MO829
Tópicos em Teoria da Computação
Teoria dos Jogos Algorítmica

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2017

Leilões Combinatórios

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático
- Como do ponto de vista teórico

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático
- Como do ponto de vista teórico

Leilões existem desde a antiguidade e são usados para vender:

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático
- Como do ponto de vista teórico

Leilões existem desde a antiguidade e são usados para vender:

- Objetos de arte

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático
- Como do ponto de vista teórico

Leilões existem desde a antiguidade e são usados para vender:

- Objetos de arte
- Commodities

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático
- Como do ponto de vista teórico

Leilões existem desde a antiguidade e são usados para vender:

- Objetos de arte
- Commodities
- Transferir bens públicos para empresas privadas

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático
- Como do ponto de vista teórico

Leilões existem desde a antiguidade e são usados para vender:

- Objetos de arte
- Commodities
- Transferir bens públicos para empresas privadas
- Direitos de utilização de recursos naturais

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático
- Como do ponto de vista teórico

Leilões existem desde a antiguidade e são usados para vender:

- Objetos de arte
- Commodities
- Transferir bens públicos para empresas privadas
- Direitos de utilização de recursos naturais
- etc...

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilões de carta fechada de primeiro preço:

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilões de carta fechada de primeiro preço:

- Cada comprador submete apenas um lance

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilões de carta fechada de primeiro preço:

- Cada comprador submete apenas um lance
- O comprador que der o maior lance ganha

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilões de carta fechada de primeiro preço:

- Cada comprador submete apenas um lance
- O comprador que der o maior lance ganha
- O vencedor paga o seu lance

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilões de carta fechada de primeiro preço:

- Cada comprador submete apenas um lance
- O comprador que der o maior lance ganha
- O vencedor paga o seu lance

Leilões de carta fechada de segundo preço:

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilões de carta fechada de primeiro preço:

- Cada comprador submete apenas um lance
- O comprador que der o maior lance ganha
- O vencedor paga o seu lance

Leilões de carta fechada de segundo preço:

- O vencedor paga o segundo maior lance

Leilões de um único item

Leilão inglês:

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual
  - **Leilão de vela**: termina quando acaba o tempo

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual
  - Leilão de vela: termina quando acaba o tempo

O leilão inglês é parecido com o de segundo-preço

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual
  - Leilão de vela: termina quando acaba o tempo

O leilão inglês é parecido com o de segundo-preço

Leilão holandês:

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual
  - Leilão de vela: termina quando acaba o tempo

O leilão inglês é parecido com o de segundo-preço

Leilão holandês:

- O preço do item começa em um determinado valor

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual
  - Leilão de vela: termina quando acaba o tempo

O leilão inglês é parecido com o de segundo-preço

Leilão holandês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- O preço diminui conforme o tempo passa

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual
  - Leilão de vela: termina quando acaba o tempo

O leilão inglês é parecido com o de segundo-preço

Leilão holandês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- O preço diminui conforme o tempo passa
- O primeiro a manifestar interesse leva o item

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual
  - Leilão de vela: termina quando acaba o tempo

O leilão inglês é parecido com o de segundo-preço

Leilão holandês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- O preço diminui conforme o tempo passa
- O primeiro a manifestar interesse leva o item

O leilão holandês é parecido com o de primeiro-preço

Leilões Multi-unidade

Leilões multi-unidade:

Leilões Multi-unidade

Leilões multi-unidade:

- Queremos vender k itens idênticos

Leilões Multi-unidade

Leilões multi-unidade:

- Queremos vender k itens idênticos
- Cada comprador informa um lance para cada quantidade de itens

Leilões Multi-unidade

Leilões multi-unidade:

- Queremos vender k itens idênticos
- Cada comprador informa um lance para cada quantidade de itens
- Preços uniformes: cada item tem o mesmo preço

Leilões Multi-unidade

Leilões multi-unidade:

- Queremos vender k itens idênticos
- Cada comprador informa um lance para cada quantidade de itens
- Preços uniformes: cada item tem o mesmo preço
- Preços discriminatórios: podemos vender os itens por preços diferentes

Leilões Multi-unidade

Leilões multi-unidade:

- Queremos vender k itens idênticos
- Cada comprador informa um lance para cada quantidade de itens
- Preços uniformes: cada item tem o mesmo preço
- Preços discriminatórios: podemos vender os itens por preços diferentes

Leilões de bens digitais:

Leilões Multi-unidade

Leilões multi-unidade:

- Queremos vender k itens idênticos
- Cada comprador informa um lance para cada quantidade de itens
- Preços uniformes: cada item tem o mesmo preço
- Preços discriminatórios: podemos vender os itens por preços diferentes

Leilões de bens digitais:

- Temos infinitas cópias do mesmo item

Leilões Multi-unidade

Leilões multi-unidade:

- Queremos vender k itens idênticos
- Cada comprador informa um lance para cada quantidade de itens
- Preços uniformes: cada item tem o mesmo preço
- Preços discriminatórios: podemos vender os itens por preços diferentes

Leilões de bens digitais:

- Temos infinitas cópias do mesmo item
- Cada comprador deseja comprar uma cópia

Leilões Multi-unidade

Leilões multi-unidade:

- Queremos vender k itens idênticos
- Cada comprador informa um lance para cada quantidade de itens
- Preços uniformes: cada item tem o mesmo preço
- Preços discriminatórios: podemos vender os itens por preços diferentes

Leilões de bens digitais:

- Temos infinitas cópias do mesmo item
- Cada comprador deseja comprar uma cópia
- Preços uniformes ou discriminatórios

Leilões de demanda unitária

Leilões de demanda unitária:

Leilões de demanda unitária

Leilões de demanda unitária:

- Queremos vender vários itens diferentes

Leilões de demanda unitária

Leilões de demanda unitária:

- Queremos vender vários itens diferentes
- Mas cada comprador quer comprar apenas um item

Leilões de demanda unitária

Leilões de demanda unitária:

- Queremos vender vários itens diferentes
- Mas cada comprador quer comprar apenas um item
- Cada comprador submete um lance para cada item

Leilões de demanda unitária

Leilões de demanda unitária:

- Queremos vender vários itens diferentes
- Mas cada comprador quer comprar apenas um item
- Cada comprador submete um lance para cada item
- Oferta única: Um item pode ser vendido apenas para um comprador

Leilões de demanda unitária

Leilões de demanda unitária:

- Queremos vender vários itens diferentes
- Mas cada comprador quer comprar apenas um item
- Cada comprador submete um lance para cada item
- Oferta única: Um item pode ser vendido apenas para um comprador
- Oferta limitada: Um item pode ser vendido um número de vezes

Leilões de demanda unitária

Leilões de demanda unitária:

- Queremos vender vários itens diferentes
- Mas cada comprador quer comprar apenas um item
- Cada comprador submete um lance para cada item
- Oferta única: Um item pode ser vendido apenas para um comprador
- Oferta limitada: Um item pode ser vendido um número de vezes
- Oferta ilimitada: Um item pode ser vendido inúmeras vezes

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores
- Queremos vender m itens

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores
- Queremos vender m itens

Valorações:

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores
- Queremos vender m itens

Valorações:

- para cada comprador i e cada conjunto S de itens, temos um valor $v_i(S)$

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores
- Queremos vender m itens

Valorações:

- para cada comprador i e cada conjunto S de itens, temos um valor $v_i(S)$

Restrições:

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores
- Queremos vender m itens

Valorações:

- para cada comprador i e cada conjunto S de itens, temos um valor $v_i(S)$

Restrições:

- Free-disposal: $v_i(S) \leq v_i(T)$ para todo $S \subseteq T$ e todo i

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores
- Queremos vender m itens

Valorações:

- para cada comprador i e cada conjunto S de itens, temos um valor $v_i(S)$

Restrições:

- Free-disposal: $v_i(S) \leq v_i(T)$ para todo $S \subseteq T$ e todo i
- Normalização: $v_i(\emptyset) = 0$ para todo i

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores
- Queremos vender m itens

Valorações:

- para cada comprador i e cada conjunto S de itens, temos um valor $v_i(S)$

Restrições:

- Free-disposal: $v_i(S) \leq v_i(T)$ para todo $S \subseteq T$ e todo i
- Normalização: $v_i(\emptyset) = 0$ para todo i

As valorações são informações privadas

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores
- Queremos vender m itens

Valorações:

- para cada comprador i e cada conjunto S de itens, temos um valor $v_i(S)$

Restrições:

- Free-disposal: $v_i(S) \leq v_i(T)$ para todo $S \subseteq T$ e todo i
- Normalização: $v_i(\emptyset) = 0$ para todo i

As valorações são informações privadas

- Os compradores podem mentir ao relatar as valorações...

Leilões combinatórios

Alocação:

Leilões combinatórios

Alocação:

- Conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ de itens tais que $S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$

Leilões combinatórios

Alocação:

- Conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ de itens tais que $S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$

Bem-estar social: $\sum_{i=1}^{n} v_i(S_i)$

Leilões combinatórios

Alocação:

- Conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ de itens tais que $S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$

Bem-estar social: $\sum_{i=1}^{n} v_i(S_i)$

Uma alocação é socialmente eficiente se ela maximiza o bem-estar social

Leilões combinatórios

Alocação:

- Conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ de itens tais que $S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$

Bem-estar social: $\sum_{i=1}^{n} v_i(S_i)$

Uma alocação é socialmente eficiente se ela maximiza o bem-estar social

Idealmente, queremos métodos eficientes e à prova de estratégia para maximizar o bem-estar social

Formulação linear inteira

Variáveis binárias: $x_{i,S} = 1$ se e somente se comprador i recebe o subconjunto S

Formulação linear inteira

Variáveis binárias: $x_{i,S} = 1$ se e somente se comprador i recebe o subconjunto S

$$\begin{array}{llcll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} v_i(S) & & & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m] : j \in S} x_{i,S} & \leq & 1 & \forall j \in [m] \\
& \displaystyle\sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} & \leq & 1 & \forall i \in [n] \\
& x_{i,S} & \in & \{0,1\} & \forall i \in [n], \forall S \subseteq [m]
\end{array}$$

Relaxação linear inteira

Relaxamos a restrição de integralidade em $x_{i,S}$

Relaxação linear inteira

Relaxamos a restrição de integralidade em $x_{i,S}$

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} v_i(S) & & & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m] : j \in S} x_{i,S} & \leq & 1 & \forall j \in [m] \\
& \displaystyle\sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} & \leq & 1 & \forall i \in [n] \\
& x_{i,S} & \geq & 0 & \forall i \in [n], \forall S \subseteq [m]
\end{array}
$$

Relaxação linear inteira

Relaxamos a restrição de integralidade em $x_{i,S}$

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} v_i(S) & & & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m] : j \in S} x_{i,S} & \leq & 1 & \forall j \in [m] \\
& \displaystyle\sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} & \leq & 1 & \forall i \in [n] \\
& x_{i,S} & \geq & 0 & \forall i \in [n], \forall S \subseteq [m]
\end{array}
$$

Como é o dual deste LP?

Dual

$$\begin{array}{llcll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{i\in[n]} u_i + \sum_{j\in[m]} p_j & & & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle u_i + \sum_{j\in S} p_j & \geq & v_i(S) & \forall i \in [n], \forall S \subseteq [m] \\
 & u_i & \geq & 0 & \forall i \in [n] \\
 & p_j & \geq & 0 & \forall j \in [m]
\end{array}$$

Dual

$$\begin{array}{lrcll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{i \in [n]} u_i + \sum_{j \in [m]} p_j & & & \\ \text{sujeito a} & \displaystyle u_i + \sum_{j \in S} p_j & \geq & v_i(S) & \forall i \in [n], \forall S \subseteq [m] \\ & u_i & \geq & 0 & \forall i \in [n] \\ & p_j & \geq & 0 & \forall j \in [m] \end{array}$$

Por folgas complementares, se $x_{i,S} > 0$, então:

Dual

$$
\begin{array}{llcll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{i\in[n]} u_i + \sum_{j\in[m]} p_j & & & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle u_i + \sum_{j\in S} p_j & \geq & v_i(S) & \forall i \in [n], \forall S \subseteq [m] \\
& u_i & \geq & 0 & \forall i \in [n] \\
& p_j & \geq & 0 & \forall j \in [m]
\end{array}
$$

Por folgas complementares, se $x_{i,S} > 0$, então:

- $u_i = v_i(S) - \sum_{j\in S} p_j$

Dual

$$\begin{array}{lrcll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{i\in[n]} u_i + \sum_{j\in[m]} p_j & & & \\ \text{sujeito a} & \displaystyle u_i + \sum_{j\in S} p_j & \geq & v_i(S) & \forall i \in [n], \forall S \subseteq [m] \\ & u_i & \geq & 0 & \forall i \in [n] \\ & p_j & \geq & 0 & \forall j \in [m] \end{array}$$

Por folgas complementares, se $x_{i,S} > 0$, então:

- $u_i = v_i(S) - \sum_{j\in S} p_j$

Interpretação do dual:

Dual

$$\begin{array}{llcll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{i\in[n]} u_i + \sum_{j\in[m]} p_j & & & \\ \text{sujeito a} & \displaystyle u_i + \sum_{j\in S} p_j & \geq & v_i(S) & \forall i \in [n], \forall S \subseteq [m] \\ & u_i & \geq & 0 & \forall i \in [n] \\ & p_j & \geq & 0 & \forall j \in [m] \end{array}$$

Por folgas complementares, se $x_{i,S} > 0$, então:

- $u_i = v_i(S) - \sum_{j\in S} p_j$

Interpretação do dual:

- p_j é o preço do item j

Dual

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{minimize} & \multicolumn{4}{l}{\sum_{i \in [n]} u_i + \sum_{j \in [m]} p_j} \\
\text{sujeito a} & u_i + \sum_{j \in S} p_j & \geq & v_i(S) & \forall i \in [n], \forall S \subseteq [m] \\
 & u_i & \geq & 0 & \forall i \in [n] \\
 & p_j & \geq & 0 & \forall j \in [m]
\end{array}
$$

Por folgas complementares, se $x_{i,S} > 0$, então:

- $u_i = v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j$

Interpretação do dual:

- p_j é o preço do item j
- u_i é a utilidade do comprador i

Demanda

Dados preços $p_1, \ldots, p_m$ para os itens, uma demanda para o comprador i é um conjunto $S \subseteq [m]$ que maximize sua utilidade

Demanda

Dados preços $p_1, \ldots, p_m$ para os itens, uma demanda para o comprador i é um conjunto $S \subseteq [m]$ que maximize sua utilidade

A utilidade de i para S é $u_i(S) = v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j$

Demanda

Dados preços $p_1, \ldots, p_m$ para os itens, uma demanda para o comprador i é um conjunto $S \subseteq [m]$ que maximize sua utilidade

A utilidade de i para S é $u_i(S) = v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j$

Ou seja, uma demanda é um conjunto S tal que

Demanda

Dados preços $p_1, \ldots, p_m$ para os itens, uma demanda para o comprador i é um conjunto $S \subseteq [m]$ que maximize sua utilidade

A utilidade de i para S é $u_i(S) = v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j$

Ou seja, uma demanda é um conjunto S tal que

$$u_i(S) \; = \; v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j \; \geq \; v_i(S') - \sum_{j \in S'} p_j,$$

Demanda

Dados preços $p_1, \ldots, p_m$ para os itens, uma demanda para o comprador i é um conjunto $S \subseteq [m]$ que maximize sua utilidade

A utilidade de i para S é $u_i(S) = v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j$

Ou seja, uma demanda é um conjunto S tal que

$$u_i(S) \; = \; v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j \; \geq \; v_i(S') - \sum_{j \in S'} p_j,$$

para qualquer $S' \subseteq [m]$

Equilíbrio Walrasiano

Um conjunto de preços não negativos $p_1^*, \ldots, p_n^*$ e uma alocação $S_1^*, \ldots, S_n^*$ são um equilíbrio Walrasiano se:

Equilíbrio Walrasiano

Um conjunto de preços não negativos $p_1^*, \ldots, p_n^*$ e uma alocação $S_1^*, \ldots, S_n^*$ são um equilíbrio Walrasiano se:

- para todo comprador i, S_i^* é uma demanda para i

Equilíbrio Walrasiano

Um conjunto de preços não negativos $p_1^*, \ldots, p_n^*$ e uma alocação $S_1^*, \ldots, S_n^*$ são um equilíbrio Walrasiano se:

- para todo comprador i, S_i^* é uma demanda para i
- para todo item j não alocado, $p_j^* = 0$

Equilíbrio Walrasiano

Um conjunto de preços não negativos $p_1^*, \ldots, p_n^*$ e uma alocação $S_1^*, \ldots, S_n^*$ são um equilíbrio Walrasiano se:

- para todo comprador i, S_i^* é uma demanda para i
- para todo item j não alocado, $p_j^* = 0$

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é economicamente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Equilíbrio Walrasiano

Um conjunto de preços não negativos $p_1^*, \ldots, p_n^*$ e uma alocação $S_1^*, \ldots, S_n^*$ são um equilíbrio Walrasiano se:

- para todo comprador i, S_i^* é uma demanda para i
- para todo item j não alocado, $p_j^* = 0$

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é economicamente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Segundo Teorema do Bem-Estar Social: Se existe solução inteira ótima para o LP, então ela corresponde a um equilíbrio Walrasiano

Equilíbrio Walrasiano

Um conjunto de preços não negativos $p_1^*, \ldots, p_n^*$ e uma alocação $S_1^*, \ldots, S_n^*$ são um equilíbrio Walrasiano se:

- para todo comprador i, S_i^* é uma demanda para i
- para todo item j não alocado, $p_j^* = 0$

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é economicamente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Segundo Teorema do Bem-Estar Social: Se existe solução inteira ótima para o LP, então ela corresponde a um equilíbrio Walrasiano

Corolário: Um equilíbrio Walrasiano existe se e somente se o LP tem solução inteira

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social

Teorema: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é economicamente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social

Teorema: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é economicamente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Prova: Cada comprador recebe sua demanda em um equilíbrio Walrasiano:

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social

Teorema: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é economicamente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Prova: Cada comprador recebe sua demanda em um equilíbrio Walrasiano:

- $v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^* \geq v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j^*$ para todo S

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social

Teorema: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é economicamente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Prova: Cada comprador recebe sua demanda em um equilíbrio Walrasiano:

- $v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^* \geq v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j^*$ para todo S

Toda solução X (fracionária) do LP satisfaz

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social

Teorema: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é economicamente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Prova: Cada comprador recebe sua demanda em um equilíbrio Walrasiano:

- $v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^* \geq v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j^*$ para todo S

Toda solução X (fracionária) do LP satisfaz

- $\sum_{S \subseteq M} X_{i,S}^* \leq 1$ para todo comprador i

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social

Teorema: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é economicamente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Prova: Cada comprador recebe sua demanda em um equilíbrio Walrasiano:

- $v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^* \geq v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j^*$ para todo S

Toda solução X (fracionária) do LP satisfaz

- $\sum_{S \subseteq M} X_{i,S}^* \leq 1$ para todo comprador i

Portanto,

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social

Teorema: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é economicamente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Prova: Cada comprador recebe sua demanda em um equilíbrio Walrasiano:

- $v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^* \geq v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j^*$ para todo S

Toda solução X (fracionária) do LP satisfaz

- $\sum_{S \subseteq M} X_{i,S}^* \leq 1$ para todo comprador i

Portanto,

$$v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^* \geq \sum_{S \subseteq M} X_{i,S}^* \left(v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j^* \right)$$

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social

Somando para todos os compradores:

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social

Somando para todos os compradores:

$$\sum_{i \in N} \left(v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^* \right) \geq \sum_{i \in N} \left(\sum_{S \subseteq M} X_{i,S}^* \left(v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j^* \right) \right)$$

