MO829
Tópicos em Teoria da Computação
Teoria dos Jogos Algorítmica

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2017

Compartilhamento de Custos

Jogos Cooperativos

Vimos vários jogos não-cooperativos:

- Ou os jogadores estão competindo entre eles
  - Ex: leilão, balanceamento de carga, etc...
- Ou estão agindo de maneira egoísta, sem se preocupar com os outros
  - Ex: formação de redes

Veremos agora jogos cooperativos

- Jogadores colaboram para realizar uma tarefa
- Mas ainda consideram seus interesses pessoais

Já vimos dois exemplos:

- Alocação de casas
- Emparelhamento estável

Como manter a cooperação entre os jogadores?

Interlúdio - Localização de Instalações

No Problema da Localização de Instalações temos:

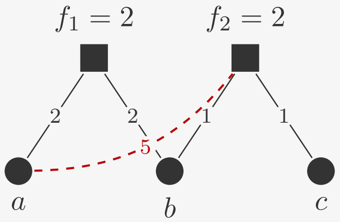
- um conjunto $\mathcal{F}$ de instalações,
- um custo de abertura f_i para todo $i \in \mathcal{F}$,
- um conjunto $\mathcal{C}$ de cidades,
- e distâncias d_{rs} para todo $r, s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$
  - satisfazendo $d_{rs} \leq d_{rt} + d_{ts}$ para todo $t \in \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$
  - "desigualdade triangular"

Queremos abrir um conjunto $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ de instalações para atender todas as cidades, minimizando

- o custo de abertura $\sum_{i \in \mathcal{F}'} f_i$
- mais o custo de conexão $\sum_{j \in \mathcal{C}} \min_{i \in \mathcal{F}'} d_{ij}$
  - cada cidade se conecta a instalação aberta mais próxima

Esse problema é NP-difícil

Exemplo[1]



Se abrirmos apenas a instalação 1:

- Custo de abertura: 2
- Custo de conexão: $2 + 2 + 4 = 8$
- Total: 10

Se abrirmos apenas a instalação 2:

- Custo de abertura: 2
- Custo de conexão: $5 + 1 + 1 = 7$
- Total: 9

Se abrirmos ambas as instalações:

- Custo de abertura: 4
- Custo de conexão: $2 + 1 + 1 = 4$

Jogos cooperativos com utilidades transferíveis

Focaremos em um classe particular de jogos cooperativos:

- Os jogadores ganham um valor ou tem um custo monetário
- E portanto pode pagar ou receber dinheiro de outros jogadores
  - para incentivar a colaboração
- A utilidade ou custo que eles obtém do jogo é transferível

Existem também jogos cooperativos com utilidades não-transferíveis

- Mas não veremos no curso

Jogos cooperativos com utilidades transferíveis

Em um jogo cooperativo com utilidades transferíveis temos:

- Um conjunto $\mathcal{A}$ de n jogadores
  - $S \subseteq \mathcal{A}$ é chamada de uma coalizão
  - $\mathcal{A}$ é chamada de grande coalizão
- Um função $c : 2^{\mathcal{A}} \to \mathbb{R}$ com $c(\emptyset) = 0$
  - $c(S) \in \mathbb{R}$ é o custo gerado pela coalizão S

O jogo não leva em consideração estratégias ou ações

- Considera apenas o custo que uma coalizão tem
- Não como esse custo é obtido pela coalizão

Jogo da Localização de Instalações

No Jogo da Localização de Instalações temos:

- um conjunto $\mathcal{F}$ de instalações,
- um custo de abertura f_i para todo $i \in \mathcal{F}$,
- um conjunto $\mathcal{A}$ de cidades,
- e distâncias d_{rs} para todo $r, s \in \mathcal{F} \cup \mathcal{A}$
  - satisfazendo $d_{rs} \leq d_{rt} + d_{ts}$ para todo $t \in \mathcal{F} \cup \mathcal{A}$

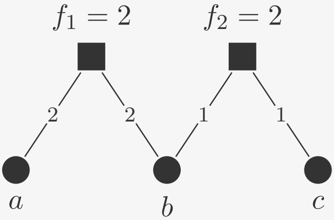
O custo de uma coalizão $S \subseteq \mathcal{A}$ é

$$c(S) = \min_{\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}} \left\{ \sum_{i \in \mathcal{F}'} f_i + \sum_{j \in S} \min_{i \in \mathcal{F}'} d_{ij} \right\}$$

Precisa resolver um problema NP-difícil para determinar $c(S)$

- E temos $2^{|\mathcal{A}|}$ possíveis coalizões...

