

MO829  
Tópicos em Teoria da Computação  
Teoria dos Jogos Algorítmica

Rafael C. S. Schouery  
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2017

# Projeto de Mecanismos sem Dinheiro

# Projeto de Mecanismos sem Dinheiro

**Teorema [Gibbard-Satterthwaite]:** Se  $f$  é uma função de escolha social à prova de estratégia sobre  $A$ , com  $|A| \geq 3$ , então  $f$  é uma ditadura.

- O teorema de Gibbard-Satterthwaite é um fator limitante no projeto de mecanismos
- Mas existem situações onde ele não se aplica
- Assim, podemos criar mecanismos interessantes mesmo com essa limitação
- O VCG e outros mecanismos utilizam dinheiro para incentivar os jogadores
- Porém, nem sempre é interessante ou possível usar dinheiro nos mecanismos

# Problemas de alocação

Vamos considerar dois problemas de alocação:

- alocação de casas:
  - ▶ um grupo quer trocar de casas entre si
  - ▶ cada pessoa tem uma ordem de preferência na casa que ficará
- emparelhamento estável:
  - ▶ devemos casar um grupo de homens com um grupo de mulheres
  - ▶ cada pessoa tem uma ordem de preferência sobre o grupo do sexo oposto

Uma pessoa se importa apenas com o seu resultado e não com o resultado global

# Alocação de casas

Alocação de bens indivisíveis:

- $n$  agentes, cada um com uma única casa e uma ordem de preferência em todas as casas
- **Objetivo:** realocar as casas de um modo apropriado

As ordens de preferência são arbitrárias, mas a ordem sobre as alocações é restrita:

- Qualquer alocação que deixa o agente com uma mesma casa é equivalente

O teorema de Gibbard-Satterthwaite não se aplica!

# Alocação de casas

Numere os agentes de  $1$  a  $n$

- Uma alocação  $a$  é uma permutação de  $1$  a  $n$ 
  - ▶  $a_i$  é a casa que fica com o agente  $i$
- $A$ : conjunto de todas as alocações
- $\succsim_i$ : ordem de preferência do agente  $i$ 
  - ▶  $x \succsim_i y$  significa que  $i$  prefere a casa  $x$  do que a casa  $y$

**Objetivo:** encontrar uma alocação estável das casas aos agentes

**Estável:**

- nenhum grupo de agentes pode se unir e trocar as casas entres eles
- obtendo uma alocação melhor para eles do que a alocação sugerida

# Coalizão

Para  $S \subseteq [n]$ , seja  $A(S) = \{z \in A : z_i \in S, \forall i \in S\}$

- $A(S)$ : alocações onde agentes de  $S$  trocam casas entre si

$S$  é uma coalizão bloqueadora para uma alocação  $a$  em  $A$  se existe  $z$  em  $A(S)$  tal que

- existe  $j \in S$  com  $z_j \succ_j a_j$
- para todo  $i \neq j$  em  $S$ , ou  $z_i \succ_i a_i$  ou  $z_i = a_i$

**Núcleo:** conjunto de alocações sem coalizão bloqueadora

# Algoritmo TTC - top trading cycle

Grafo orientado:

- um vértice para cada agente
- arco de  $i$  para  $j$  se a casa de  $j$  é a favorita de  $i$

Cada vértice tem grau de saída 1

- há exatamente um circuito em cada componente
- Circuitos são vértices-disjuntos

Seja  $N = [n]$  e  $N_1$  o conjunto de agentes em circuitos

Execute as trocas de casas dos circuitos em  $N_1$

**Repita:** novo grafo com agentes de  $N \setminus N_1$ , e arco de  $i$  para  $j$  se a casa de  $j$  é a favorita de  $i$  em  $N \setminus N_1$

Pare quando não sobram mais vértices



# Núcleo

**Teorema:** O núcleo do problema da alocação de casas consiste exatamente de uma alocação

**Prova:** Vamos mostrar que se uma alocação está no núcleo ela precisa ser a devolvida pelo algoritmo TTC

Alocação em que  $i \in N_1$  não recebe sua casa favorita tem  $N_1$  como coalizão bloqueadora

Assim, qualquer alocação no núcleo dá para  $i \in N_1$  sua casa favorita da mesma forma que o algoritmo

Qualquer alocação no núcleo precisa dar a casa favorita em  $N \setminus N_1$  para um agente em  $N_2$

- se der uma casa melhor,  $N_1$  é coalizão bloqueadora
- se der uma casa pior,  $N_2$  é coalizão bloqueadora

Qualquer alocação no núcleo precisa dar a casa favorita em  $N \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} N_i$  para um agente em  $N_k$

# Núcleo

Ou seja, se existe uma alocação no núcleo, ela precisa ser igual a alocação encontrada pelo algoritmo TTC

Mas será que a alocação  $a$  do algoritmo está no núcleo?