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social

Somando para todos os compradores:

$$\sum_{i \in N} \left(v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^* \right) \geq \sum_{i \in N} \left(\sum_{S \subseteq M} X_{i,S}^* \left(v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j^* \right) \right)$$

Portanto,

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social

Somando para todos os compradores:

$$\sum_{i \in N} \left(v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^* \right) \geq \sum_{i \in N} \left(\sum_{S \subseteq M} X_{i,S}^* \left(v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j^* \right) \right)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} v_i(S_i^*) - \sum_{j \in M} p_j^* &\geq \sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq M} X_{i,S}^* v_i(S) - \sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq M} X_{i,S}^* \sum_{j \in S} p_j^* \\ &\geq \sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq M} X_{i,S}^* v_i(S) - \sum_{j \in M} p_j^* \end{aligned}$$

pois $\sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq [m] : j \in S} X_{i,S}^* \leq 1$

Segundo Teorema do Bem-Estar Social

Teorema: Se existe solução inteira ótima para o LP, então ela corresponde a um equilíbrio Walrasiano

Segundo Teorema do Bem-Estar Social

Teorema: Se existe solução inteira ótima para o LP, então ela corresponde a um equilíbrio Walrasiano

Prova: Considere os conjuntos $S_1^*, S_2^*, \ldots, S_n^*$ dados por uma solução inteira ótima e variáveis p^* e u^* de uma solução dual ótima

Segundo Teorema do Bem-Estar Social

Teorema: Se existe solução inteira ótima para o LP, então ela corresponde a um equilíbrio Walrasiano

Prova: Considere os conjuntos $S_1^*, S_2^*, \ldots, S_n^*$ dados por uma solução inteira ótima e variáveis p^* e u^* de uma solução dual ótima

Por folgas complementares, como $x_{i,S_i^*} > 0$, temos que

Segundo Teorema do Bem-Estar Social

Teorema: Se existe solução inteira ótima para o LP, então ela corresponde a um equilíbrio Walrasiano

Prova: Considere os conjuntos $S_1^*, S_2^*, \ldots, S_n^*$ dados por uma solução inteira ótima e variáveis p^* e u^* de uma solução dual ótima

Por folgas complementares, como $x_{i,S_i^*} > 0$, temos que

$$u_i^* = v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^*$$

Segundo Teorema do Bem-Estar Social

Teorema: Se existe solução inteira ótima para o LP, então ela corresponde a um equilíbrio Walrasiano

Prova: Considere os conjuntos $S_1^*, S_2^*, \ldots, S_n^*$ dados por uma solução inteira ótima e variáveis p^* e u^* de uma solução dual ótima

Por folgas complementares, como $x_{i,S_i^*} > 0$, temos que

$$u_i^* = v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^*$$

I.e., para todo S, $v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^* \geq v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j^*$

Segundo Teorema do Bem-Estar Social

Teorema: Se existe solução inteira ótima para o LP, então ela corresponde a um equilíbrio Walrasiano

Prova: Considere os conjuntos $S_1^*, S_2^*, \ldots, S_n^*$ dados por uma solução inteira ótima e variáveis p^* e u^* de uma solução dual ótima

Por folgas complementares, como $x_{i,S_i^*} > 0$, temos que

$$u_i^* = v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^*$$

I.e., para todo S, $v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^* \geq v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j^*$

Também por folgas complementares, se $\sum_{i=1}^n \sum_{S \subseteq [m] : j \in S} x_{i,S} < 1$, então $p_j^* = 0$

Equilíbrio Walrasiano

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é economicamente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Equilíbrio Walrasiano

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é economicamente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Segundo Teorema do Bem-Estar Social: Se existe solução inteira ótima para o LP, então ela corresponde a um equilíbrio Walrasiano

Equilíbrio Walrasiano

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é economicamente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Segundo Teorema do Bem-Estar Social: Se existe solução inteira ótima para o LP, então ela corresponde a um equilíbrio Walrasiano

Corolário: Um equilíbrio Walrasiano existe se e somente se o LP tem solução inteira

Equilíbrio Walrasiano

Exemplo onde não há equilíbrio Walrasiano:

Equilíbrio Walrasiano

Exemplo onde não há equilíbrio Walrasiano:

Dois itens, a e b, e dois compradores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

Equilíbrio Walrasiano

Exemplo onde não há equilíbrio Walrasiano:

Dois itens, a e b, e dois compradores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(\{a\})$	$v(\{b\})$	$v(\{a,b\})$
Alice	2	2	2
Bob	0	0	3

Equilíbrio Walrasiano

Exemplo onde não há equilíbrio Walrasiano:

Dois itens, a e b, e dois compradores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(\{a\})$	$v(\{b\})$	$v(\{a,b\})$
Alice	2	2	2
Bob	0	0	3

O ótimo é dar $\{a, b\}$ para Bob e deixar Alice sem nada

Equilíbrio Walrasiano

Exemplo onde não há equilíbrio Walrasiano:

Dois itens, a e b, e dois compradores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(\{a\})$	$v(\{b\})$	$v(\{a,b\})$
Alice	2	2	2
Bob	0	0	3

O ótimo é dar $\{a, b\}$ para Bob e deixar Alice sem nada

Mas o conjunto vazio só é uma demanda para Alice se os preços de a e b forem pelo menos 2

Equilíbrio Walrasiano

Exemplo onde não há equilíbrio Walrasiano:

Dois itens, a e b, e dois compradores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(\{a\})$	$v(\{b\})$	$v(\{a,b\})$
Alice	2	2	2
Bob	0	0	3

O ótimo é dar $\{a,b\}$ para Bob e deixar Alice sem nada

Mas o conjunto vazio só é uma demanda para Alice se os preços de a e b forem pelo menos 2

Neste caso porém o preço de $\{a,b\}$ seria pelo menos 4 e $\{a,b\}$ não seria uma demanda para Bob

Consultas

Uma grande quantidade de informação dos compradores:

Consultas

Uma grande quantidade de informação dos compradores:

- $n \times 2^m$ números para representar os $v_i(S)$

Consultas

Uma grande quantidade de informação dos compradores:

- $n \times 2^m$ números para representar os $v_i(S)$

Podemos pedir os números conforme o necessário, durante a execução do algoritmo

Consultas

Uma grande quantidade de informação dos compradores:

- $n \times 2^m$ números para representar os $v_i(S)$

Podemos pedir os números conforme o necessário, durante a execução do algoritmo

Consulta de valor: Dado um conjunto S, o comprador reporta o seu valor $v_i(S)$

Consultas

Uma grande quantidade de informação dos compradores:

- $n \times 2^m$ números para representar os $v_i(S)$

Podemos pedir os números conforme o necessário, durante a execução do algoritmo

Consulta de valor: Dado um conjunto S, o comprador reporta o seu valor $v_i(S)$

Consulta de demanda: Dados preços para os itens, o comprador reporta uma demanda para esses preços

Consultas

Lema: Uma consulta de valor pode ser simulada por mt consultas de demanda, onde t é o número de bits de precisão nas representações das valorações

Consultas

Lema: Uma consulta de valor pode ser simulada por mt consultas de demanda, onde t é o número de bits de precisão nas representações das valorações

Lema: Pode ser necessário realizar um número exponencial de consultas de valor para simular uma única consulta de demanda

Consultas

Lema: Uma consulta de valor pode ser simulada por mt consultas de demanda, onde t é o número de bits de precisão nas representações das valorações

Lema: Pode ser necessário realizar um número exponencial de consultas de valor para simular uma única consulta de demanda

Teorema: A relaxação linear do programa inteiro para o problema da alocação máxima pode ser resolvida em tempo polinomial usando consultas de demanda

Classes de Valorações

Valorações subaditivas: para todo S e T,
$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$

Classes de Valorações

Valorações subaditivas: para todo S e T, $v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$

Valorações submodulares: para todo $S \subseteq T$ e $x \notin T$, temos que $v(S \cup \{x\}) - v(S) \geq v(T \cup \{x\}) - v(T)$

Classes de Valorações

Valorações subaditivas: para todo S e T, $v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$

Valorações submodulares: para todo $S \subseteq T$ e $x \notin T$, temos que $v(S \cup \{x\}) - v(S) \geq v(T \cup \{x\}) - v(T)$

Valorações com substitutos:

Classes de Valorações

Valorações subaditivas: para todo S e T,
$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$

Valorações submodulares: para todo $S \subseteq T$ e $x \notin T$, temos que $v(S \cup \{x\}) - v(S) \geq v(T \cup \{x\}) - v(T)$

Valorações com substitutos:

- se A é uma demanda para preços p

Classes de Valorações

Valorações subaditivas: para todo S e T,
$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$

Valorações submodulares: para todo $S \subseteq T$ e $x \notin T$, temos que $v(S \cup \{x\}) - v(S) \geq v(T \cup \{x\}) - v(T)$

Valorações com substitutos:

- se A é uma demanda para preços p
- e aumentarmos o preço dos itens,

Classes de Valorações

Valorações subaditivas: para todo S e T,
$v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$

Valorações submodulares: para todo $S \subseteq T$ e $x \notin T$, temos que $v(S \cup \{x\}) - v(S) \geq v(T \cup \{x\}) - v(T)$

Valorações com substitutos:

- se A é uma demanda para preços p
- e aumentarmos o preço dos itens,
- então existe uma demanda D que contém todos os itens de A que não subiram de preço

Leilões de um único item

Leilão inglês:

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual

O leilão inglês é um leilão iterativo

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual

O leilão inglês é um leilão iterativo

- em particular, é um leilão ascendente

Leilões ascendentes

Podemos pensar em leilões ascendentes para leilões combinatórios:

Leilões ascendentes

Podemos pensar em leilões ascendentes para leilões combinatórios:

- O leiloeiro começa com os preços nulos (ou no mínimo)

Leilões ascendentes

Podemos pensar em leilões ascendentes para leilões combinatórios:

- O leiloeiro começa com os preços nulos (ou no mínimo)
- Através de consultas de demanda, o leiloeiro identifica quais são os itens desejados por um comprador com os preços atuais

Leilões ascendentes

Podemos pensar em leilões ascendentes para leilões combinatórios:

- O leiloeiro começa com os preços nulos (ou no mínimo)
- Através de consultas de demanda, o leiloeiro identifica quais são os itens desejados por um comprador com os preços atuais
- O leiloeiro aumenta alguns preços de algum modo, até decidir por uma alocação

Leilões ascendentes

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos se:

Leilões ascendentes

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos se:

- para todo par de preços dos itens $q \geq p$

Leilões ascendentes

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos se:

- para todo par de preços dos itens $q \geq p$
- existe uma demanda com preços q

Leilões ascendentes

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos se:

- para todo par de preços dos itens $q \geq p$
- existe uma demanda com preços q
- que contém todos os itens da demanda com preço p que mantiveram seus preços

Leilões ascendentes

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos se:

- para todo par de preços dos itens $q \geq p$
- existe uma demanda com preços q
- que contém todos os itens da demanda com preço p que mantiveram seus preços

Formalmente: para toda demanda A para preços p, existe demanda D para preços q tal que $D \supseteq \{j \in A : p_j = q_j\}$

Leilões ascendentes

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos se:

- para todo par de preços dos itens $q \geq p$
- existe uma demanda com preços q
- que contém todos os itens da demanda com preço p que mantiveram seus preços

Formalmente: para toda demanda A para preços p, existe demanda D para preços q tal que $D \supseteq \{j \in A : p_j = q_j\}$

Apenas itens cujo preço subiu podem sair da demanda

Leilão de preços ascendentes de itens

PreçosAscendentesItens(m, n)

$p_j = 0$ **para** $j = 1$ **até** m
$S_i = \emptyset$ **para** $i = 1$ **até** n
enquanto existe i tal que S_i não é uma demanda de i para preços p_j se $j \in S_i$ e $p_j + \varepsilon$ se $j \notin S_i$
    Seja D_i uma tal demanda
    $p_j = p_j + \varepsilon$ para todo $j \in D_i \setminus S_i$
    $S_i = D_i$
    $S_k = S_k \setminus D_i$ para todo $k \neq i$
retorne $S_1, \ldots, S_n$

Equilíbrio ε-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$ são equilíbrio ε-Walrasiano se

Equilíbrio ε-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$ são equilíbrio ε-Walrasiano se

- todo item j com $p_j > 0$ pertence a algum S_i

Equilíbrio ε-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$ são equilíbrio ε-Walrasiano se

- todo item j com $p_j > 0$ pertence a algum S_i
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \varepsilon$ para $j \notin S_i$

Equilíbrio ε-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$ são equilíbrio ε-Walrasiano se

- todo item j com $p_j > 0$ pertence a algum S_i
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \varepsilon$ para $j \notin S_i$

Como os preços são ascendentes, o algoritmo termina em no máximo

Equilíbrio ε-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$ são equilíbrio ε-Walrasiano se

- todo item j com $p_j > 0$ pertence a algum S_i
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \varepsilon$ para $j \notin S_i$

Como os preços são ascendentes, o algoritmo termina em no máximo

$$m \times \frac{v_{\text{max}}}{\varepsilon}$$

passos, onde $v_{\text{max}} = \text{max}\{v_i(S) \colon i \in [n], S \subseteq [m]\}$