Exemplo



Custos das coalizões:

- $c(\{a\}) = 4$, $c(\{b\}) = 3$, $c(\{c\}) = 3$
- $c(\{a, b\}) = 6$, $c(\{b, c\}) = 4$, $c(\{a, c\}) = 7$
- $c(\{a, b, c\}) = 8$

Núcleo

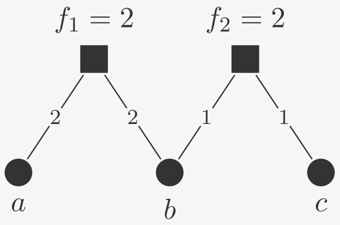
Queremos dividir o custo $c(\mathcal{A})$ entre os jogadores

- $\alpha \in \mathbb{R}^{|\mathcal{A}|}$ é uma alocação de custos
  - α_j é o preço a ser pago pelo jogador $j \in \mathcal{A}$
  - α é uma precificação

Uma alocação de custos está no núcleo se:

- $\sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha_j = c(\mathcal{A})$
  - a soma dos preços é igual ao custo da grande coalizão
  - a alocação de custos é orçamento-balanceada
- $\sum_{j \in S} \alpha_j \leq c(S)$ para todo $S \subseteq \mathcal{A}$
  - não existe uma coalizão que deseja desviar
  - a alocação de custos satisfaz a propriedade do núcleo

Exemplo

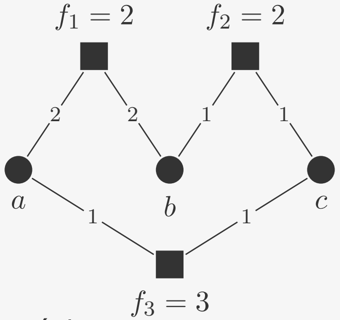


Custos das coalizões:

- $c(\{a\}) = 4$, $c(\{b\}) = 3$, $c(\{c\}) = 3$
- $c(\{a, b\}) = 6$, $c(\{b, c\}) = 4$, $c(\{a, c\}) = 7$
- $c(\{a, b, c\}) = 8$

A alocação de custos $\alpha_a = 4, \alpha_b = 2, \alpha_c = 2$ está no núcleo

Exemplo 2



Para qualquer α no núcleo:

$$\alpha_a + \alpha_b \leq c(\{a, b\}) = 6 \qquad \alpha_b + \alpha_c \leq c(\{b, c\}) = 4$$

$$\alpha_a + \alpha_c \leq c(\{a, c\}) = 5$$

Ou seja, $\alpha_a + \alpha_b + \alpha_c \leq (6 + 4 + 5)/2 = 7.5 < c(\mathcal{A}) = 8$

- O núcleo é vazio!

O Teorema de Bondareva-Shapley

Um vetor λ, onde $\lambda_S \geq 0$ para todo $S \subseteq \mathcal{A}$ é uma coleção balanceada de pesos se, para todo $j \in \mathcal{A}$, $\sum_{S: j \in S} \lambda_S = 1$

Teorema: Um jogo cooperativo com utilidades transferíveis tem um núcleo não-vazio se e somente se, para toda coleção balanceada de pesos λ, temos que $\sum_{S \subseteq \mathcal{A}} \lambda_S c(S) \geq c(\mathcal{A})$

Prova: O jogo tem um núcleo não-negativo se e somente se o seguinte programa linear tem valor $c(\mathcal{A})$

$$\begin{aligned} \text{max} & \sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha_j \\ \text{tal que} & \quad \sum_{j \in S} \alpha_j \leq c(S), \quad \forall S \subseteq \mathcal{A} \end{aligned}$$

O Teorema de Bondareva-Shapley - Prova

O dual do programa linear

$$\begin{aligned} \text{max} & \sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha_j \\ \text{tal que} & \quad \sum_{j \in S} \alpha_j \leq c(S), \quad \forall S \subseteq \mathcal{A} \end{aligned}$$

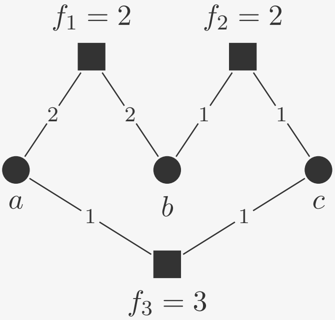
é

$$\begin{aligned} \text{min} & \sum_{S \subseteq \mathcal{A}} \lambda_S c(S) \\ \text{tal que} & \quad \sum_{S : j \in S} \lambda_S = 1, \quad \forall j \in \mathcal{A} \\ & \quad \lambda_S \geq 0, \quad \forall S \subseteq \mathcal{A} \end{aligned}$$

Como $\lambda_{\mathcal{A}} = 1$ e $\lambda_S = 0$ para todo $S \subsetneq \mathcal{A}$ é uma solução do dual de valor $c(\mathcal{A})$

- O valor do primal é igual a $c(\mathcal{A})$ se e somente, para todo λ dual viável, temos que $\sum_{S \subseteq \mathcal{A}} \lambda_S c(S) \geq c(\mathcal{A})$

Exemplo 2



Considere:

- $\lambda_{\{a,b\}} = \lambda_{\{b,c\}} = \lambda_{\{a,c\}} = \frac{1}{2}$
- $\lambda_S = 0$ para as outras coalizões

Lembrando que $c(\{a, b\}) = 6, c(\{b, c\}) = 4$ e $c(\{a, c\}) = 5$

- λ é uma coleção balanceada de pesos e
- $\sum_{S \subseteq \mathcal{A}} \lambda_S c(S) < c(\mathcal{A})$

γ-Núcleo

Dificuldades em relação ao núcleo:

- Ele pode ser vazio... O que fazer então?
- Calcular $c(S)$ pode ser NP-difícil
  - decidir se o núcleo é vazio fica intratável

Solução: relaxação do conceito de núcleo

Uma alocação de custos está no γ-núcleo se:

- $\sum_{j \in S} \alpha_j \leq c(S)$ para todo $S \subseteq \mathcal{A}$
  - a alocação de custos satisfaz a propriedade do núcleo
- $\gamma c(\mathcal{A}) \leq \sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha_j \leq c(\mathcal{A})$
  - a alocação de custos é γ-orçamento-balanceada
  - o valor pago pelos jogadores paga apenas γ do custo total
    - alguém precisa subsidiar o restante...

O Teorema de Bondareva-Shapley para γ-núcleo

Estamos interessados no maior γ tal que o γ-núcleo é não-vazio

Teorema: Um jogo cooperativo com utilidades transferíveis tem um γ-núcleo não-vazio sse, para toda coleção balanceada de pesos λ, temos que $\sum_{S \subseteq \mathcal{A}} \lambda_S c(S) \geq \gamma c(\mathcal{A})$

A prova é similar a anterior

Interlúdio - Gap de Integralidade

Se tivermos um programa linear inteiro

$$
\begin{aligned}
\text{min} \quad & \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \\
\text{tal que} \quad & \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \leq b_j, \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\} \\
& x_i \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}
\end{aligned}
$$

o gap de integralidade é a razão entre

- o valor de uma solução inteira ótima
- o valor de uma solução fracionária ótima

Ex: Problema da Localização de Instalações

- O gap de integralidade é no máximo $1{,}463$
- i.e., o valor de uma solução ótima inteira é no máximo $1{,}463$ do valor da solução ótima fracionária

Custos subaditivos

Uma função $f : 2^U \to \mathbb{R}$ é subaditiva se

- $f(S_1 \cup S_2) \leq f(S_1) + f(S_2)$ para todo $S_1, S_2 \subseteq U$
- Ex: o custo do jogo de localização de instalações

Se c é subaditiva, então o valor de uma solução ótima inteira do programa linear

$$\begin{aligned} \text{min} \quad & \sum_{S \subseteq \mathcal{A}} \lambda_S c(S) \\ \text{tal que} \quad & \sum_{S : j \in S} \lambda_S = 1, \quad \forall j \in \mathcal{A} \\ & \lambda_S \geq 0, \quad \forall S \subseteq \mathcal{A} \end{aligned}$$

é precisamente $c(\mathcal{A})$

Nesse caso, o maior γ tal que o γ-núcleo é não-vazio é o inverso do gap de integralidade

- Alguns problemas têm uma formulação equivalente a essa
- Porém de tamanho polinomial

Formulação para Localização de Instalações

Variáveis:

- x_i indica se a instalação $i \in \mathcal{F}$ é aberta
- y_{ij} indica se a cidade $j \in \mathcal{A}$ se conecta a instalação $i \in \mathcal{F}$

$$
\begin{array}{lll}
\text{min } \sum_{i \in \mathcal{F}} f_i x_i + \sum_{i \in \mathcal{F}} \sum_{j \in \mathcal{A}} d_{ij} y_{ij} & & \\
\text{tal que} \quad \sum_{i \in \mathcal{F}} y_{ij} \geq 1, & & \forall j \in \mathcal{A} \\
\qquad\qquad x_i \geq y_{ij}, & & \forall i \in \mathcal{A}, \forall j \in \mathcal{F} \\
\qquad\qquad x_i \in \{0, 1\}, & & \forall i \in \mathcal{F} \\
\qquad\qquad y_{ij} \in \{0, 1\}, & & \forall i \in \mathcal{A}, \forall j \in \mathcal{F}
\end{array}
$$

Relaxamos as restrições de integralidade de x e y

Formulação para Localização de Instalações

$$
\begin{aligned}
\text{min } & \textstyle\sum_{i \in \mathcal{F}} f_i x_i + \sum_{i \in \mathcal{F}} \sum_{j \in \mathcal{A}} d_{ij} y_{ij} & \\
\text{tal que } & \textstyle\sum_{i \in \mathcal{F}} y_{ij} \geq 1, & \forall j \in \mathcal{A} \\
& x_i \geq y_{ij}, & \forall i \in \mathcal{A}, \forall j \in \mathcal{F} \\
& x_i \geq 0, & \forall i \in \mathcal{F} \\
& y_{ij} \geq 0, & \forall i \in \mathcal{A}, \forall j \in \mathcal{F}
\end{aligned}
$$

