MO829
Tópicos em Teoria da Computação
Teoria dos Jogos Algorítmica

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2017

Leilões Combinatórios

Leilões

Leilões são uma parte importante da economia:

- Tanto do ponto de vista prático
- Como do ponto de vista teórico

Leilões existem desde a antiguidade e são usados para vender:

- Objetos de arte
- Commodities
- Transferir bens públicos para empresas privadas
- Direitos de utilização de recursos naturais
- etc...

Leilões de um único item

Existem várias formas de vender um único item

Leilões de carta fechada de primeiro preço:

- Cada comprador submete apenas um lance
- O comprador que der o maior lance ganha
- O vencedor paga o seu lance

Leilões de carta fechada de segundo preço:

- O vencedor paga o segundo maior lance

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual
  - Leilão de vela: termina quando acaba o tempo

O leilão inglês é parecido com o de segundo-preço

Leilão holandês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- O preço diminui conforme o tempo passa
- O primeiro a manifestar interesse leva o item

O leilão holandês é parecido com o de primeiro-preço

Leilões Multi-unidade

Leilões multi-unidade:

- Queremos vender k itens idênticos
- Cada comprador informa um lance para cada quantidade de itens
- Preços uniformes: cada item tem o mesmo preço
- Preços discriminatórios: podemos vender os itens por preços diferentes

Leilões de bens digitais:

- Temos infinitas cópias do mesmo item
- Cada comprador deseja comprar uma cópia
- Preços uniformes ou discriminatórios

Leilões de demanda unitária

Leilões de demanda unitária:

- Queremos vender vários itens diferentes
- Mas cada comprador quer comprar apenas um item
- Cada comprador submete um lance para cada item
- Oferta única: Um item pode ser vendido apenas para um comprador
- Oferta limitada: Um item pode ser vendido um número de vezes
- Oferta ilimitada: Um item pode ser vendido inúmeras vezes

Leilões combinatórios

Em um leilão combinatório:

- Temos n compradores
- Queremos vender m itens

Valorações:

- para cada comprador i e cada conjunto S de itens, temos um valor $v_i(S)$

Restrições:

- Free-disposal: $v_i(S) \leq v_i(T)$ para todo $S \subseteq T$ e todo i
- Normalização: $v_i(\emptyset) = 0$ para todo i

As valorações são informações privadas

- Os compradores podem mentir ao relatar as valorações...

Leilões combinatórios

Alocação:

- Conjuntos $S_1, \ldots, S_n$ de itens tais que $S_i \cap S_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$

Bem-estar social: $\sum_{i=1}^{n} v_i(S_i)$

Uma alocação é socialmente eficiente se ela maximiza o bem-estar social

Idealmente, queremos métodos eficientes e à prova de estratégia para maximizar o bem-estar social

Formulação linear inteira

Variáveis binárias: $x_{i,S} = 1$ se e somente se comprador i recebe o subconjunto S

$$
\begin{array}{llll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} v_i(S) & & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m] : j \in S} x_{i,S} \le 1 & & \forall j \in [m] \\
& \displaystyle\sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} \le 1 & & \forall i \in [n] \\
& x_{i,S} \in \{0,1\} & & \forall i \in [n], \forall S \subseteq [m]
\end{array}
$$

Relaxação linear inteira

Relaxamos a restrição de integralidade em $x_{i,S}$

$$
\begin{array}{lrcll}
\text{maximize} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} v_i(S) & & & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m] : j \in S} x_{i,S} & \leq & 1 & \forall j \in [m] \\
& \displaystyle\sum_{S \subseteq [m]} x_{i,S} & \leq & 1 & \forall i \in [n] \\
& x_{i,S} & \geq & 0 & \forall i \in [n], \forall S \subseteq [m]
\end{array}
$$

Como é o dual deste LP?

Dual

$$
\begin{array}{llll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{i\in[n]} u_i + \sum_{j\in[m]} p_j & & \\
\text{sujeito a} & \displaystyle u_i + \sum_{j\in S} p_j \geq v_i(S) & \forall i \in [n], \forall S \subseteq [m] \\
& u_i \geq 0 & \forall i \in [n] \\
& p_j \geq 0 & \forall j \in [m]
\end{array}
$$

Por folgas complementares, se $x_{i,S} > 0$, então:

- $u_i = v_i(S) - \sum_{j\in S} p_j$

Interpretação do dual:

- p_j é o preço do item j
- u_i é a utilidade do comprador i

Demanda

Dados preços $p_1, \ldots, p_m$ para os itens, uma demanda para o comprador i é um conjunto $S \subseteq [m]$ que maximize sua utilidade