Equilíbrio ε-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$ são equilíbrio ε-Walrasiano se

- todo item j com $p_j > 0$ pertence a algum S_i
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \varepsilon$ para $j \notin S_i$

Como os preços são ascendentes, o algoritmo termina em no máximo

$$m \times \frac{v_{\mathsf{max}}}{\varepsilon}$$

passos, onde $v_{\mathsf{max}} = \mathsf{max}\{v_i(S) \colon i \in [n], S \subseteq [m]\}$

Teorema: Para valorações com substitutos, o algoritmo PreçosAscendentesItens produz um equilíbrio ε-Walrasiano

Equilíbrio ε-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$ são equilíbrio ε-Walrasiano se

- todo item j com $p_j > 0$ pertence a algum S_i
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \varepsilon$ para $j \notin S_i$

Como os preços são ascendentes, o algoritmo termina em no máximo

$$m \times \frac{v_{\text{max}}}{\varepsilon}$$

passos, onde $v_{\text{max}} = \text{max}\{v_i(S) \colon i \in [n], S \subseteq [m]\}$

Teorema: Para valorações com substitutos, o algoritmo PreçosAscendentesItens produz um equilíbrio ε-Walrasiano

Assim a alocação produzida atinge um bem-estar social a εm do bem-estar social ótimo

Leilão de preços ascendentes de itens

Afirmação: A cada passo do algoritmo, para cada comprador i, $S_i \subseteq D_i$

Leilão de preços ascendentes de itens

Afirmação: A cada passo do algoritmo, para cada comprador i, $S_i \subseteq D_i$

Prova: É verdade no começo do algoritmo ($S_i = \emptyset$), então vamos focar quando um comprador i causou a mudança nos preços

Leilão de preços ascendentes de itens

Afirmação: A cada passo do algoritmo, para cada comprador i, $S_i \subseteq D_i$

Prova: É verdade no começo do algoritmo ($S_i = \emptyset$), então vamos focar quando um comprador i causou a mudança nos preços

Para i, fazemos $S_i = D_i$ e somamos ε nos preços dos itens em $D_i \setminus S_i$, portanto, a afirmação é valida

Leilão de preços ascendentes de itens

Afirmação: A cada passo do algoritmo, para cada comprador i, $S_i \subseteq D_i$

Prova: É verdade no começo do algoritmo ($S_i = \emptyset$), então vamos focar quando um comprador i causou a mudança nos preços

Para i, fazemos $S_i = D_i$ e somamos ε nos preços dos itens em $D_i \setminus S_i$, portanto, a afirmação é valida

Para $k \neq i$, não é possível D_k perder um item e S_k não perder o item

Leilão de preços ascendentes de itens

Afirmação: A cada passo do algoritmo, para cada comprador i, $S_i \subseteq D_i$

Prova: É verdade no começo do algoritmo ($S_i = \emptyset$), então vamos focar quando um comprador i causou a mudança nos preços

Para i, fazemos $S_i = D_i$ e somamos ε nos preços dos itens em $D_i \setminus S_i$, portanto, a afirmação é valida

Para $k \neq i$, não é possível D_k perder um item e S_k não perder o item

- Se D_k perde um item, o preço aumentou e portanto o item foi para i

Leilão de preços ascendentes de itens

Afirmação: A cada passo do algoritmo, para cada comprador i, $S_i \subseteq D_i$

Prova: É verdade no começo do algoritmo ($S_i = \emptyset$), então vamos focar quando um comprador i causou a mudança nos preços

Para i, fazemos $S_i = D_i$ e somamos ε nos preços dos itens em $D_i \setminus S_i$, portanto, a afirmação é valida

Para $k \neq i$, não é possível D_k perder um item e S_k não perder o item

- Se D_k perde um item, o preço aumentou e portanto o item foi para i
- Mas então removemos tal item de S_k

Leilão de preços ascendentes de itens

Teorema: Para valorações com substitutos, o algoritmo PreçosAscendentesItens produz um equilíbrio ε-Walrasiano

Prova:

Leilão de preços ascendentes de itens

Teorema: Para valorações com substitutos, o algoritmo PreçosAscendentesItens produz um equilíbrio ε-Walrasiano

Prova:

- todo item com preço positivo pertence a algum S_i

Leilão de preços ascendentes de itens

Teorema: Para valorações com substitutos, o algoritmo PreçosAscendentesItens produz um equilíbrio ε-Walrasiano

Prova:

- todo item com preço positivo pertence a algum S_i
- o algoritmo termina quando $S_i = D_i$

Leilão de preços ascendentes de itens

Teorema: Para valorações com substitutos, o algoritmo PreçosAscendentesItens produz um equilíbrio ε-Walrasiano

Prova:

- todo item com preço positivo pertence a algum S_i
- o algoritmo termina quando $S_i = D_i$

portanto, temos um equilíbrio ε-Walrasiano

Exemplo

Infelizmente, esse leilão não é à prova de estratégia

Exemplo

Infelizmente, esse leilão não é à prova de estratégia

Considere dois itens, a e b, e dois jogadores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

Exemplo

Infelizmente, esse leilão não é à prova de estratégia

Considere dois itens, a e b, e dois jogadores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(\{a\})$	$v(\{b\})$	$v(\{a,b\})$
Alice	4	4	4
Bob	5	5	10

Exemplo

Infelizmente, esse leilão não é à prova de estratégia

Considere dois itens, a e b, e dois jogadores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(\{a\})$	$v(\{b\})$	$v(\{a,b\})$
Alice	4	4	4
Bob	5	5	10

Para estas valorações, o leilão do algoritmo termina no equilíbrio Walrasiano, com preços $p_a = p_b = 4$, e Bob recebendo os dois itens, com utilidade 2

Exemplo

Infelizmente, esse leilão não é à prova de estratégia

Considere dois itens, a e b, e dois jogadores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(\{a\})$	$v(\{b\})$	$v(\{a,b\})$
Alice	4	4	4
Bob	5	5	10

Para estas valorações, o leilão do algoritmo termina no equilíbrio Walrasiano, com preços $p_a = p_b = 4$, e Bob recebendo os dois itens, com utilidade 2

Se Bob declarasse sua valoração apenas por a, então o algoritmo deixaria a com Bob e b com Alice, os dois pelo preço nulo

Exemplo

Infelizmente, esse leilão não é à prova de estratégia

Considere dois itens, a e b, e dois jogadores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(\{a\})$	$v(\{b\})$	$v(\{a,b\})$
Alice	4	4	4
Bob	5	5	10

Para estas valorações, o leilão do algoritmo termina no equilíbrio Walrasiano, com preços $p_a = p_b = 4$, e Bob recebendo os dois itens, com utilidade 2