O dual é

$$
\begin{aligned}
\text{max } & \textstyle\sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha_j & \\
\text{tal que } & \beta_{ij} \geq \alpha_j - d_{ij}, & \forall i \in \mathcal{A}, \forall j \in \mathcal{F} \\
& \textstyle\sum_{j \in \mathcal{A}} \beta_{ij} \leq f_i, & \forall i \in \mathcal{F} \\
& \alpha_j \geq 0, & \forall j \in \mathcal{A} \\
& \beta_{ij} \geq 0, & \forall i \in \mathcal{A}, \forall j \in \mathcal{F}
\end{aligned}
$$

Vamos mostrar que α satisfaz a propriedade do núcleo

α satisfaz a propriedade do núcleo

Seja $S \subseteq \mathcal{A}$

- Considere uma solução ótima com conjunto de cidades S
- Sejam $i_1, \ldots, i_k$ as instalações abertas
- Sejam $R_1, \ldots, R_k$ os conjuntos de clientes conectados a tais instalações

Como, para todo $t \in \{1, \ldots, k\}$

- $\sum_{j \in \mathcal{A}} \beta_{i_t j} \leq f_{i_t}$ e
- para todo $j \in R_t$, $\beta_{i_t j} \geq \alpha_j - d_{i_t j}$

Temos

$$\sum_{j \in R_t} \alpha_j \leq \sum_{j \in R_t} \beta_{i_t j} + \sum_{j \in R_t} d_{i_t j} \leq \sum_{j \in \mathcal{A}} \beta_{i_t j} + \sum_{j \in R_t} d_{i_t j} \leq f_{i_t} + \sum_{j \in R_t} d_{i_t j}$$

Somando sobre t, temos que $\sum_{j \in S} \alpha_j \leq c(S)$

Calculando uma alocação de custos

Usando o dual da formulação do Problema da Localização de Instalações

$$
\begin{array}{lrll}
\text{max} \sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha_j & & & \\
\text{tal que} & \beta_{ij} & \geq \alpha_j - d_{ij}, & \forall i \in \mathcal{A}, \forall j \in \mathcal{F} \\
& \sum_{j \in \mathcal{A}} \beta_{ij} & \leq f_i, & \forall i \in \mathcal{F} \\
& \alpha_j & \geq 0, & \forall j \in \mathcal{A} \\
& \beta_{ij} & \geq 0, & \forall i \in \mathcal{A}, \forall j \in \mathcal{F}
\end{array}
$$

podemos calcular uma alocação de custos para o Jogo da Localização de Instalações

- que está no $(1/1{,}463)$-núcleo ($1/1{,}463 \approx 0{,}683$)
- em tempo polinomial
  - mesmo sem saber explicitamente os valores de $c(S)$

Mecanismo de compartilhamento de custos

Um provedor irá fornecer serviço para os clientes

- Ex: instalar instalações e conectar as cidades
- Atender um conjunto S de clientes tem um custo $c(S)$
- Para isso, realiza um leilão
  - Escolhe o conjunto Q de clientes servidos
  - Escolhe um preço p_i para cada cliente i

O cliente:

- Dá um lance b_i para ser servido
- Tem utilidade $v_i q_i - p_i$, onde q_i indica se foi servido

Mecanismo de compartilhamento de custos

Um mecanismo de compartilhamento de custos é uma função que dados o vetor b de lances define

- o conjunto $Q \subseteq \mathcal{A}$ de clientes servidos
- o vetor de pagamentos $p \in \mathbb{R}^n$

Consideramos as seguintes restrições para o mecanismo:

- Sem transferências positivas: $p_i \geq 0$ para todo $i \in \mathcal{A}$
- Participação voluntária (ou racionalidade individual):
  - $p_i = 0$ se i não é servido
  - $p_i \leq b_i$ para $i \in Q$
- Soberania do consumidor: para todo $i \in \mathcal{A}$, existe um lance b_i^* que faz com que i seja servido
  - independentemente dos outros jogadores

Esquema de compartilhamento de custos

Um esquema de compartilhamento de custos é uma função $\xi : \mathcal{A} \times 2^{\mathcal{A}}$ tal que, para todo $S \subseteq \mathcal{A}$ e todo $i \notin S$, $\xi(i, S) = 0$

- define como compartilhar o custo entre uma coalizão S
- quem não está na coalizão não paga

Um esquema de compartilhamento de custos é γ-orçamento balanceado se, para todo, $S \subseteq \mathcal{A}$, $\gamma c(S) \leq \sum_{i \in S} \xi(i, S) \leq c(S)$

Um esquema de compartilhamento de custos é monotônico cruzado se, para todo $S, T \subseteq \mathcal{A}$ e $i \in S$, $\xi(i, S) \geq \xi(i, S \cup T)$

- Se o conjunto de jogadores servidos aumenta
- o preço pago por i não aumenta

Monotonicidade cruzada

Proposição: Seja γ um esquema de compartilhamento de custos monotônico cruzado γ-orçamento balanceado. Então $\xi(\cdot, \mathcal{A})$ está no γ-núcleo do jogo.

