAX];
 4   for (i = m+1; i > l; i--)
 5     aux[i-1] = v[i-1];
 6   for (j = m; j < r; j++)
 7     aux[r+m-j] = v[j+1];
 8   for (k = l; k <= r; k++)
 9     v[k] = (aux[i] < aux[j]) ? aux[i++] :  aux[j--];
10 }
```



quando o `for` acaba, `j == r`

Otimizando a intercalação

```
 1 void merge_v2(int *v, int l, int m, int r) {
 2   int i, j, k;
 3   int aux[MAX];
 4   for (i = m+1; i > l; i--)
 5     aux[i-1] = v[i-1];
 6   for (j = m; j < r; j++)
 7     aux[r+m-j] = v[j+1];
 8   for (k = l; k <= r; k++)
 9     v[k] = (aux[i] < aux[j]) ? aux[i++] :  aux[j--];
10 }
```

se `aux[i] < aux[j]`

Otimizando a intercalação

```
 1 void merge_v2(int *v, int l, int m, int r) {
 2   int i, j, k;
 3   int aux[MAX];
 4   for (i = m+1; i > l; i--)
 5     aux[i-1] = v[i-1];
 6   for (j = m; j < r; j++)
 7     aux[r+m-j] = v[j+1];
 8   for (k = l; k <= r; k++)
 9     v[k] = (aux[i] < aux[j]) ? aux[i++] :  aux[j--];
10 }
```

copiamos `aux[i]` para `v[k]`

Otimizando a intercalação

```
 1 void merge_v2(int *v, int l, int m, int r) {
 2   int i, j, k;
 3   int aux[MAX];
 4   for (i = m+1; i > l; i--)
 5     aux[i-1] = v[i-1];
 6   for (j = m; j < r; j++)
 7     aux[r+m-j] = v[j+1];
 8   for (k = l; k <= r; k++)
 9     v[k] = (aux[i] < aux[j]) ? aux[i++] :  aux[j--];
10 }
```

aumentamos `i`

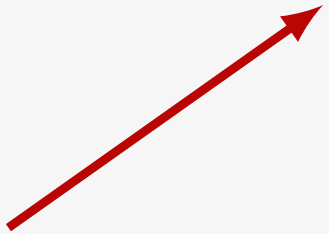
Otimizando a intercalação

```
 1 void merge_v2(int *v, int l, int m, int r) {
 2   int i, j, k;
 3   int aux[MAX];
 4   for (i = m+1; i > l; i--)
 5     aux[i-1] = v[i-1];
 6   for (j = m; j < r; j++)
 7     aux[r+m-j] = v[j+1];
 8   for (k = l; k <= r; k++)
 9     v[k] = (aux[i] < aux[j]) ? aux[i++] :  aux[j--];
10 }
```

senão

Otimizando a intercalação

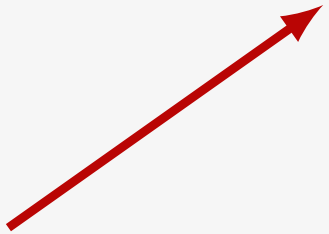
```
 1 void merge_v2(int *v, int l, int m, int r) {
 2   int i, j, k;
 3   int aux[MAX];
 4   for (i = m+1; i > l; i--)
 5     aux[i-1] = v[i-1];
 6   for (j = m; j < r; j++)
 7     aux[r+m-j] = v[j+1];
 8   for (k = l; k <= r; k++)
 9     v[k] = (aux[i] < aux[j]) ? aux[i++] :  aux[j--];
10 }
```



copiamos `aux[j]` para `v[k]`

Otimizando a intercalação