Se Bob declarasse sua valoração apenas por a, então o algoritmo deixaria a com Bob e b com Alice, os dois pelo preço nulo

Com essa declaração, Bob fica com utilidade 5

Leilões ascendentes

Preços por pacotes de itens:

Leilões ascendentes

Preços por pacotes de itens:

- Para cada i e cada $S \subseteq [m]$, um preço $p_i(S)$

Leilões ascendentes

Preços por pacotes de itens:

- Para cada i e cada $S \subseteq [m]$, um preço $p_i(S)$

Demanda para i: conjunto $D \in \arg\max_S \{v_i(S) - p_i(S)\}$

Leilões ascendentes

Preços por pacotes de itens:

- Para cada i e cada $S \subseteq [m]$, um preço $p_i(S)$

Demanda para i: conjunto $D \in \arg\max_S \{v_i(S) - p_i(S)\}$

Equilíbrio competitivo: preços p e alocação $S = (S_1, \ldots, S_n)$ tq

Leilões ascendentes

Preços por pacotes de itens:

- Para cada i e cada $S \subseteq [m]$, um preço $p_i(S)$

Demanda para i: conjunto $D \in \arg\max_S \{v_i(S) - p_i(S)\}$

Equilíbrio competitivo: preços p e alocação $S = (S_1, \ldots, S_n)$ tq

- para todo i, conjunto S_i é uma demanda para i

Leilões ascendentes

Preços por pacotes de itens:

- Para cada i e cada $S \subseteq [m]$, um preço $p_i(S)$

Demanda para i: conjunto $D \in \arg\max_S \{v_i(S) - p_i(S)\}$

Equilíbrio competitivo: preços p e alocação $S = (S_1, \ldots, S_n)$ tq

- para todo i, conjunto S_i é uma demanda para i
- alocação maximiza o lucro do leiloeiro para p:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(S_i) \;\geq\; \sum_{i=1}^{n} p_i(T_i),$$

para qualquer outra alocação $T = (T_1, \ldots, T_n)$

Leilões ascendentes

Preços por pacotes de itens:

- Para cada i e cada $S \subseteq [m]$, um preço $p_i(S)$

Demanda para i: conjunto $D \in \arg\max_S \{v_i(S) - p_i(S)\}$

Equilíbrio competitivo: preços p e alocação $S = (S_1, \dots, S_n)$ tq

- para todo i, conjunto S_i é uma demanda para i
- alocação maximiza o lucro do leiloeiro para p:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(S_i) \;\geq\; \sum_{i=1}^{n} p_i(T_i),$$

para qualquer outra alocação $T = (T_1, \dots, T_n)$

Proposição: Em qualquer equilíbrio competitivo, a alocação maximiza o bem-estar social

Equilíbrio competitivo

Proposição: Em qualquer equilíbrio competitivo, a alocação maximiza o bem-estar social

Equilíbrio competitivo

Proposição: Em qualquer equilíbrio competitivo, a alocação maximiza o bem-estar social

Prova:

Equilíbrio competitivo

Proposição: Em qualquer equilíbrio competitivo, a alocação maximiza o bem-estar social

Prova: Para todo comprador i, como S_i é uma demanda para i

Equilíbrio competitivo

Proposição: Em qualquer equilíbrio competitivo, a alocação maximiza o bem-estar social

Prova: Para todo comprador i, como S_i é uma demanda para i

$$v_i(S_i) - p_i(S_i) \geq v_i(T_i) - p_i(T_i)$$

Equilíbrio competitivo

Proposição: Em qualquer equilíbrio competitivo, a alocação maximiza o bem-estar social

Prova: Para todo comprador i, como S_i é uma demanda para i

$$v_i(S_i) - p_i(S_i) \geq v_i(T_i) - p_i(T_i)$$

Somando para todo i, temos que

Equilíbrio competitivo

Proposição: Em qualquer equilíbrio competitivo, a alocação maximiza o bem-estar social

Prova: Para todo comprador i, como S_i é uma demanda para i

$$v_i(S_i) - p_i(S_i) \geq v_i(T_i) - p_i(T_i)$$

Somando para todo i, temos que

$$\sum_i v_i(S_i) - \sum_i p_i(S_i) \geq \sum_i v_i(T_i) - \sum_i p_i(T_i)$$

Equilíbrio competitivo

Proposição: Em qualquer equilíbrio competitivo, a alocação maximiza o bem-estar social

Prova: Para todo comprador i, como S_i é uma demanda para i

$$v_i(S_i) - p_i(S_i) \geq v_i(T_i) - p_i(T_i)$$

Somando para todo i, temos que

$$\sum_i v_i(S_i) - \sum_i p_i(S_i) \geq \sum_i v_i(T_i) - \sum_i p_i(T_i)$$

Mas como o lucro é máximo,

Equilíbrio competitivo

Proposição: Em qualquer equilíbrio competitivo, a alocação maximiza o bem-estar social

Prova: Para todo comprador i, como S_i é uma demanda para i

$$v_i(S_i) - p_i(S_i) \geq v_i(T_i) - p_i(T_i)$$

Somando para todo i, temos que

$$\sum_i v_i(S_i) - \sum_i p_i(S_i) \geq \sum_i v_i(T_i) - \sum_i p_i(T_i)$$

Mas como o lucro é máximo,

$$\sum_i p_i(S_i) \geq \sum_i p_i(T_i)$$

Equilíbrio competitivo

Proposição: Em qualquer equilíbrio competitivo, a alocação maximiza o bem-estar social

Prova: Para todo comprador i, como S_i é uma demanda para i

$$v_i(S_i) - p_i(S_i) \geq v_i(T_i) - p_i(T_i)$$

Somando para todo i, temos que

$$\sum_i v_i(S_i) - \sum_i p_i(S_i) \geq \sum_i v_i(T_i) - \sum_i p_i(T_i)$$

Mas como o lucro é máximo,

$$\sum_i p_i(S_i) \geq \sum_i p_i(T_i)$$

e, portanto,

Equilíbrio competitivo

Proposição: Em qualquer equilíbrio competitivo, a alocação maximiza o bem-estar social

Prova: Para todo comprador i, como S_i é uma demanda para i

$$v_i(S_i) - p_i(S_i) \geq v_i(T_i) - p_i(T_i)$$

Somando para todo i, temos que

$$\sum_i v_i(S_i) - \sum_i p_i(S_i) \geq \sum_i v_i(T_i) - \sum_i p_i(T_i)$$

Mas como o lucro é máximo,

$$\sum_i p_i(S_i) \geq \sum_i p_i(T_i)$$

e, portanto,

$$\sum_i v_i(S_i) \geq \sum_i v_i(T_i)$$

Leilão de preços ascendentes de pacotes

PreçosAscendentesPacotes(m, n)