Prova: Como ξ é γ-orçamento balanceado, $\xi(\cdot, \mathcal{A})$ também é

Seja $S \subseteq \mathcal{A}$

- Por monotonicidade, $\xi(i, \mathcal{A}) \leq \xi(i, S)$ para todo $i \in S$
- Por ser γ-orçamento balanceado, $\sum_{i \in S} \xi(i, S) \leq c(S)$

Portanto, $\sum_{i \in S} \xi(i, \mathcal{A}) \leq \sum_{i \in S} \xi(i, S) \leq c(S)$

- $\xi(\cdot, \mathcal{A})$ satisfaz a propriedade do núcleo

Mecanismo $\mathcal{M}_\xi$

Mecanismo $\mathcal{M}_\xi$

```
S ← A
repita
    S ← {i ∈ S : b_i ≥ ξ(i, S)}
até que b_i ≥ ξ(i, S) para todo i ∈ S
retorne Q = S e p_i = ξ(i, S) para todo i ∈ S
```

Note que se ξ é γ-orçamento balanceado então $\mathcal{M}_\xi$ também é

Proposição: Se ξ é um esquema de compartilhamento de custos monotônico cruzado γ-orçamento balanceado. Então o mecanismo $\mathcal{M}_\xi$ devolve o único conjunto maximal $S \subseteq \mathcal{A}$ tal que, para todo $i \in S$, $b_i \geq \xi(i, S)$.

Mecanismo

Proposição: Se ξ é um esquema de compartilhamento de custos monotônico cruzado γ-orçamento balanceado. Então o mecanismo $\mathcal{M}_\xi$ devolve o único conjunto maximal $S \subseteq \mathcal{A}$ tal que, para todo $i \in S$, $b_i \geq \xi(i, S)$.

Lema 1: Se ξ é um esquema de compartilhamento de custos monotônico cruzado γ-orçamento balanceado. Então existe um único conjunto maximal $S \subseteq \mathcal{A}$ tal que, para todo $i \in S$, $b_i \geq \xi(i, S)$.

Lema 1

Lema 1: Se ξ é um esquema de compartilhamento de custos monotônico cruzado γ-orçamento balanceado. Então existe um único conjunto maximal $S \subseteq \mathcal{A}$ tal que, para todo $i \in S$, $b_i \geq \xi(i, S)$.

Prova: Suponha que existem conjuntos maximais S_1 e S_2 que satisfazem a propriedade

- $b_i \geq \xi(i, S_1) \geq \xi(i, S_1 \cup S_2)$ para todo $i \in S_1$
- $b_i \geq \xi(i, S_2) \geq \xi(i, S_1 \cup S_2)$ para todo $i \in S_2$

Portanto, $S_1 \cup S_2$ também satisfaz a propriedade e obtemos uma contradição.

Proposição

Proposição: Se ξ é um esquema de compartilhamento de custos monotônico cruzado γ-orçamento balanceado. Então o mecanismo $\mathcal{M}_\xi$ devolve o único conjunto maximal $S \subseteq \mathcal{A}$ tal que, para todo $i \in S$, $b_i \geq \xi(i, S)$.

Prova: Seja S^* o único conjunto maximal satisfazendo $b_i \geq \xi(i, S^*)$ para todo $i \in S^*$.

Mostraremos, por contradição, que $\mathcal{M}_\xi$ nunca elimina $i \in S^*$

- Considere a primeira vez que algum $i \in S^*$ é eliminado
- Digamos que ele foi eliminado de S
- Então $b_i < \xi(i, S)$
- Mas, $S^* \subseteq S$ (foi a primeira eliminação)
- Concluímos que $b_i < \xi(i, S) \leq \xi(i, S^*)$
  - obtemos uma contradição com a definição de S^*

Mecanismo à prova de estratégia de grupo

Um mecanismo $\mathcal{M}$ é à prova de estratégia de grupo se,

- quando qualquer coalizão S mente e $i \in S$ melhora
- então existe $j \in S$ que piora

Formalmente, seja $S \subseteq \mathcal{A}$

- Sejam v e b dois vetores de lances
  - v é quando todos falam a verdade e b é quando S mente
  - $b_i = v_i$ se $i \notin S$
- Seja (Q, p) o resultado de $\mathcal{M}$ para v
- Seja (Q', p') o resultado de $\mathcal{M}$ para b

