MO829
Tópicos em Teoria da Computação
Teoria dos Jogos Algorítmica

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2017

Projeto de Mecanismos

Projeto de mecanismos

Escolha social: decisão que agrega preferências de diferentes participantes

Projeto de mecanismo: como tomar tal decisão considerando que participantes agem racionalmente

Necessário pois apenas os participantes conhecem suas preferências

Exemplos:

- eleições
- mercados
- leilões
- política governamental

Paradoxo de Condorcet

Eleição com dois candidatos:

- ganha o escolhido pela maioria

E se forem três candidatos?

Candidatos a, b e c

Três eleitores com preferências:

- $a \succ_1 b \succ_1 c$
- $b \succ_2 c \succ_2 a$
- $c \succ_3 a \succ_3 b$

Qualquer escolha de candidato deixa $2/3$ insatisfeitos:

- se a é escolhido, 2 e 3 preferem c a a, etc...

Voto estratégico

Existem vários métodos de votação

Como evitar o voto estratégico?

Por exemplo:
eleitor com preferência $a \succ b \succ c$, se a não tem chances de ganhar, pode optar por votar em b, pois prefere b a c

Teorema de Gibbard-Satterthwaite:

- basicamente diz que não há como evitar isso

Consequência do famoso Teorema de Arrow

Notação e definições

- A: conjunto de alternativas (os candidatos)
- L: conjunto de permutações de A
  - possíveis ordens de preferência
- Cada jogador i associado a um $\succ_i$ em L
  - Chamamos $\succ_1, \succ_2, \ldots, \succ_n$ de um perfil de preferências
- Função de bem-estar social - $F : L^n \to L$
- Função de escolha social - $f : L^n \to A$

Exemplo

Função de bem-estar social F que considera apenas a primeira opção

- desempata de alguma forma

$$
\begin{array}{ccccc}
a & \succ_1 & b & \succ_1 & c \\
b & \succ_2 & c & \succ_2 & a \\
c & \succ_3 & b & \succ_3 & a \\
a & \succ_4 & c & \succ_4 & b \\
c & \succ_5 & b & \succ_5 & a \\
a & \succ_6 & b & \succ_6 & c
\end{array}
$$

$$F(\succ_1, \succ_2, \succ_3, \succ_4, \succ_5, \succ_6) = a \succ c \succ b$$

Exemplo

Função de escolha social f que considera apenas a primeira opção

- desempata de alguma forma

$$
\begin{array}{ccccc}
a & \succ_1 & b & \succ_1 & c \\
b & \succ_2 & c & \succ_2 & a \\
c & \succ_3 & b & \succ_3 & a \\
a & \succ_4 & c & \succ_4 & b \\
c & \succ_5 & b & \succ_5 & a \\
a & \succ_6 & b & \succ_6 & c
\end{array}
$$

$$f(\succ_1, \succ_2, \succ_3, \succ_4, \succ_5, \succ_6) = a$$

Exemplo

Função de bem-estar social F que dá pontos dependendo da posição do candidato

- primeira posição: 2 pontos
- segunda posição: 1 ponto
- desempata de alguma forma

$$\begin{array}{ccccc} a & \succ_1 & b & \succ_1 & c \\ b & \succ_2 & c & \succ_2 & a \\ c & \succ_3 & b & \succ_3 & a \\ a & \succ_4 & c & \succ_4 & b \\ c & \succ_5 & b & \succ_5 & a \\ a & \succ_6 & b & \succ_6 & c \end{array}$$

Empate: todos têm 6 pontos

$$F(\succ_1, \succ_2, \succ_3, \succ_4, \succ_5, \succ_6) = b \succ c \succ a$$

Exemplo

Função de escolha social f que dá pontos dependendo da posição do candidato

- primeira posição: 2 pontos
- segunda posição: 1 ponto
- desempata de alguma forma

$$
\begin{array}{ccccc}
a & \succ_1 & b & \succ_1 & c \\
b & \succ_2 & c & \succ_2 & a \\
c & \succ_3 & b & \succ_3 & a \\
a & \succ_4 & c & \succ_4 & b \\
c & \succ_5 & b & \succ_5 & a \\
a & \succ_6 & b & \succ_6 & c
\end{array}
$$

Empate: todos têm 6 pontos

$$f(\succ_1, \succ_2, \succ_3, \succ_4, \succ_5, \succ_6) = b$$

Notação e definições

- F é unânime se $F(\succ, \ldots, \succ) = \succ$ para todo $\succ \in L$

- Eleitor i é ditador para F se $F(\succ_1, \ldots, \succ_n) = \succ_i$ para todo $\succ_1, \ldots, \succ_n$ em L