```
 1 void merge_v2(int *v, int l, int m, int r) {
 2   int i, j, k;
 3   int aux[MAX];
 4   for (i = m+1; i > l; i--)
 5     aux[i-1] = v[i-1];
 6   for (j = m; j < r; j++)
 7     aux[r+m-j] = v[j+1];
 8   for (k = l; k <= r; k++)
 9     v[k] = (aux[i] < aux[j]) ? aux[i++] :  aux[j--];
10 }
```



diminuimos `j`

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

O MergeSort que vimos é de cima para baixo (*top-down*)

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

O MergeSort que vimos é de cima para baixo (*top-down*)

- Mas podemos fazer também de baixo para cima

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

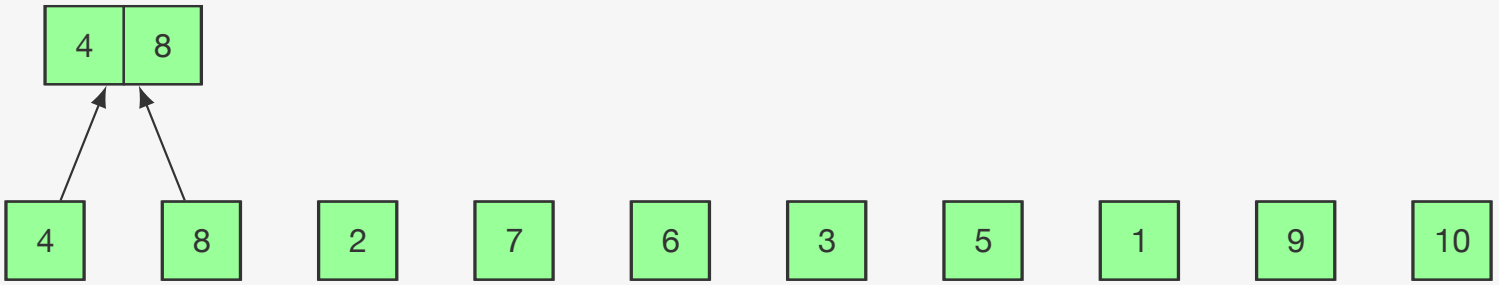
O MergeSort que vimos é de cima para baixo (*top-down*)

- Mas podemos fazer também de baixo para cima

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

O MergeSort que vimos é de cima para baixo (*top-down*)

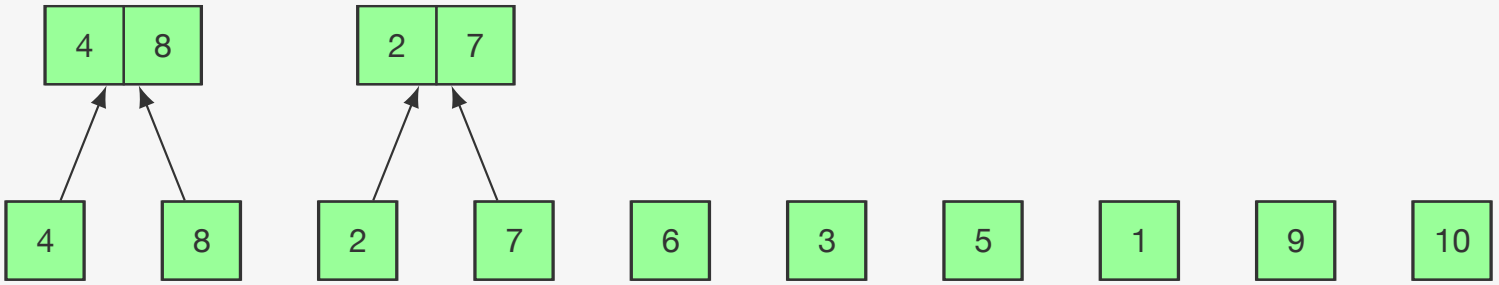
- Mas podemos fazer também de baixo para cima



MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

O MergeSort que vimos é de cima para baixo (*top-down*)

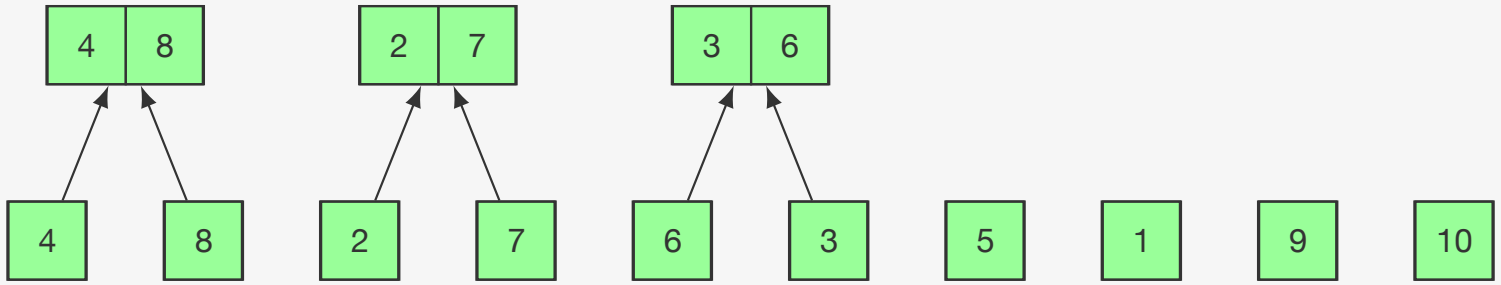
- Mas podemos fazer também de baixo para cima



MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

O MergeSort que vimos é de cima para baixo (*top-down*)

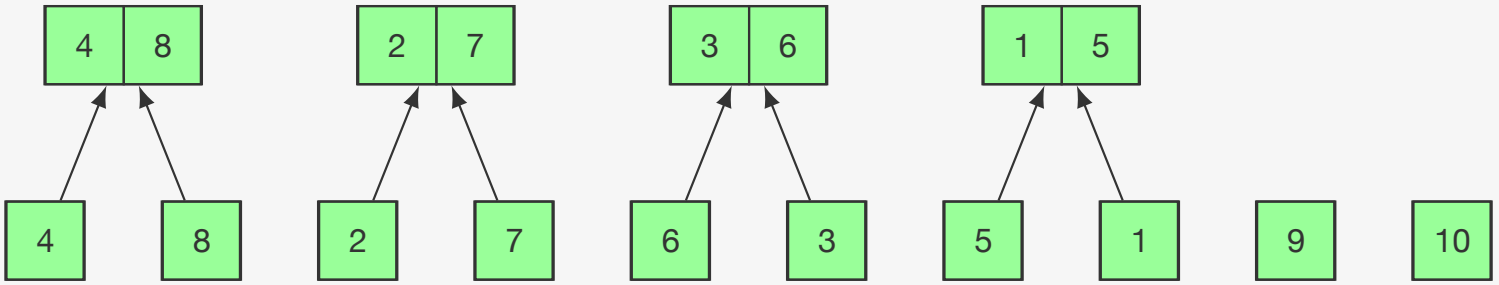
- Mas podemos fazer também de baixo para cima



MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

O MergeSort que vimos é de cima para baixo (*top-down*)

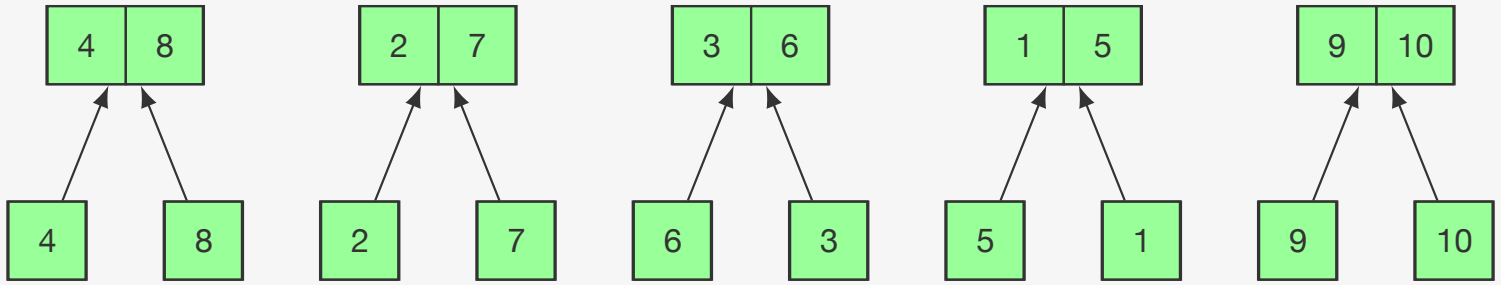
- Mas podemos fazer também de baixo para cima



MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

O MergeSort que vimos é de cima para baixo (*top-down*)

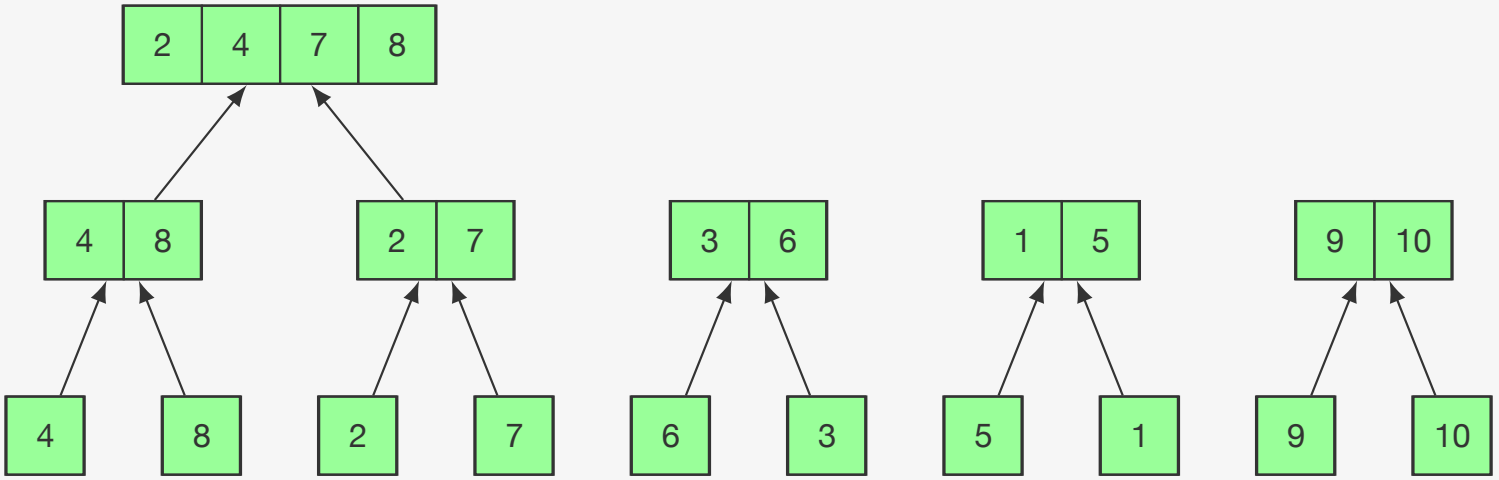
- Mas podemos fazer também de baixo para cima



MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

O MergeSort que vimos é de cima para baixo (*top-down*)

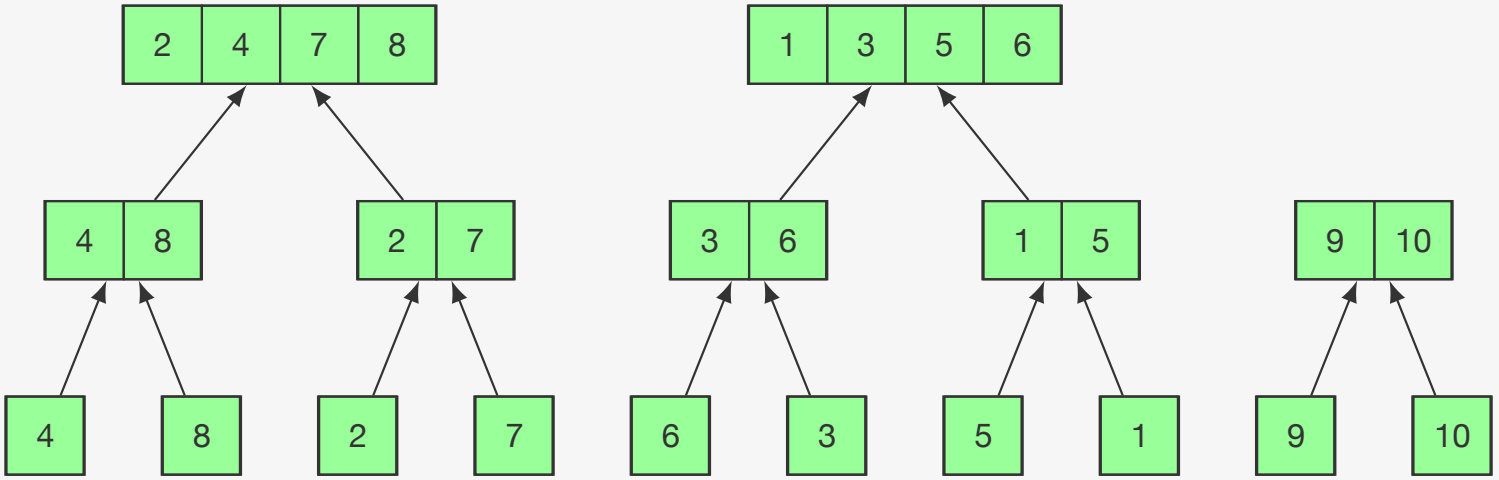
- Mas podemos fazer também de baixo para cima



MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

O MergeSort que vimos é de cima para baixo (*top-down*)

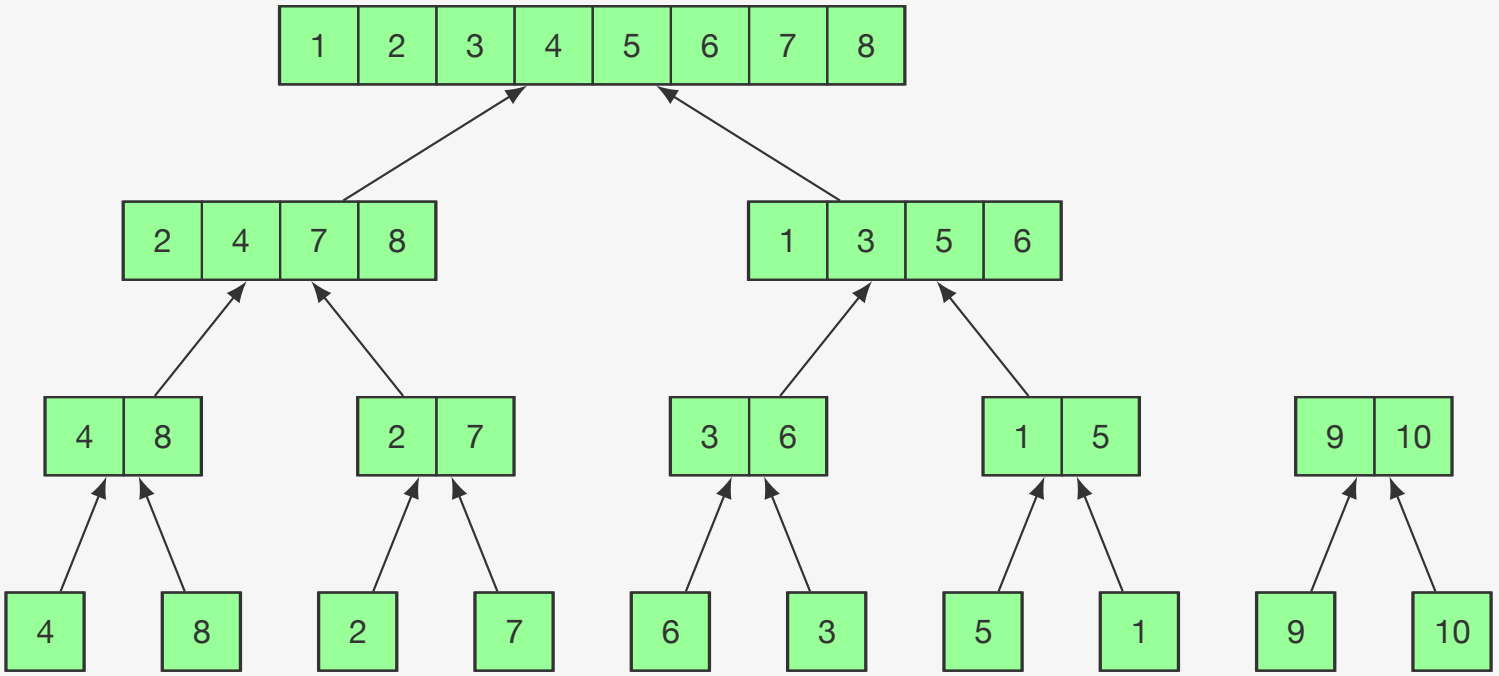
- Mas podemos fazer também de baixo para cima



MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

O MergeSort que vimos é de cima para baixo (*top-down*)

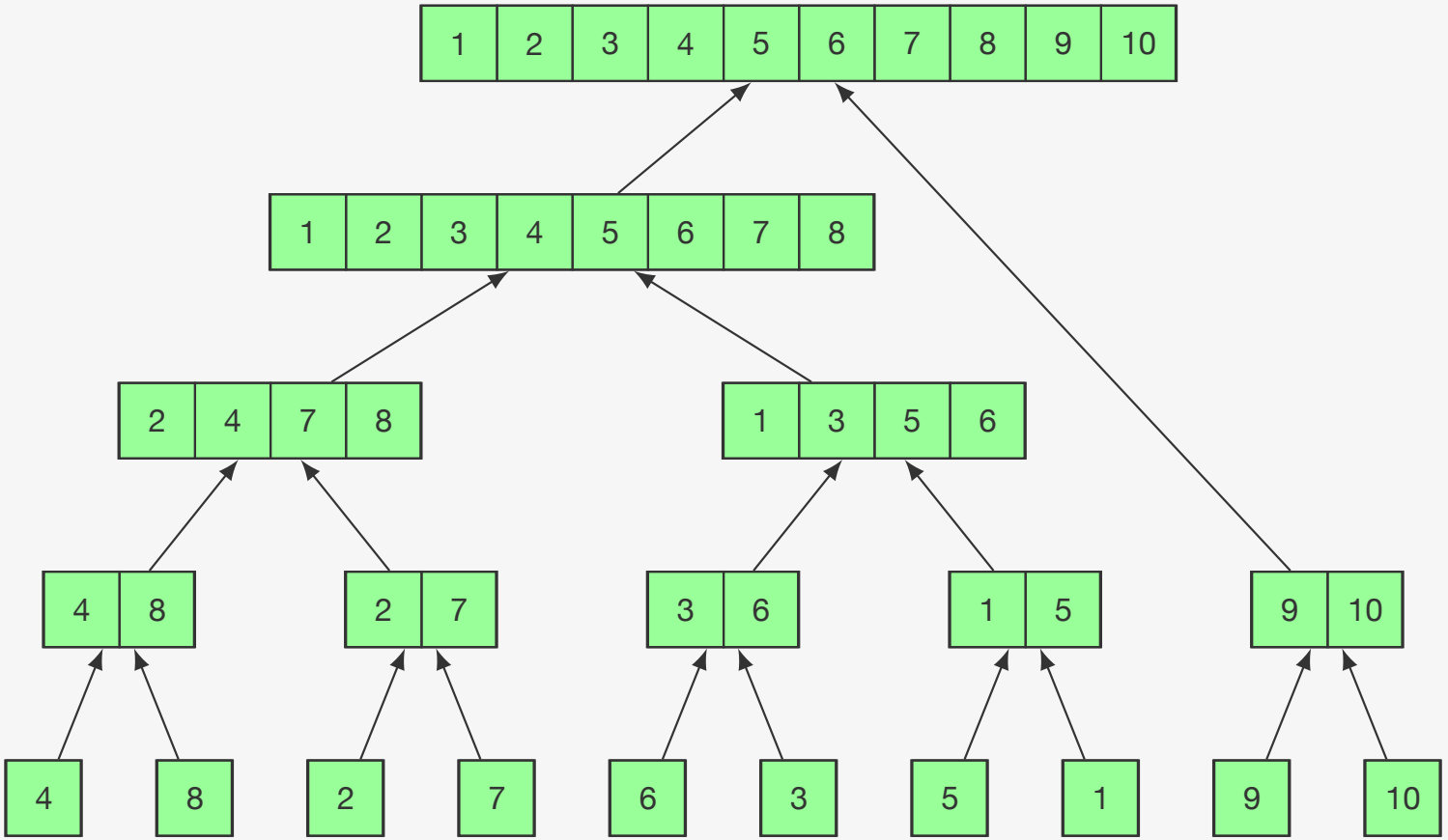
- Mas podemos fazer também de baixo para cima



MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

O MergeSort que vimos é de cima para baixo (*top-down*)

- Mas podemos fazer também de baixo para cima

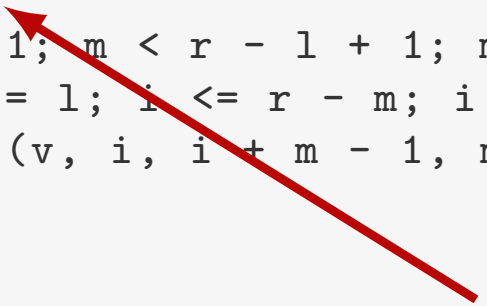


MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

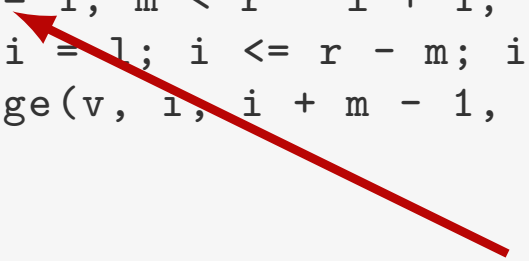
```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```