Se o mecanismo é à prova de estratégia de grupos, temos que

- Se $v_i q_i' - p_i' \geq v_i q_i - p_i$ para todo $i \in S$
  - então $v_i q_i' - p_i' = v_i q_i - p_i$ para todo $i \in S$
- Analogamente, se existe $i \in S$ tal que $v_i q_i' - p_i' > v_i q_i - p_i$
  - então existe $j \in S$ tal que $v_i q_i' - p_i' < v_i q_i - p_i$

$\mathcal{M}_\xi$ é à prova de estratégia de grupo

Teorema: $\mathcal{M}_\xi$ é à prova de estratégia de grupo

Prova: Suponha que existe uma coalizão T que se beneficia ao mentir

- T^+ são os que dão lances maiores do que v_i e
- $T^- = T \setminus T^+$

Primeiro, vamos mostrar que, s.p.g., $T^+ = \emptyset$

- reduza os lances de $i \in T^+$ de b_i para u_i um-a-um
  - até que o resultado (Q', p') do leilão mude para (Q'', p'')
- note que $i \in Q'$, pois caso contrário o resultado não muda
- e $i \notin Q''$, caso contrário, $p'_i = p'_i$
- concluímos que $\xi(i, Q') > v_i$
  - então $v_i q'_i - p'_i = v_i - \xi(i, Q') < 0$ e i não se beneficia

$\mathcal{M}_\xi$ é à prova de estratégia de grupo

Teorema: $\mathcal{M}_\xi$ é à prova de estratégia de grupo

Prova: Suponha que existe uma coalizão T que se beneficia ao mentir

- T^+ são os que dão lances maiores do que v_i e
- $T^- = T \setminus T^+$
- (Q, p) resultado para v
- (Q', p') resultado para b
- Como s.p.g. $T^+ = \emptyset$, temos que $Q' \subseteq Q$
  - $\mathcal{M}_\varepsilon$ devolve Q único maximal tal que $b_i \geq \xi(i, Q)$

v_i é uma resposta ótima para $i \in T^-$?

- Se $i \in Q'$, então reportar v_i não aumenta o preço a ser pago, já que ξ é monotônico cruzado.
- Se $i \notin Q'$, sua utilidade é zero e reportar v_i não pode piorar a utilidade de i

Compartilhamento de custos e mecanismo

Se tivermos um esquema de compartilhamento de custos ξ

- monotônico cruzado
- γ-orçamento balanceado

Então, o mecanismo $\mathcal{M}_\xi$ é

- γ-orçamento balanceado
- à prova de estratégia de grupos

Basta então encontrar um esquema de compartilhamento de custos ξ com tais propriedades

- com γ que conseguirmos

Voltando a Localização de Instalações

Vamos ver como obter um esquema de compartilhamento de custos monotônico cruzado $1/3$-orçamento balanceado para o Jogo da Localização de Instalações

Vamos usar um algoritmo primal-dual para esse jogo

- dado $S \subseteq \mathcal{A}$
- encontrar uma solução viável (primal) para S
- e uma alocação de custos (dual) para S

Faremos também um pós-processamento para abrir menos instalações

- Assim, o custo pago será $1/3$ do valor da solução

Relação entre Primal e Dual

Primal:

$$\begin{array}{llr} \text{min} \sum_{i\in\mathcal{F}} f_i x_i + \sum_{i\in\mathcal{F}}\sum_{j\in\mathcal{A}} d_{ij} y_{ij} & & \\ \text{tal que} \quad \sum_{i\in\mathcal{F}} y_{ij} \geq 1, & \forall j \in \mathcal{A} \\ x_i \geq y_{ij}, & \forall i \in \mathcal{A}, \forall j \in \mathcal{F} \\ x_i \in \{0,1\}, & \forall i \in \mathcal{F} \\ y_{ij} \in \{0,1\}, & \forall i \in \mathcal{A}, \forall j \in \mathcal{F} \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{llr} \text{max} \sum_{j\in\mathcal{A}} \alpha_j & & \\ \text{tal que} \quad \beta_{ij} \geq \alpha_j - d_{ij}, & \forall i \in \mathcal{A}, \forall j \in \mathcal{F} \\ \sum_{j\in\mathcal{A}} \beta_{ij} \leq f_i, & \forall i \in \mathcal{F} \\ \alpha_j \geq 0, & \forall j \in \mathcal{A} \\ \beta_{ij} \geq 0, & \forall i \in \mathcal{A}, \forall j \in \mathcal{F} \end{array}$$

Folgas complementares:

- Quando $x_i > 0$, temos que $\sum_{j\in\mathcal{A}} \beta_{ij} = f_i$
- Quando $y_{ij} > 0$, temos que $\beta_{ij} = \alpha_j - d_{ij}$