Suponha que não e seja  $S$  é uma coalizão bloqueadora para  $a$

- Existe  $z$  em  $A(S)$  tal que:
  - ▶ existe  $j \in S$  com  $z_j \succ_j a_j$
  - ▶ para todo  $i \neq j$  em  $S$ , ou  $z_i \succ_i a_i$  ou  $z_i = a_i$

Escolha  $j \in N_k$  com  $z_j \succ_j a_j$  e  $k$  mínimo

- Isto é,  $z_i = a_i$  para todo  $i \in N_r \cap S$  com  $r < k$

# Núcleo

Escolha  $j \in N_k$  com  $z_j \succ_j a_j$  e  $k$  mínimo

- Isto é,  $z_i = a_i$  para todo  $i \in N_r \cap S$  com  $r < k$

Como  $j$  não ficou com a casa  $z_j$ , ela foi alocada antes do turno  $k$  (caso contrário,  $j$  apontaria para  $z_j$  no turno  $k$  e não para  $a_j$ )

Assim,  $z_j \in N_r \cap S$  e  $z_j$  recebe a mesma casa em  $a$  e em  $z$

- Isto é, a casa para qual  $z_j$  aponta no circuito do passo  $r$  também está em  $S$
- De fato, cada um dos elementos desse circuito precisam estar em  $S$
- Em particular, o que apontava para  $z_j$ 
  - ▶ ele não pode ter piorado e, pela escolha de  $k$ , não melhorou, então ainda leva  $z_j$
  - ▶ contradição com o fato que  $j$  leva  $z_j$

# TTC é à prova de estratégia

**Teorema:** O mecanismo TTC é à prova de estratégia

**Prova:** Seja

- $\pi$ : as reais preferências do agentes
- $a$ : alocação devolvida pelo TTC com entrada  $\pi$
- $\pi'$ : preferências quando um agente  $j \in N_k$  mente
- $a'$ : alocação devolvida pelo TTC com entrada  $\pi'$

Se o TTC não é à prova de estratégia, então  $a'_j \succ_j a_j$

Como  $j$ , só faz parte de um circuito no turno  $k$

- $a_i = a'_i$  para todo  $i \in \bigcup_{r=1}^{k-1} N_r$
- e  $a'_j \in N \setminus \bigcup_{r=1}^{k-1} N_r$

Mas, o algoritmo dá para  $j$  a melhor casa de  $N \setminus \bigcup_{r=1}^{k-1} N_r$

# Casamentos estáveis

Temos:

- $H$ : conjunto de homens
- $M$ : conjunto de mulheres
- Cada homem tem uma ordem de preferência sobre  $M$
- Cada mulher tem uma ordem de preferência sobre  $H$
- Adicione homem/mulher fictício para representar a possibilidade de ficar solteiro

Assim  $|H| = |M|$

Emparelhamento de  $H$  em  $M$ : alocação de homens a mulheres

## Casamentos estáveis

Um emparelhamento é instável se existem homens  $h$  e  $h'$  e mulheres  $m$  e  $m'$  tais que

- $m$  é emparelhada com  $h$
- $m'$  é emparelhada com  $h'$
- mas  $m' \succ_h m$
- e  $h \succ_{m'} h'$

Neste caso,  $h$  e  $m'$  preferiam se casar um com o outro

O par  $(h, m')$  é um par bloqueador

Um emparelhamento é estável se não tem par bloqueador

# Casamentos estáveis: exemplo

Ordens de preferências para  $n = 3$ :