`m` é o tamanho dos vetores que faremos merge

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```



no começo `m = 1` (merge de dois vetores de tamanho `1`)

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

no passo seguinte, `m = 2`

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

e no seguinte, `m = 4`

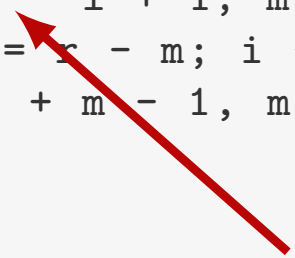
MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

e assim por diante

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

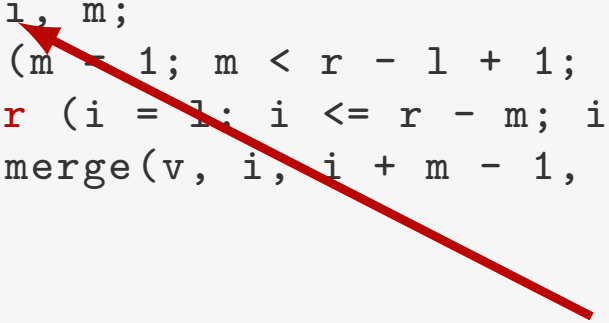
```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```



enquanto `m` for menor que o número de elementos

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

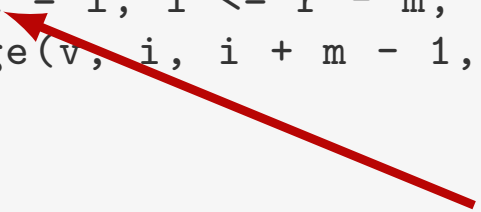
```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```



`i` indica a posição do primeiro vetor que faremos merge

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```



`i = l` no começo

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

`i = l + 2*m` no passo seguinte

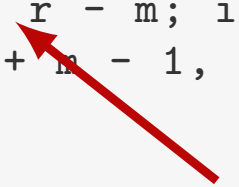
MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

e assim por diante

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```



enquanto ainda couber dois vetores, um tamanho `m` e outro com tamanho `m` ou menor

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

o primeiro vetor tem tamanho `m`

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

portanto, vai de `v[i]` a `v[i+m-1]`

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

o segundo vetor acaba ou em `i + 2*m - 1` ou em `r`

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

m	i	i+m-1	min(i+2*m-1, r)	intercalação

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

m	i	i+m-1	min(i+2*m-1, r)	intercalação
1	0	0	1	`v[0]` com `v[1]`

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

m	i	i+m-1	min(i+2*m-1, r)	intercalação
1	0	0	1	`v[0]` com `v[1]`
1	2	2	3	`v[2]` com `v[3]`

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

m	i	i+m-1	min(i+2*m-1, r)	intercalação
1	0	0	1	`v[0]` com `v[1]`
1	2	2	3	`v[2]` com `v[3]`
1	4	4	5	`v[4]` com `v[5]`

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

m	i	i+m-1	min(i+2*m-1, r)	intercalação
1	0	0	1	`v[0]` com `v[1]`
1	2	2	3	`v[2]` com `v[3]`
1	4	4	5	`v[4]` com `v[5]`
1	6	6	7	`v[6]` com `v[7]`

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

m	i	i+m-1	min(i+2*m-1, r)	intercalação
1	0	0	1	v[0] com v[1]
1	2	2	3	v[2] com v[3]
1	4	4	5	v[4] com v[5]
1	6	6	7	v[6] com v[7]
1	8	8	9	v[8] com v[9]

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

m	i	i+m-1	min(i+2*m-1, r)	intercalação
1	0	0	1	`v[0]` com `v[1]`
1	2	2	3	`v[2]` com `v[3]`
1	4	4	5	`v[4]` com `v[5]`
1	6	6	7	`v[6]` com `v[7]`
1	8	8	9	`v[8]` com `v[9]`
2	0	1	3	`v[0]`, `v[1]` com `v[2]`, `v[3]`

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

m	i	i+m-1	min(i+2*m-1, r)	intercalação
1	0	0	1	`v[0]` com `v[1]`
1	2	2	3	`v[2]` com `v[3]`
1	4	4	5	`v[4]` com `v[5]`
1	6	6	7	`v[6]` com `v[7]`
1	8	8	9	`v[8]` com `v[9]`
2	0	1	3	`v[0]`, `v[1]` com `v[2]`, `v[3]`
2	4	5	7	`v[4]`, `v[5]` com `v[6]`, `v[7]`