Relação entre Primal e Dual

Dual: max $\sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha_j$

$$
\begin{array}{lrll}
\text{tal que} & \beta_{ij} & \geq \alpha_j - d_{ij}, & \forall i \in \mathcal{A}, \forall j \in \mathcal{F} \\
& \sum_{j \in \mathcal{A}} \beta_{ij} & \leq f_i, & \forall i \in \mathcal{F} \\
& \alpha_j & \geq 0, & \forall j \in \mathcal{A} \\
& \beta_{ij} & \geq 0, & \forall i \in \mathcal{A}, \forall j \in \mathcal{F}
\end{array}
$$

Folgas complementares:

- Quando $x_i > 0$, temos que $\sum_{j \in \mathcal{A}} \beta_{ij} = f_i$
- Quando $y_{ij} > 0$, temos que $\beta_{ij} = \alpha_j - d_{ij}$

S.p.g., $\beta_{ij} = \max\{0, \alpha_j - d_{ij}\}$

- α_j é quanto o jogador j paga no total
- β_{ij} é quanto ele paga para ajudar a abrir a instalação i

Ideia do Algoritmo

Folgas complementares:

- Quando $x_i > 0$, temos que $\sum_{j \in \mathcal{A}} \beta_{ij} = f_i$
- Quando $y_{ij} > 0$, temos que $\beta_{ij} = \alpha_j - d_{ij}$

Ideia do algoritmo:

1. $\alpha_j = 0$ para todos os jogadores
2. Aumentamos os α_j do jogadores não conectados na mesma velocidade até que
   - ou $\sum_{j \in \mathcal{A}} \max\{0, \alpha_j - d_{ij}\} = f_i$
     - abrimos a i e conectamos todos os que contribuíram a i
   - ou $\alpha_j = d_{ij}$ e i já está aberta
     - conectamos j a i
3. Se houver jogadores não conectados volte para 2

O algoritmo tem também custos fantasmas α_j's

- ajudarão a pagar por instalações
- sem que o jogador tenha que pagar de fato

Algoritmo

FLCostShare(S)

$\alpha_j \leftarrow 0$ para todo $j \in S$
$\alpha'_j \leftarrow 0$ para todo $j \in S$
$F \leftarrow \emptyset$
enquanto $S \setminus F \neq \emptyset$
Aumente α_j's para $j \in T \setminus F$ e α'_j's para $j \in T$ igualmente até que
<u>**ou**</u> para uma instalação não aberta i, $\sum_{j \in T} \max(0, \alpha'_j - d_{ij}) = f_i$
abra a instalação i
adicione todo jogador j com contribuição positiva para i a F
<u>**ou**</u> para uma instalação aberta e um jogador j, $\alpha_j = d_{ij}$
adicione j a F

Pós-processamento:

- Seja t_i o "tempo" no qual a instalação i é aberta
- Percorra as instalações abertas na ordem crescente de t_i
  - se existir uma instalação aberta com distância $\leq 2t_i$
  - fechamos i e caso contrário, mantemos i aberta

Seja $\mathcal{F}'$ as instalações que continuaram abertas

- Conecte $j \in S$ na instalação de $\mathcal{F}'$ mais próxima de j

$1/3$-orçamento balanceado

S_i: conjunto de jogadores a distância t_i da instalação $i \in \mathcal{F}'$

- se $j \in S_i \cap S_{i'}$, então $d_{ii'} \leq t_i + t_{i'} \leq 2\max\{t_i, t_{i'}\}$
- ou i ou i' teria sido fechada, ou seja, $S_i \cap S_{i'} = \emptyset$

Vamos mostrar que:

1. todo $j \notin \bigcup_{i \in \mathcal{F}'}$ é capaz de pagar $(\min_{i \in \mathcal{F}'} d_{ij})/3$
2. S_i é capaz de pagar $(f_i + \sum_{j \in S_i} d_{ij})/3$

I.e., $\sum_{j \in S} \alpha_j$ é maior ou igual a $1/3$ do custo da solução

- e, portanto, é maior ou igual a $1/3$ de $c(S)$
- ou seja, α é $1/3$-orçamento balanceado

A primeira parte é simples:

- seja $j \notin \bigcup_{i \in \mathcal{F}'}$ e i tal que $t_i = \alpha_j$
- existe $i' \in \mathcal{F}'$ a distância no máximo $2t_i$ de i
- $d_{i'j} \leq d_{ij} + 2t_i \leq 3\alpha_j$

Segunda parte

Note que

- No momento de abertura de i, $\alpha'_j = t_i$ para todo j em S
- Para $j \notin S_i$, $\alpha'_j < d_{ij}$
  - j não contribui para i
- Ou seja, $f_i = \sum_{j \in S} \max(0, \alpha'_j - d_{ij}) = \sum_{j \in S_i} (t_i - d_{ij})$

Suponha que existe $j \in S_i$ tal que $\alpha_j < t_i/3$

- Seja i_1 a instalação que congelou α_j
- Seja $i_2 \in \mathcal{F}'$ a distância no máximo $2t_{i_1}$ de i_1
  - ou fechamos i_1 por causa de i_2 ou $i_1 = i_2$
- $d_{ii_2} \leq d_{ij} + d_{i_1 j} + d_{i_1 i_2} \leq t_i + 3\alpha_j < 2t_i$
- então i e i_2 não podem ambas estarem abertas...