A utilidade de i para S é $u_i(S) = v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j$

Ou seja, uma demanda é um conjunto S tal que

$$u_i(S) \; = \; v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j \; \geq \; v_i(S') - \sum_{j \in S'} p_j,$$

para qualquer $S' \subseteq [m]$

Equilíbrio Walrasiano

Um conjunto de preços não negativos $p_1^*, \ldots, p_n^*$ e uma alocação $S_1^*, \ldots, S_n^*$ são um equilíbrio Walrasiano se:

- para todo comprador i, S_i é uma demanda para i
- para todo item j não alocado, $p_j^* = 0$

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é economicamente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Segundo Teorema do Bem-Estar Social: Se existe solução inteira ótima para o LP, então ela corresponde a um equilíbrio Walrasiano

Corolário: Um equilíbrio Walrasiano existe se e somente se o LP tem solução inteira

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social

Teorema: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é economicamente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Prova: Cada comprador recebe sua demanda em um equilíbrio Walrasiano:

- $v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^* \geq v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j^*$ para todo S

Toda solução X (fracionária) do LP satisfaz

- $\sum_{S \subseteq M} X_{i,S}^* \leq 1$ para todo comprador i

Portanto,

$$v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^* \geq \sum_{S \subseteq M} X_{i,S}^* \left(v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j^* \right)$$

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social

Somando para todos os compradores:

$$\sum_{i \in N} \left(v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} \right) p_j^* \geq \sum_{i \in N} \left(\sum_{S \subseteq M} X_{i,S}^* \left(v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j^* \right) \right)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} v_i(S_i^*) - \sum_{j \in M} p_j^* &\geq \sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq M} X_{i,S}^* v_i(S) - \sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq M} X_{i,S}^* \sum_{j \in S} p_j^* \\ &\geq \sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq M} X_{i,S}^* v_i(S) - \sum_{j \in M} p_j^* \end{aligned}$$

pois $\displaystyle\sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq [m]: j \in S} X_{i,S}^* \leq 1$

Segundo Teorema do Bem-Estar Social

Teorema: Se existe solução inteira ótima para o LP, então ela corresponde a um equilíbrio Walrasiano

Prova: Considere os conjuntos $S_1^*, S_2^*, \dots, S_n^*$ dados por uma solução inteira ótima e variáveis p^* e u^* de uma solução dual ótima

Por folgas complementares, como $x_{i,S_i^*} > 0$, temos que

$$u_i^* = v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^*$$

I.e., para todo S, $v_i(S_i^*) - \sum_{j \in S_i^*} p_j^* \geq v_i(S) - \sum_{j \in S} p_j^*$

Também por folgas complementares, se $\sum_{i=1}^{n} \sum_{S \subseteq [m] : j \in S} x_{i,S} < 1$, então $p_j^* = 0$

Equilíbrio Walrasiano

Primeiro Teorema do Bem-Estar Social: Se existe equilíbrio Walrasiano então ele é economicamente eficiente (mesmo considerando alocações fracionárias)

Segundo Teorema do Bem-Estar Social: Se existe solução inteira ótima para o LP, então ela corresponde a um equilíbrio Walrasiano

Corolário: Um equilíbrio Walrasiano existe se e somente se o LP tem solução inteira

Equilíbrio Walrasiano

Exemplo onde não há equilíbrio Walrasiano:

Dois itens, a e b, e dois compradores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(\{a\})$	$v(\{b\})$	$v(\{a,b\})$
Alice	2	2	2
Bob	0	0	3

O ótimo é dar $\{a,b\}$ para Bob e deixar Alice sem nada

Mas o conjunto vazio só é uma demanda para Alice se os preços de a e b forem pelo menos 2

Neste caso porém o preço de $\{a,b\}$ seria pelo menos 4 e $\{a,b\}$ não seria uma demanda para Bob

Consultas

Uma grande quantidade de informação dos compradores:

- $n \times 2^m$ números para representar os $v_i(S)$

Podemos pedir os números conforme o necessário, durante a execução do algoritmo

Consulta de valor: Dado um conjunto S, o comprador reporta o seu valor $v_i(S)$

Consulta de demanda: Dados preços para os itens, o comprador reporta uma demanda para esses preços

Consultas

Lema: Uma consulta de valor pode ser simulada por mt consultas de demanda, onde t é o número de bits de precisão nas representações das valorações

Lema: Pode ser necessário realizar um número exponencial de consultas de valor para simular uma única consulta de demanda