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

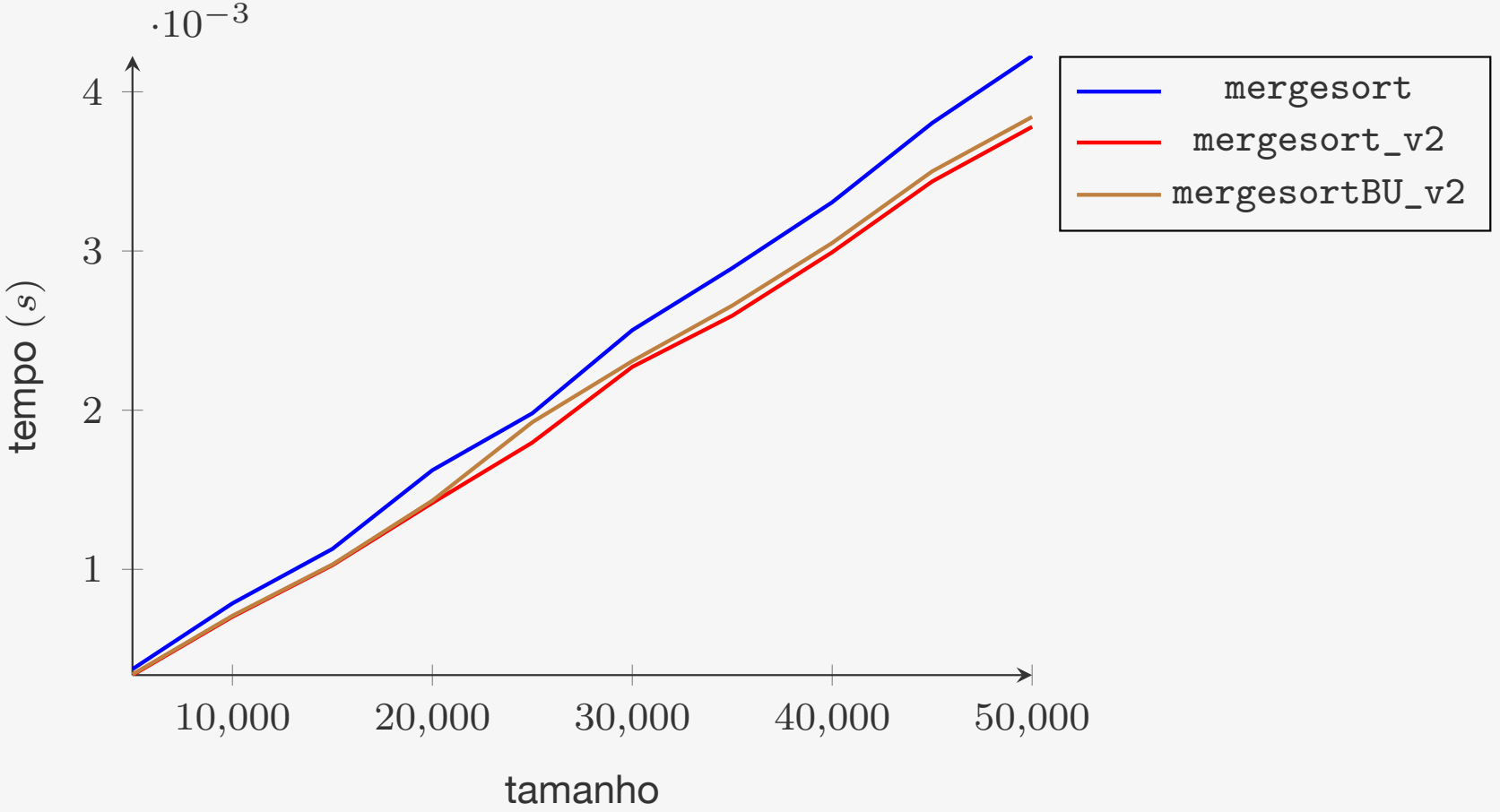
m	i	i+m-1	min(i+2*m-1, r)	intercalação
1	0	0	1	v[0] com v[1]
1	2	2	3	v[2] com v[3]
1	4	4	5	v[4] com v[5]
1	6	6	7	v[6] com v[7]
1	8	8	9	v[8] com v[9]
2	0	1	3	v[0], v[1] com v[2], v[3]
2	4	5	7	v[4], v[5] com v[6], v[7]
4	0	3	7	v[0], ..., v[3] com v[4], ... v[7]

MergeSort de baixo para cima (*bottom-up*)

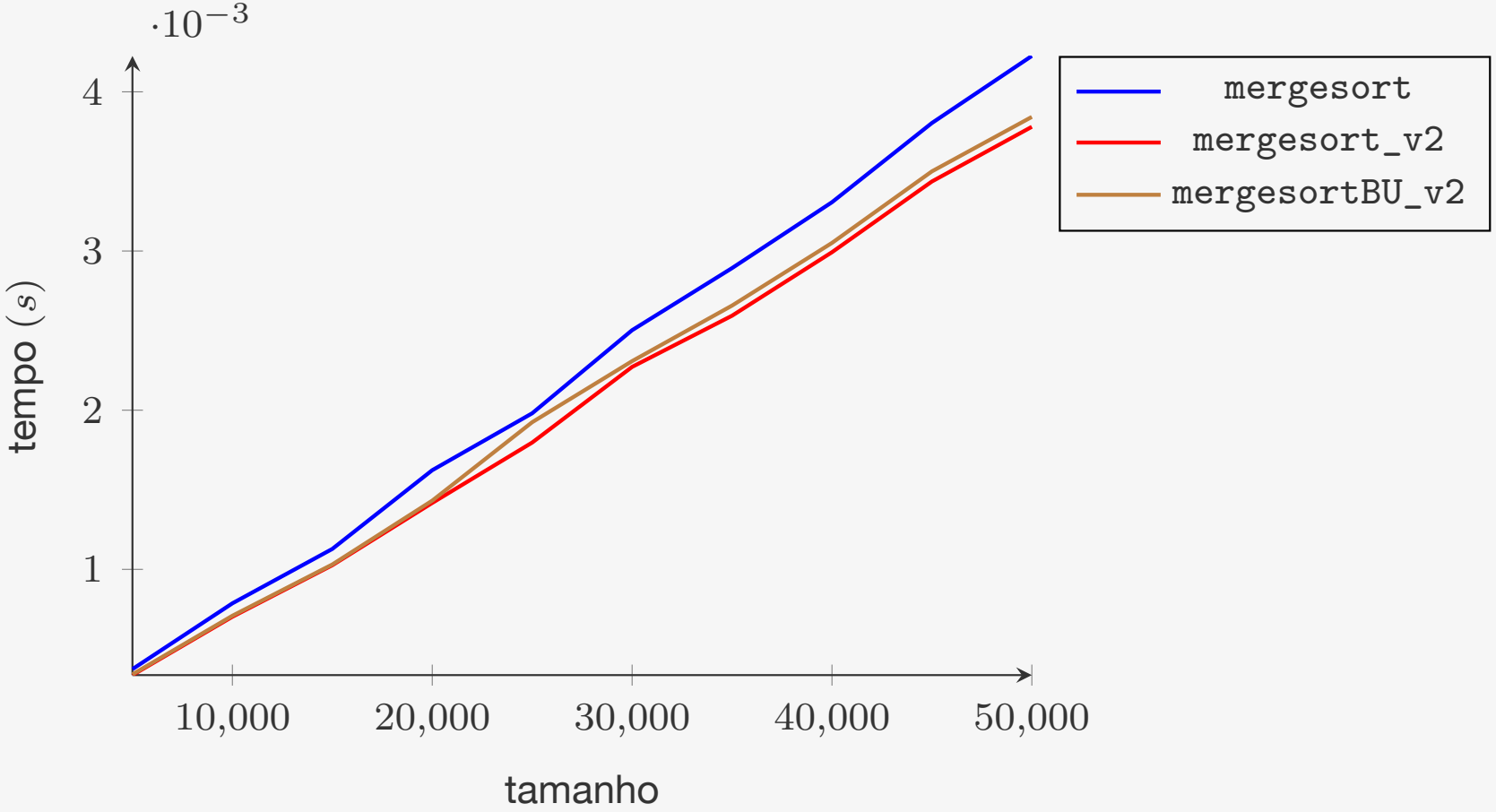
```
1 #define min(A, B) (A < B) ? A : B
2
3 void mergesortBU(int *v, int l, int r) {
4   int i, m;
5   for (m = 1; m < r - l + 1; m = 2*m)
6     for (i = l; i <= r - m; i += 2*m)
7       merge(v, i, i + m - 1, min(i + 2*m - 1, r));
8 }
```

m	i	i+m-1	min(i+2*m-1, r)	intercalação
1	0	0	1	v[0] com v[1]
1	2	2	3	v[2] com v[3]
1	4	4	5	v[4] com v[5]
1	6	6	7	v[6] com v[7]
1	8	8	9	v[8] com v[9]
2	0	1	3	v[0], v[1] com v[2], v[3]
2	4	5	7	v[4], v[5] com v[6], v[7]
4	0	3	7	v[0], ..., v[3] com v[4], ... v[7]
8	0	7	9	v[0], ..., v[7] com v[8], v[9]