Assim, $\sum_{j \in S_i} \alpha_j \geq \sum_{j \in S_i} t_i/3 \geq (f_i + \sum_{j \in S_i} d_{ij})/3$

Monotonicidade Cruzada

Falta mostrar que o esquema de compartilhamento de custos é monotônico cruzado

Seja $S, T \subseteq \mathcal{A}$. Se $j \in S$ está congelado em um tempo t na execução de FLCostShare(S), então j está congelado no tempo t na execução de FLCostShare$(S \cup T)$

- I.e., $\xi(j, S) \geq \xi(j, S \cup T)$

Recapitulando

Existe uma alocação de custos $1/1{,}463$-orçamento balanceada para o Jogo da Localização de Instalações

- Basta calcular o dual da formulação

O $1/1{,}52$-núcleo do Jogo da Localização de Instalações pode ser vazio

- por causa do gap de integralidade

Existe um esquema de compartilhamento de custos monotônico cruzado $1/3$-orçamento balanceado para o Jogo da Localização de Instalações

- e não dá para fazer melhor que isso

Outra forma de alocar custos

O núcleo é um conceito interessante para jogos cooperativos

- Mas pode ser vazio...
- Ou pode ter mais de um elemento
  - como escolher entre eles?

Vamos ver outra forma de alocar custos

Uma forma simples de alocar custos entre os jogadores:

- Ordene os jogadores como $a_1, a_2, \ldots, a_n$
- Cobre de a_1 o valor $c(\{a_1\})$
- Cobre de a_2 o valor $c(\{a_2, a_1\}) - c(\{a_1\})$
- $\ldots$
- Cobre de a_n o valor $c(\mathcal{A}) - c(\mathcal{A} \setminus \{a_n\})$

Essa alocação de custos é orçamento balanceada

- é chamada de compartilhamento de custos incremental
- mas não é anônima, pode não ser muito justa...

O Valor de Shapley

O Valor de Shapley resolve o problema da anonimidade usando aleatoriedade

- escolhemos uma ordem aleatória dos jogadores
- cobramos dele o seu valor esperado

Qual a probabilidade do jogador j ocupar a posição $s+1$ e um conjunto S um conjunto S ocupar as s primeiras posições?

$$\frac{s!(n-1-s!)}{n!}$$

O Valor de Shapley define a seguinte alocação de custos ϕ

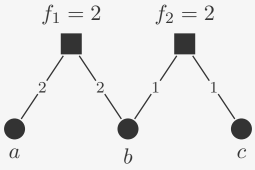
$$\phi_i(c) = \sum_{s=0}^{n-1} \sum_{\substack{S \subseteq \mathcal{A} \setminus \{i\} \\ |S|=s}} \frac{s!(n-1-s!)}{n!} \left(c(S \cup \{i\}) - c(S)\right)$$

O Valor de Shapley

A alocação de custos do Valor de Shapley não precisa estar no núcleo mesmo quando o núcleo é não-vazio

Vimos um Jogo de Localização de Instalações com núcleo não-vazio e $c(\{a\}) = 4$, $c(\{b\}) = 3$, $c(\{c\}) = 3$, $c(\{a, b\}) = 6$, $c(\{b, c\}) = 4$, $c(\{a, c\}) = 7$ e $c(\{a, b, c\}) = 8$

Porém,



$$\phi_a = \frac{1}{3} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{23}{6}$$

$$\phi_b = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{11}{6}$$

$$\phi_c = \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{7}{3},$$

mas $\phi_b + \phi_c = 25/6 > 4 = c(\{b, c\})$

Caracterização Axiomática

Fixe um conjunto $\mathcal{A}$ de n jogadores. O valor é uma função que atribui, para cada função de custo c, um vetor $\phi(c) \in \mathcal{R}^n$.

Três propriedades interessantes que um valor pode ter:

- Anonimidade: trocar os nomes dos jogadores não afeta quanto um jogador paga
  - para toda permutação π de $\mathcal{A}$, $\phi_{\pi_i}(\pi(c)) = \phi_i(c)$
- Dummy: um jogador que não adiciona custo não deve pagar nada
  - se para todo $S \subseteq \mathcal{A} \setminus \{i\}$, $c(S) = c(S \cup \{i\})$, então $\phi_i(c) = 0$
- Aditividade: para quaisquer duas funções de custo c_1 e c_2, $\phi(c_1 + c_2) = \phi(c_1) + \phi(c_2)$

Teorema: O Valor de Shapley é o único valor satisfazendo as três propriedades.