Teorema: A relaxação linear do programa inteiro para o problema da alocação máxima pode ser resolvida em tempo polinomial usando consultas de demanda

Classes de Valorações

Valorações subaditivas: para todo S e T, $v(S \cup T) \leq v(S) + v(T)$

Valorações submodulares: para todo $S \subseteq T$ e $x \notin T$, temos que $v(S \cup \{x\}) - v(S) \geq v(T \cup \{x\}) - v(T)$

Valorações com substitutos:

- se A é uma demanda para preços p
- e aumentarmos o preço dos itens,
- então existe uma demanda D que contém todos os itens de A que não subiram de preço

Leilões de um único item

Leilão inglês:

- O preço do item começa em um determinado valor
- Os participantes dão lances crescentes
- Termina quando ninguém aumenta o lance atual

O leilão inglês é um leilão iterativo

- em particular, é um leilão ascendente

Leilões ascendentes

Podemos pensar em leilões ascendentes para leilões combinatórios:

- O leiloeiro começa com os preços nulos (ou no mínimo)
- Através de consultas de demanda, o leiloeiro identifica quais são os itens desejados por um comprador com os preços atuais
- O leiloeiro aumenta alguns preços de algum modo, até decidir por uma alocação

Leilões ascendentes

Valoração v satisfaz a propriedade dos substitutos se:

- para todo par de preços dos itens $q \geq p$
- existe uma demanda com preços q
- que contém todos os itens da demanda com preço p que mantiveram seus preços

Formalmente: para toda demanda A para preços p, existe demanda D para preços q tal que $D \supseteq \{j \in A : p_j = q_j\}$

Apenas itens cujo preço subiu podem sair da demanda

Leilão de preços ascendentes de itens

PreçosAscendentesItens(m, n)

$p_j = 0$ **para** $j = 1$ **até** m

$S_i = \emptyset$ **para** $i = 1$ **até** n

enquanto existe i tal que S_i não é uma demanda de i para preços p_j se $j \in S_i$ e $p_j + \varepsilon$ se $j \notin S_i$

    Seja D_i uma tal demanda

    $p_j = p_j + \varepsilon$ para todo $j \in D_i \setminus S_i$

    $S_i = D_i$

    $S_k = S_k \setminus D_i$ para todo $k \neq i$

retorne $S_1, \ldots, S_n$

Equilíbrio ε-Walrasiano

Alocação $S_1, \ldots, S_n$ e preços $p_1, \ldots, p_m$ são equilíbrio ε-Walrasiano se

- todo item j com $p_j > 0$ pertence a algum S_i
- S_i para cada i é uma demanda de i para os preços p_j para $j \in S_i$ e $p_j + \varepsilon$ para $j \notin S_i$

Como os preços são ascendentes, o algoritmo termina em no máximo

$$m \times \frac{v_{\text{max}}}{\varepsilon}$$

passos, onde $v_{\text{max}} = \text{max}\{v_i(S)\colon i \in [n], S \subseteq [m]\}$

Teorema: Para valorações com substitutos, o algoritmo PreçosAscendentesItens produz um equilíbrio ε-Walrasiano

Assim a alocação produzida atinge um bem-estar social a εm do bem-estar social ótimo

Leilão de preços ascendentes de itens

Afirmação: A cada passo do algoritmo, para cada comprador i, $S_i \subseteq D_i$

Prova: É verdade no começo do algoritmo ($S_i = \emptyset$), então vamos focar quando um comprador i causou a mudança nos preços

Para i, fazemos $S_i = D_i$ e somamos ε nos preços dos itens em $D_i \setminus S_i$, portanto, a afirmação é valida

Para $k \neq i$, não é possível D_k perder um item e S_k não perder o item

- Se D_k perde um item, o preço aumentou e portanto o item foi para i
- Mas então removemos tal item de S_k

Leilão de preços ascendentes de itens

Teorema: Para valorações com substitutos, o algoritmo PreçosAscendentesItens produz um equilíbrio ε-Walrasiano

Prova:

- todo item com preço positivo pertence a algum S_i
- o algoritmo termina quando $S_i = D_i$

portanto, temos um equilíbrio ε-Walrasiano

Exemplo

Infelizmente, esse leilão não é à prova de estratégia

Considere dois itens, a e b, e dois jogadores, Alice e Bob, com as seguintes valorações