Comparação

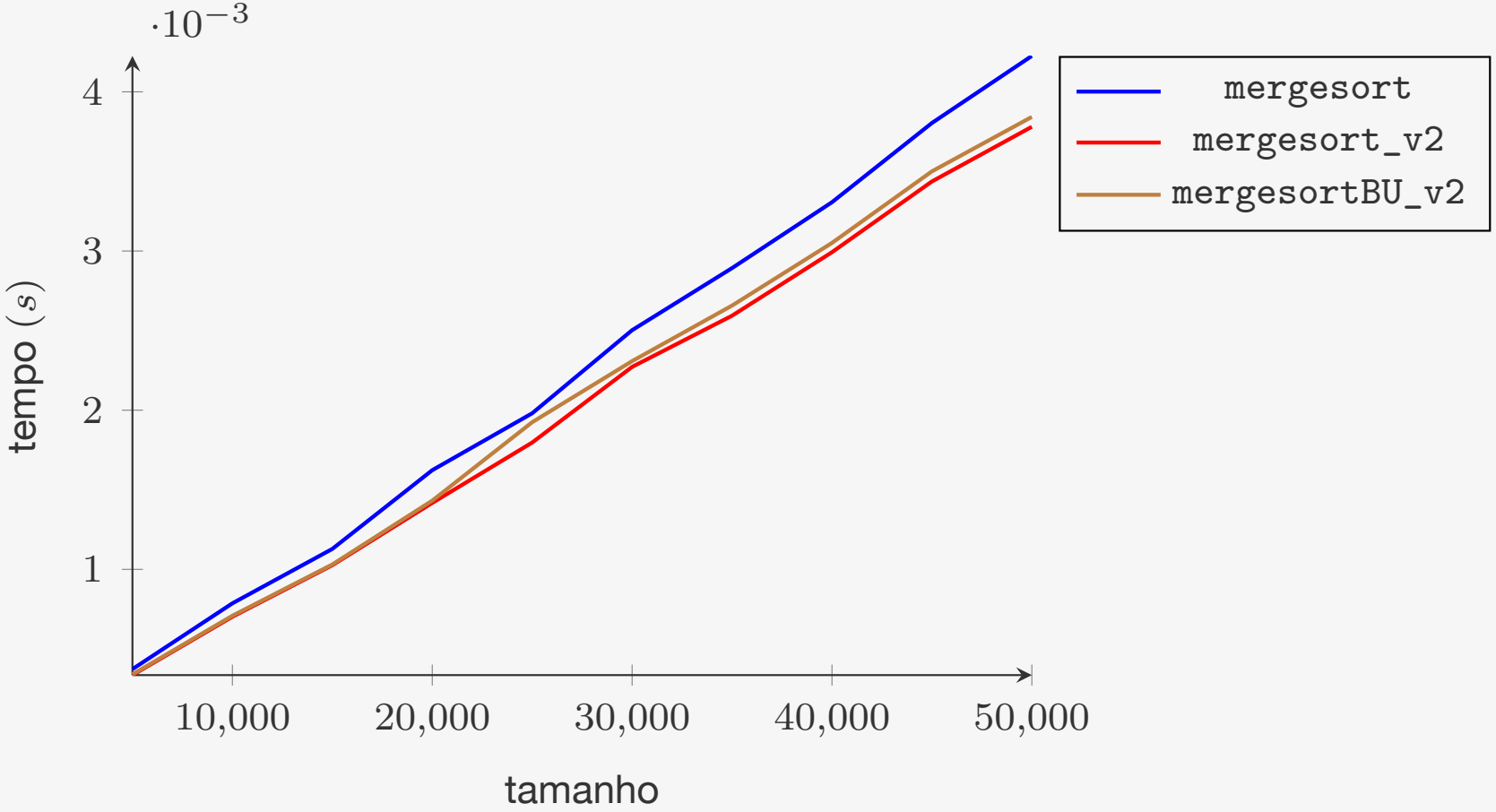

$\cdot 10^{-3}$
4
3
2
1
tempo (s)
10,000
20,000
30,000
40,000
50,000
tamanho
mergesort
mergesort_v2
mergesortBU_v2

Comparação



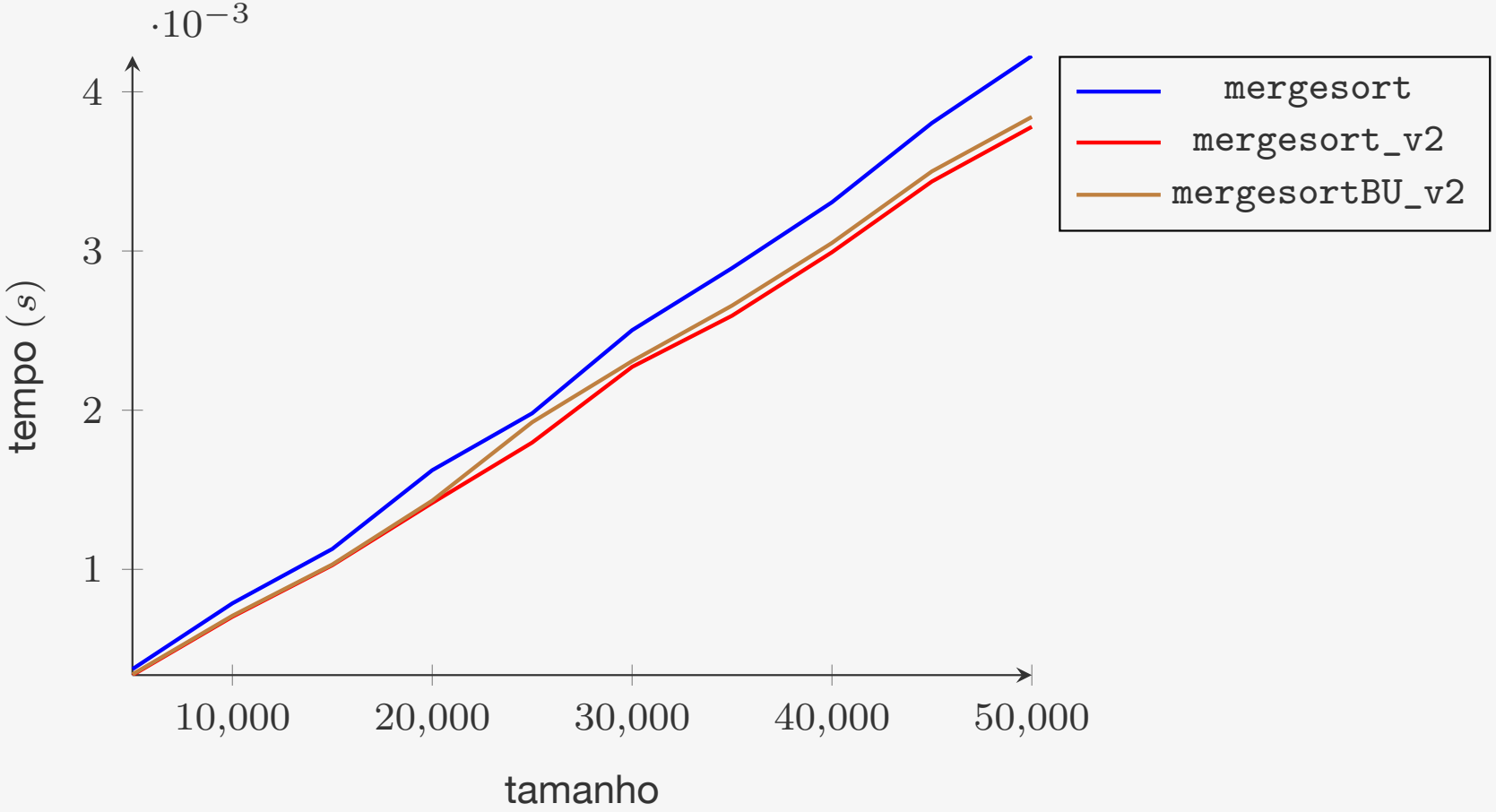
- `mergesortBU_v2` é mais lento que `mergesort_v2`