$\succ_{h_1}$	$\succ_{h_2}$	$\succ_{h_3}$	$\succ_{m_1}$	$\succ_{m_2}$	$\succ_{m_3}$
$m_2$	$m_1$	$m_1$	$h_1$	$h_3$	$h_1$
$m_1$	$m_3$	$m_2$	$h_3$	$h_1$	$h_3$
$m_3$	$m_2$	$m_3$	$h_2$	$h_2$	$h_2$

O emparelhamento  $\{(h_1, m_1), (h_2, m_2), (h_3, m_3)\}$  é instável, pois  $(h_1, m_2)$  é um par bloqueador

Já o emparelhamento  $\{(h_1, m_1), (h_2, m_3), (h_3, m_2)\}$  é estável

Dada as listas de preferências de todos, existe emparelhamento estável?

- Como encontrá-lo, se existe?

# Algoritmo da aceitação postergada

Versão com proposta masculina

Primeira rodada:

- Cada homem propõe à primeira mulher de sua lista
- Cada mulher que recebeu mais de uma proposta recusa todas, exceto a do homem preferido entre os candidatos
  - ▶ Para esse, posterga a sua resposta

Nova rodada:

- Cada homem que teve sua proposta recusada propõe à próxima mulher de sua lista
- Cada mulher com mais de uma proposta recusa todas, exceto a do homem preferido entre os candidatos
  - ▶ Eventualmente recusa proposta recebida em rodada anterior

O processo termina em não mais que  $n^2$  rodadas



## Algoritmo no exemplo

$\succ_{h_1}$	$\succ_{h_2}$	$\succ_{h_3}$	$\succ_{m_1}$	$\succ_{m_2}$	$\succ_{m_3}$
$m_2$	$m_1$	$m_1$	$h_1$	$h_3$	$h_1$
$m_1$	$m_3$	$m_2$	$h_3$	$h_1$	$h_3$
$m_3$	$m_2$	$m_3$	$h_2$	$h_2$	$h_2$

Rodada 1:

$m_1$ :  $h_2$   $h_3$

$m_2$ :  $h_1$

$m_3$ :

Rodada 2:

$m_1$ :  $h_2$   ~~$h_2$~~   $h_3$

$m_2$ :  $h_1$

$m_3$ :  $h_2$

Emparelhamento produzido:  $\{(h_1, m_2), (h_2, m_3), (h_3, m_1)\}$

# Estabilidade do emparelhamento

**Teorema.** O emparelhamento produzido pelo algoritmo da aceitação postergada é estável

**Prova:** Suponha que existe um par bloqueador  $(h_1, m_1)$

- onde  $h_1$  está emparelhado com  $m_2$
- e  $m_1$  está emparelhado com  $h_2$

Então:

- como  $m_1 \succ_{h_1} m_2$ ,  $h_1$  propôs para  $m_1$  antes de propor para  $m_2$
- como  $h_1$  ficou com  $m_2$ ,  $m_1$  trocou  $h_1$  por um homem melhor
- então  $h_2 \succ_{m_1} h_1$

ou seja,  $(h_1, m_1)$  não é um par bloqueador

# Núcleo

Num emparelhamento estável um par  $(h, m)$  não podem melhorar sozinhos

- Nenhum  $(h, m)$  prefere sair do mecanismo e se casar

E se considerarmos um grupo que sai do mecanismo?

Um emparelhamento  $\nu$  domina um emparelhamento  $\mu$  se existe  $S \subseteq H \cup M$  tal que para todo  $h$  e  $m$  em  $S$ , temos

- $\nu(h)$  e  $\nu(m)$  pertencem a  $S$
- $\nu(h) \succ_h \mu(h)$  e  $\nu(m) \succ_m \mu(m)$

Um emparelhamento  $\mu$  está no núcleo se e somente se não existe emparelhamento  $\nu$  que o domina

**Teorema.** O núcleo do jogo de emparelhamento é o conjunto de todos os emparelhamentos estáveis

# Estabilidade do emparelhamento

No exemplo, aplicando a versão da proposta feminina, obtemos o emparelhamento  $\{(h_1, m_1), (h_2, m_3), (h_3, m_2)\}$ .

$\succ_{h_1}$	$\succ_{h_2}$	$\succ_{h_3}$	$\succ_{m_1}$	$\succ_{m_2}$	$\succ_{m_3}$
$m_2$	$m_1$	$m_1$	$h_1$	$h_3$	$h_1$
$m_1$	$m_3$	$m_2$	$h_3$	$h_1$	$h_3$
$m_3$	$m_2$	$m_3$	$h_2$	$h_2$	$h_2$

Diferente do obtido pela proposta masculina!