	$v(\{a\})$	$v(\{b\})$	$v(\{a,b\})$
Alice	4	4	4
Bob	5	5	10

Para estas valorações, o leilão do algoritmo termina no equilíbrio Walrasiano, com preços $p_a = p_b = 4$, e Bob recebendo os dois itens, com utilidade 2

Se Bob declarasse sua valoração apenas por a, então o algoritmo deixaria a com Bob e b com Alice, os dois pelo preço nulo

Com essa declaração, Bob fica com utilidade 5

Leilões ascendentes

Preços por pacotes de itens:

- Para cada i e cada $S \subseteq [m]$, um preço $p_i(S)$

Demanda para i: conjunto $D \in \arg\max_S \{v_i(S) - p_i(S)\}$

Equilíbrio competitivo: preços p e alocação $S = (S_1, \ldots, S_n)$ tq

- para todo i, conjunto S_i é uma demanda para i
- alocação maximiza o lucro do leiloeiro para p:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(S_i) \;\geq\; \sum_{i=1}^{n} p_i(T_i),$$

para qualquer outra alocação $T = (T_1, \ldots, T_n)$

Proposição: Em qualquer equilíbrio competitivo, a alocação maximiza o bem-estar social

Equilíbrio competitivo

Proposição: Em qualquer equilíbrio competitivo, a alocação maximiza o bem-estar social

Prova: Para todo comprador i, como S_i é uma demanda para i

$$v_i(S_i) - p_i(S_i) \geq v_i(T_i) - p_i(T_i)$$

Somando para todo i, temos que

$$\sum_i v_i(S_i) - \sum_i p_i(S_i) \geq \sum_i v_i(T_i) - \sum_i p_i(T_i)$$

Mas como o lucro é máximo,

$$\sum_i p_i(S_i) \geq \sum_i p_i(T_i)$$

e, portanto,

$$\sum_i v_i(S_i) \geq \sum_i v_i(T_i)$$

Leilão de preços ascendentes de pacotes

PreçosAscendentesPacotes(m, n)

$p_i(S) = 0$ **para** $i = 1$ **até** m e $S \subseteq [m]$
repita
  encontre alocação $T = (T_1, \ldots, T_n)$ que maximiza o lucro do leiloeiro com $p_i(T_i) > 0$ para todo $T_i \neq \emptyset$
  $L = \{i : T_i = \emptyset\}$
  para cada $i \in L$
    seja D_i uma demanda de i para os preços p_i
  retorne T, p **se** $D_i = \emptyset$ para todo i
  $p_i(D_i) = p_i(D_i) + \varepsilon$ **para cada** $i \in L$ tal que $D_i \neq \emptyset$

Equilíbrio ε-competitivo

Um conjunto S é uma ε-demanda para i se
$v_i(S) - p_i(S) \geq v_i(T) - p_i(T) - \varepsilon$ para todo $T \subseteq [m]$

Equilíbrio ε-competitivo: preços p e alocação $S = (S_1, \ldots, S_n)$ tal que

- para todo i, conjunto S_i é uma ε-demanda para i
- alocação maximiza o lucro do leiloeiro para p:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(S_i) \;\geq\; \sum_{i=1}^{n} p_i(T_i),$$

para qualquer outra alocação $T = (T_1, \ldots, T_n)$

Teorema: O leilão de preços ascendentes para pacotes termina com um equilíbrio ε-competitivo

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Teorema: O leilão de preços ascendentes para pacotes termina com um equilíbrio ε-competitivo

Prova: Em primeiro lugar, note que o $p_i(S) \leq v_i(S) + \varepsilon$ e portanto o algoritmo eventualmente termina (mas pode demorar um tempo exponencial)

Além disso, a cada passo escolhemos uma alocação que maximiza o lucro do leiloeiro

Ou seja, basta provar que cada comprador recebe uma ε-demanda

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Compradores que não recebe item, claramente recebem suas demandas (condição de término do algoritmo)

O algoritmo mantém a propriedade que todo pacote T_i com preço $p_i(T_i) > 0$ é uma ε-demanda

Considere a última vez que T_i foi uma demanda

- Ele se tornou uma ε-demanda imediatamente depois
- Até o final do algoritmo, mudamos apenas o preço de outros pacotes

Como o algoritmo apenas aloca conjuntos não-vazios com preços positivos, o resultado segue

Leilão de preços ascendentes para pacotes

Teorema: O leilão de preços ascendentes para pacotes termina com um equilíbrio ε-competitivo

Em particular, temos uma solução a uma distância de $n\varepsilon$ da ótima

O algoritmo pode consumir tempo exponencial

- mas funciona para qualquer tipo de valoração