Comparação



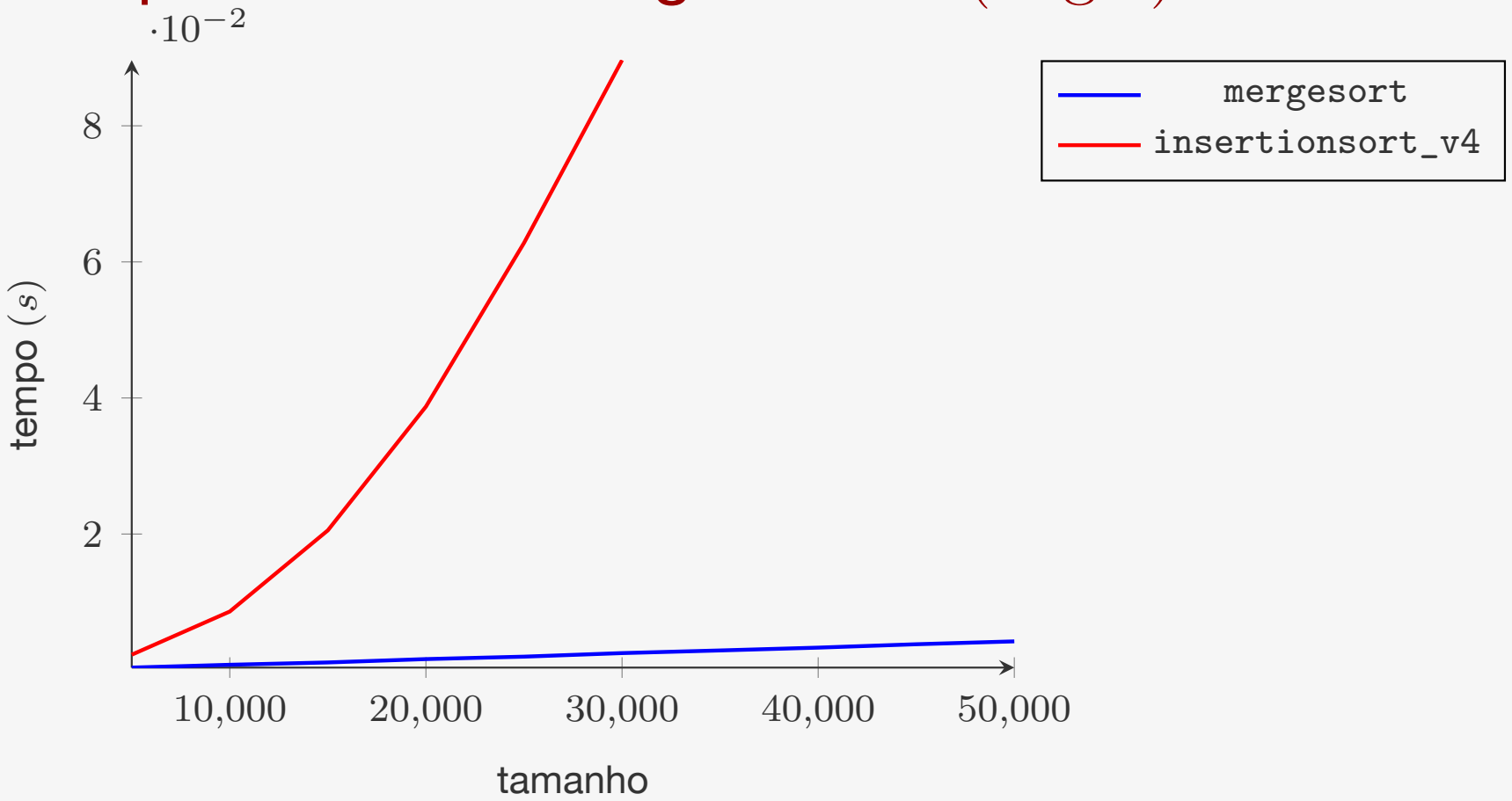
- `mergesortBU_v2` é mais lento que `mergesort_v2`
- as árvores do dois são diferentes

Comparação

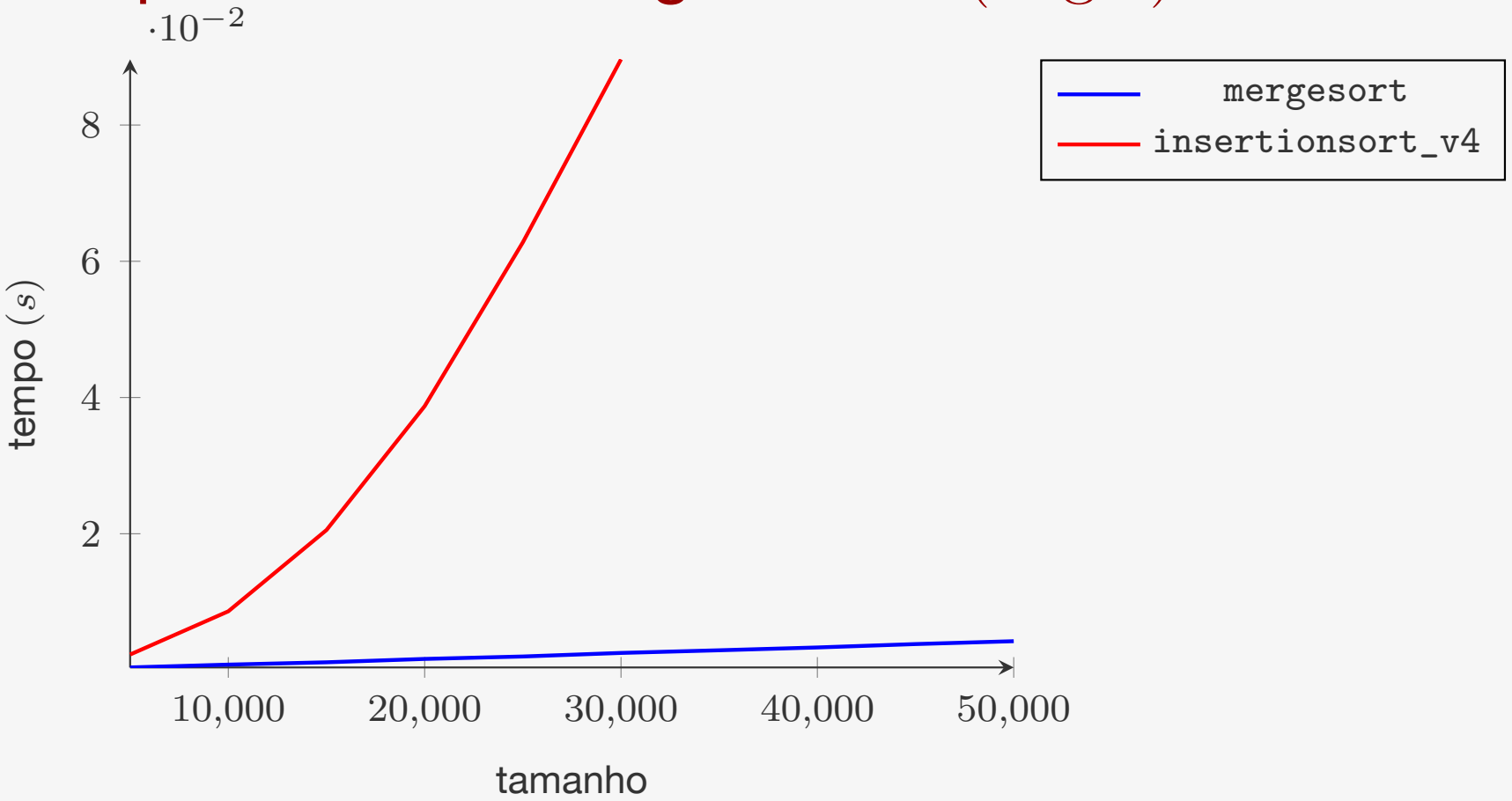


- `mergesortBU_v2` é mais lento que `mergesort_v2`
- as árvores do dois são diferentes
- o algoritmo top-down usa a memória cache melhor

Valeu a pena fazer um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$?