Há alguma diferença significativa entre estes emparelhamentos?

# Emparelhamentos ótimos

Emparelhamento  $\nu$  é ótimo-masculino se não há emparelhamento estável  $\mu$  tal que existe  $j$  em  $H$  com  $\mu(j) \succ_j \nu(j)$  e para todo  $h$  em  $H$ ,  $\mu(h) \succ_h \nu(h)$  ou  $\mu(h) = \nu(h)$

Definição de emparelhamento ótimo-feminino é análoga

# Emparelhamentos ótimos

**Teorema:** O algoritmo da aceitação postergada com proposta masculina produz um emparelhamento ótimo-masculino

**Prova:** Seja  $\mu$  o emparelhamento encontrado pelo algoritmo e suponha que  $\mu$  não é ótimo-masculino

Existe emparelhamento estável  $\nu$  tal que existe  $j$  em  $H$  com  $\nu(j) \succ_j \mu(j)$  e para todo  $h$  em  $H$ ,  $\nu(h) \succ_h \mu(h)$  ou  $\nu(h) = \mu(h)$

- $j$  propôs primeiro para  $\nu(j)$  e foi rejeitado
- escolha  $j$  como o primeiro homem que foi rejeitado pela mulher  $\nu(j)$

# Emparelhamentos ótimos

- $j$ : primeiro homem que foi rejeitado pela mulher  $\nu(j)$
- $\nu(j) \succ_j \mu(j)$

Então:

- $\nu(j)$  recebe uma proposta de um homem  $i$  que ela prefere
- $i$  prefere a mulher  $\nu(j)$  à mulher  $\nu(i)$ 
  - ▶ caso contrário,  $i$  já teria sido rejeitado por  $\nu(i)$  e não teríamos escolhido  $j$
- portanto,  $i \succ_{\nu(j)} j$  e  $\nu(j) \succ_i \nu(i)$ 
  - ▶  $\nu$  não é estável

## À prova de estratégia

**Teorema.** O algoritmo da aceitação postergada com proposta masculina é um mecanismo à prova de estratégia para os homens.

**Prova:**

- $\pi = (\succ_{h_1}, \succ_{h_2}, \dots, \succ_{h_n})$
- $\mu$ : emparelhamento encontrado pelo algoritmo com preferências masculinas  $\pi$
- suponha que homem  $h_1$  mente trocando  $\succ_{h_1}$  por  $\succ_*$
- $\pi^1 = (\succ_*, \succ_{h_2}, \dots, \succ_{h_n})$
- $\nu$ : emparelhamento encontrado pelo algoritmo com preferências masculinas  $\pi^1$

Vamos mostrar que, se  $\nu(h_1) \succ_{h_1} \mu(h_1)$  então  $\nu$  não é estável



## À prova de estratégia

$$\pi = (\succ_{h_1}, \dots)$$

$$\pi \rightarrow \mu$$

$$\pi^1 = (\succ_*, \dots)$$

$$\pi^1 \rightarrow \nu$$

Seja  $R = \{h : \nu(h) \succ_h \mu(h)\}$ , vamos mostrar que para  $h \in R$  onde  $m = \nu(h)$  e  $h' = \mu(m)$ ,  $h'$  pertence a  $R$

- Se  $h' = h_1$ , nada a fazer (já supomos que  $h_1 \in R$ )
- Caso contrário, como  $m \succ_h \mu(h)$  a estabilidade de  $\mu$  implica que  $h' \succ_m h$
- a estabilidade de  $\nu$  para  $\pi^1$  implica que  $\nu(h') \succ_{h'} m$
- portanto  $h' \in R$
- podemos definir  $S = \{m : \nu(h) \in R\} = \{m : \mu(h) \in R\}$

## À prova de estratégia

$$\pi = (\succ_{h_1}, \dots)$$

$$\pi \rightarrow \mu$$

$$\pi^1 = (\succ_*, \dots)$$

$$\pi^1 \rightarrow \nu$$

$$R = \{h: \nu(h) \succ_h \mu(h)\}$$

$$S = \{m: \nu(h) \in R\} = \{m: \mu(h) \in R\}$$

$$\mu(m) \succ_m \nu(m) \text{ para todo } m \in S$$

Seja  $h$  o último homem em  $R$  a fazer uma proposta:

- proposta é feita para  $m = \mu(m) \in S$  que rejeitou  $\nu(m)$  em alguma iteração anterior
- quando  $h$  propõe para  $m$ , ela rejeita uma proposta de algum  $h' \notin R$  tal que  $h' \succ_m \nu(m)$
- Como  $h' \notin R$ , temos que  $m \succ_{h'} \mu(h') \succeq_{h'} \nu(h')$
- Como  $h' \neq h_1$ ,  $(h', m)$  é um par bloqueador para  $\nu$  em  $\pi^1$

## À prova de estratégia (?)

Vimos que o algoritmo da aceitação postergada com proposta masculina é à prova de estratégia para os homens

E para as mulheres?

Voltamos ao exemplo...

## Algoritmo no exemplo

$\succ_{h_1}$	$\succ_{h_2}$	$\succ_{h_3}$	$\succ_{m_1}$	$\succ_{m_2}$	$\succ_{m_3}$
$m_2$	$m_1$	$m_1$	$h_1$	$h_3$	$h_1$
$m_1$	$m_3$	$m_2$	$h_3$	$h_1$	$h_3$
$m_3$	$m_2$	$m_3$	$h_2$	$h_2$	$h_2$

Rodada 1:

$m_1$ :  $h_2$   $h_3$

$m_2$ :  $h_1$

$m_3$ :

Rodada 2:

$m_1$ :  $h_2$   ~~$h_2$~~   $h_3$

$m_2$ :  $h_1$

$m_3$ :  $h_2$

Emparelhamento produzido:  $\{(h_1, m_2), (h_2, m_3), (h_3, m_1)\}$

## Algoritmo no exemplo

$\succ_{h_1}$	$\succ_{h_2}$	$\succ_{h_3}$	$\succ_{m_1}$	$\succ_{m_2}$	$\succ_{m_3}$
$m_2$	$m_1$	$m_1$	$h_1$	$h_3$	$h_1$
$m_1$	$m_3$	$m_2$	$h_3$	$h_1$	$h_3$
$m_3$	$m_2$	$m_3$	$h_2$	$h_2$	$h_2$

Rodada 1:

$m_1$ :  $h_2$   $h_3$

$m_2$ :  $h_1$

$m_3$ :

Rodada 2:

$m_1$ :  $h_2$   $h_3$   ~~$h_3$~~

$m_2$ :  $h_1$   $h_3$

$m_3$ :

Rodada 3:

$m_1$ :  $h_2$   ~~$h_3$~~   $h_1$

# Problema das admissões em universidades

No problema das admissões em universidades:

- Temos um conjunto  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  de universidades
  - ▶ Cada universidade  $c_i$  tem uma quota  $q_i$
- e temos um conjunto  $S = \{s_1, \dots, s_m\}$  de alunos
- Cada aluno tem uma ordem de preferência sobre as universidades
- Cada universidade  $c_i$  tem uma ordem de preferência sobre os subconjuntos de alunos de tamanho  $q_i$

# Problema da admissão em universidades

**Roth'85:** *The college admissions problem is not equivalent to the marriage problem*

Para o problema do casamento estável vale que

- não existe alocação instável que todos os homens preferem a alocação ótima-masculina
- existe mecanismo à prova de estratégia para os homens

Esses resultados não valem para o problema das admissões em universidades

A dificuldade reside no fato que as universidades têm preferências sobre subconjuntos de alunos

## Suplementar vs. Complementar

Se considerarmos que os alunos seguem uma complementariedade:

- Isto é, as preferências das universidades não são sobre subconjuntos
- mas sim de uma preferência sobre os alunos

Então, o problema é equivalente ao problema do casamento estável

- basta dividir uma universidade com cota  $q_i$
- em  $q_i$  universidades de cota 1



## Suplementar vs. Complementar

Porém, existem situações onde complementariedade existe:

- Casais de médicos em programas de residência
- Casais de crianças em programas de adoção

Ou seja, nem sempre é possível usar o algoritmo da proposta postergada