$p_i(S) = 0$ **para** $i = 1$ **até** m e $S \subseteq [m]$

repita

  encontre alocação $T = (T_1, \dots, T_n)$ que maximiza o lucro do leiloeiro com $p_i(T_i) > 0$ para todo $T_i \neq \emptyset$

  $L = \{i : T_i = \emptyset\}$

  para cada $i \in L$

    seja D_i uma demanda de i para os preços p_i

  retorne T, p **se** $D_i = \emptyset$ para todo i

  $p_i(D_i) = p_i(D_i) + \varepsilon$ **para cada** $i \in L$ tal que $D_i \neq \emptyset$

Equilíbrio ε-competitivo

Um conjunto S é uma ε-demanda para i se
$v_i(S) - p_i(S) \geq v_i(T) - p_i(T) - \varepsilon$ para todo $T \subseteq [m]$

Equilíbrio ε-competitivo

Um conjunto S é uma ε-demanda para i se
$v_i(S) - p_i(S) \geq v_i(T) - p_i(T) - \varepsilon$ para todo $T \subseteq [m]$

Equilíbrio ε-competitivo: preços p e alocação $S = (S_1, \ldots, S_n)$ tal que

Equilíbrio ε-competitivo

Um conjunto S é uma ε-demanda para i se
$v_i(S) - p_i(S) \geq v_i(T) - p_i(T) - \varepsilon$ para todo $T \subseteq [m]$

Equilíbrio ε-competitivo: preços p e alocação $S = (S_1, \ldots, S_n)$ tal que

- para todo i, conjunto S_i é uma ε-demanda para i

Equilíbrio ε-competitivo

Um conjunto S é uma ε-demanda para i se
$v_i(S) - p_i(S) \geq v_i(T) - p_i(T) - \varepsilon$ para todo $T \subseteq [m]$

Equilíbrio ε-competitivo: preços p e alocação $S = (S_1, \ldots, S_n)$ tal que

- para todo i, conjunto S_i é uma ε-demanda para i
- alocação maximiza o lucro do leiloeiro para p:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(S_i) \;\geq\; \sum_{i=1}^{n} p_i(T_i),$$

para qualquer outra alocação $T = (T_1, \ldots, T_n)$

Equilíbrio ε-competitivo

Um conjunto S é uma ε-demanda para i se
$v_i(S) - p_i(S) \geq v_i(T) - p_i(T) - \varepsilon$ para todo $T \subseteq [m]$

Equilíbrio ε-competitivo: preços p e alocação $S = (S_1, \ldots, S_n)$ tal que

- para todo i, conjunto S_i é uma ε-demanda para i
- alocação maximiza o lucro do leiloeiro para p:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(S_i) \;\geq\; \sum_{i=1}^{n} p_i(T_i),$$

para qualquer outra alocação $T = (T_1, \ldots, T_n)$

Teorema: O leilão de preços ascendentes para pacotes termina com um equilíbrio ε-competitivo

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Teorema: O leilão de preços ascendentes para pacotes termina com um equilíbrio ε-competitivo

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Teorema: O leilão de preços ascendentes para pacotes termina com um equilíbrio ε-competitivo

Prova: Em primeiro lugar, note que o $p_i(S) \leq v_i(S) + \varepsilon$ e portanto o algoritmo eventualmente termina (mas pode demorar um tempo exponencial)

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Teorema: O leilão de preços ascendentes para pacotes termina com um equilíbrio ε-competitivo

Prova: Em primeiro lugar, note que o $p_i(S) \leq v_i(S) + \varepsilon$ e portanto o algoritmo eventualmente termina (mas pode demorar um tempo exponencial)

Além disso, a cada passo escolhemos uma alocação que maximiza o lucro do leiloeiro

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Teorema: O leilão de preços ascendentes para pacotes termina com um equilíbrio ε-competitivo

Prova: Em primeiro lugar, note que o $p_i(S) \leq v_i(S) + \varepsilon$ e portanto o algoritmo eventualmente termina (mas pode demorar um tempo exponencial)

Além disso, a cada passo escolhemos uma alocação que maximiza o lucro do leiloeiro

Ou seja, basta provar que cada comprador recebe uma ε-demanda

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Compradores que não recebe item, claramente recebem suas demandas (condição de término do algoritmo)

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Compradores que não recebe item, claramente recebem suas demandas (condição de término do algoritmo)

O algoritmo mantém a propriedade que todo pacote T_i com preço $p_i(T_i) > 0$ é uma ε-demanda

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Compradores que não recebe item, claramente recebem suas demandas (condição de término do algoritmo)

O algoritmo mantém a propriedade que todo pacote T_i com preço $p_i(T_i) > 0$ é uma ε-demanda

Considere a última vez que T_i foi uma demanda

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Compradores que não recebe item, claramente recebem suas demandas (condição de término do algoritmo)

O algoritmo mantém a propriedade que todo pacote T_i com preço $p_i(T_i) > 0$ é uma ε-demanda

Considere a última vez que T_i foi uma demanda

- Ele se tornou uma ε-demanda imediatamente depois

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Compradores que não recebe item, claramente recebem suas demandas (condição de término do algoritmo)

O algoritmo mantém a propriedade que todo pacote T_i com preço $p_i(T_i) > 0$ é uma ε-demanda

Considere a última vez que T_i foi uma demanda

- Ele se tornou uma ε-demanda imediatamente depois
- Até o final do algoritmo, mudamos apenas o preço de outros pacotes

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Compradores que não recebe item, claramente recebem suas demandas (condição de término do algoritmo)

O algoritmo mantém a propriedade que todo pacote T_i com preço $p_i(T_i) > 0$ é uma ε-demanda

Considere a última vez que T_i foi uma demanda

- Ele se tornou uma ε-demanda imediatamente depois
- Até o final do algoritmo, mudamos apenas o preço de outros pacotes

Como o algoritmo apenas aloca conjuntos não-vazios com preços positivos, o resultado segue

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Teorema: O leilão de preços ascendentes para pacotes termina com um equilíbrio ε-competitivo

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Teorema: O leilão de preços ascendentes para pacotes termina com um equilíbrio ε-competitivo

Em particular, temos uma solução a uma distância de $n\varepsilon$ da ótima

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Teorema: O leilão de preços ascendentes para pacotes termina com um equilíbrio ε-competitivo

Em particular, temos uma solução a uma distância de $n\varepsilon$ da ótima

O algoritmo pode consumir tempo exponencial

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Teorema: O leilão de preços ascendentes para pacotes termina com um equilíbrio ε-competitivo

Em particular, temos uma solução a uma distância de $n\varepsilon$ da ótima

O algoritmo pode consumir tempo exponencial

- mas funciona para qualquer tipo de valoração