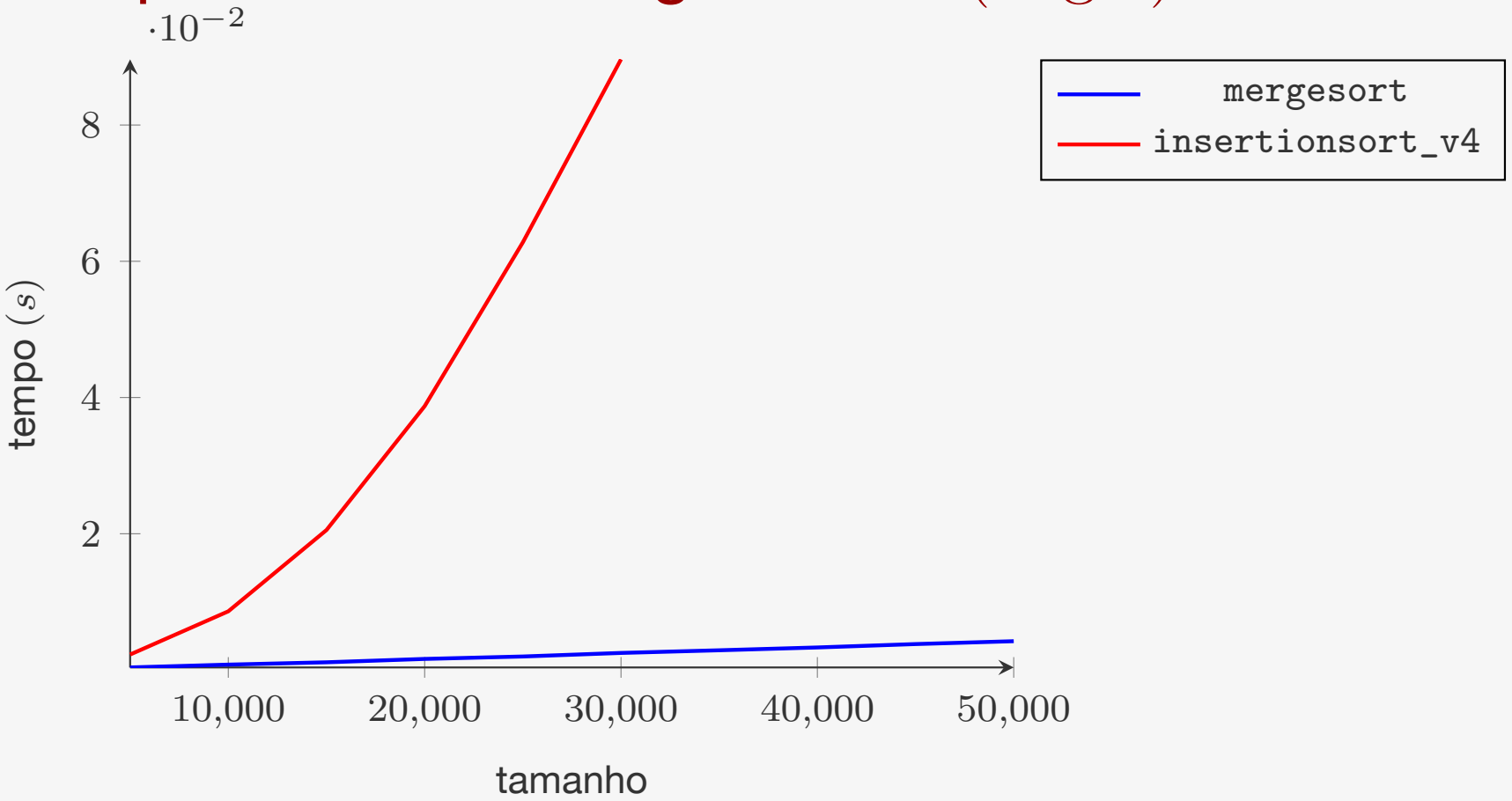


Valeu a pena fazer um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$?



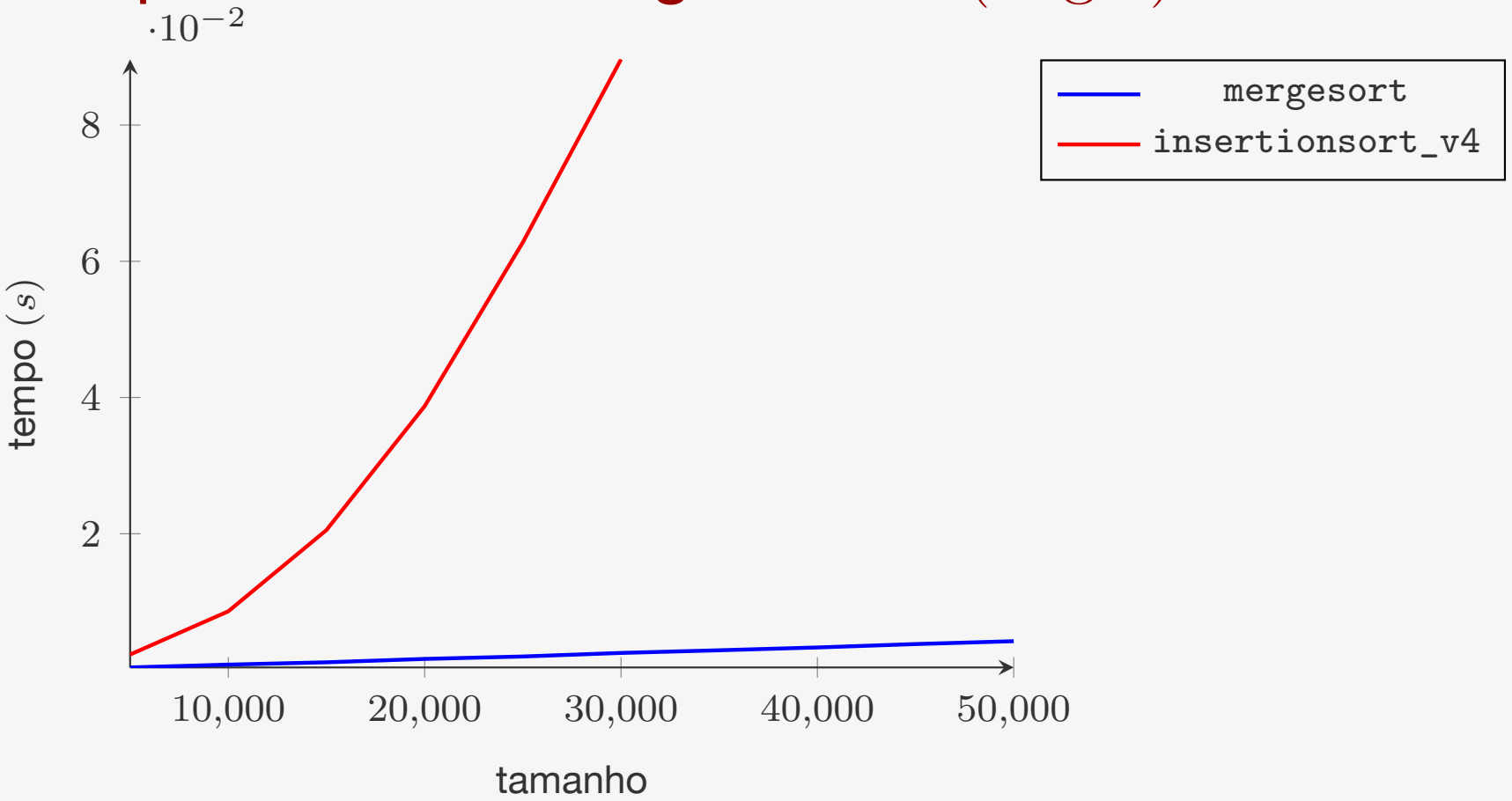
- `insertionsort_v4` ordena 30.000 números em $0.0896s$

Valeu a pena fazer um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$?



- `insertionsort_v4` ordena 30.000 números em $0.0896s$
- `mergesort` ordena 800.000 números em $0.0874s$

Valeu a pena fazer um algoritmo $\mathrm{O}(n \lg n)$?



- `insertionsort_v4` ordena 30.000 números em $0.0896s$
- `mergesort` ordena 800.000 números em $0.0874s$
- É a diferença entre um algoritmo $\mathrm{O}(n^2)$ e um $\mathrm{O}(n \lg n)$

Exercícios

1. Implemente uma função com protótipo
   `void mergeAB(int *v, int *a, int n, int *b, int m)`
   que dados dois ponteiros `*a` e `*b` para vetores de tamanho `n` e `m` faz a intercalação de `*a` e `*b` e armazena no vetor `*v`. Suponha que `*v` já está alocado e que tem tamanho maior ou igual a $n + m$.

2. Implemente a seguinte versão do `mergesort` que evita a cópia para o vetor auxiliar no `merge`. Suponha que desejamos ordenar `a` e temos um vetor `b` com o mesmo conteúdo. Podemos ordenar as duas metades de `b` e então usar a função do primeiro exercício para fazer a intercalação das duas metades de `b`, armazenando em `a`