- F é independente de alternativas irrelevantes se:
  - para todo a e b em A
  - e todo $\succ_1, \ldots, \succ_n$ e $\succ'_1, \ldots, \succ'_n$
  - com $\succ := F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$ e $\succ' := F(\succ'_1, \ldots, \succ'_n)$

  temos que se $a \succ_i b \Leftrightarrow a \succ'_i b$ para todo i então $a \succ b \Leftrightarrow a \succ' b$

- Isto é, F é independente de alternativas irrelevantes se a ordem entre a e b na preferência de F depende apenas da ordem relativa entre a e b para os eleitores

Notação e definições

- F é unânime se $F(\succ, \ldots, \succ) = \succ$ para todo $\succ \in L$
- F é independente de alternativas irrelevantes se:
  - para todo a e b em A
  - e todo $\succ_1, \ldots, \succ_n$ e $\succ'_1, \ldots, \succ'_n$
  - com $\succ := F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$ e $\succ' := F(\succ'_1, \ldots, \succ'_n)$

  temos que se $a \succ_i b \Leftrightarrow a \succ'_i b$ para todo i então $a \succ b \Leftrightarrow a \succ' b$

F é unânime e independente de alternativas irrelevantes:

- se $a \succ_i b$ para todo i, então $a \succ b$

Teorema de Arrow

Teorema de Arrow: Toda função de bem-estar social unanime e independente de alternativas irrelevantes sobre A com $|A| \geq 3$ é uma ditadura

Notação útil: $a \succ b \Leftrightarrow c \succ' d$

- Se $a \succ b$ então $c \succ' d$
- Se $b \succ a$ então $d \succ' c$

Neutralidade dos Pares

Afirmação: Seja $\succ_1, \ldots, \succ_n$ e $\succ'_1, \ldots, \succ'_n$ perfis de preferências tais que, para todo jogador i, $a \succ_i b \Leftrightarrow c \succ'_i d$. Então $a \succ b \Leftrightarrow c \succ' d$ onde $\succ = F(\succ_1, \ldots, \succ_n)$ e $\succ' = F(\succ'_1, \ldots, \succ'_n)$

Prova: Sem perda de generalidade:

- $c \neq b$ (se preciso, troque a com b e c com d)
- $a \succ b$ (se preciso, troque $\succ$ por $\prec$)

Queremos mostrar que $c \succ' b$

Neutralidade dos Pares

$$c \neq b \qquad\qquad a \succ b$$

Criamos novas ordenações $\succ_i''$ a partir de $\succ_i$ com:

- c imediatamente antes de a (se não for igual a a)
- d imediatamente depois de b (se não for igual a b)

Temos que $c \succ'' d$:

- Por unanimidade, $c \succ'' a$ e $b \succ'' d$
- Por indep. das alternativas irrelevantes, $a \succ'' b$

Note que $a \succ_i b \Leftrightarrow c \succ_i'' d$ e, portanto, $c \succ_i'' d \Leftrightarrow c \succ_i' d$

- Por indep. das alternativas irrelevantes, $c \succ' d$

Prova do Teorema de Arrow

Escolha um par de alternativas $a \neq b$

Seja π^i um perfil de preferências onde $a \succ_j b \Leftrightarrow j \leq i$

Por unanimidade:

- em $F(\pi^0)$ temos que $b \succ a$ e
- em $F(\pi^n)$ temos que $a \succ b$

Seja i^* um ponto de mudança, isto é

- em $F(\pi^{i^*-1})$ temos que $b \succ a$ e
- em $F(\pi^{i^*})$ temos que $a \succ b$

Vamos mostrar que i^* é um ditador

Prova do Teorema de Arrow

Escolha alternativas c, d e e diferentes com $c \succ_{i^*} d$

- Vamos mostrar que $c \succ d$

Crie novos perfis $\succ_i'$ baseados em $\succ_i$, mas

- para $i < i^*$, mova e para o fim em $\succ_i'$
- para $i > i^*$, mova e para o início em $\succ_i'$
- para $i = i^*$, mova e de forma que $c \succ_i e \succ_i d$ em $\succ_i'$

As preferências dos jogadores para c e e é igual as preferências dos jogadores para a e b em π^{i^*}

- portanto $c \succ' e$ (neutralidade dos pares)

As preferências dos jogadores para d e e é igual as preferências dos jogadores para a e b em π^{i^*-1}

- portanto $e \succ' d$ (neutralidade dos pares)

Concluímos que $c \succ' d$. Pela independência das alternativa irrelevantes, concluímos que $c \succ d$ $\square$

Funções de escolha social

Uma função $f : L^n \to A$ é estrategicamente manipulável por um eleitor i se, existe $\succ_1, \ldots, \succ_n$ em L e $\succ_i'$ em L, tal que $a' \succ_i a$ onde $a = f(\succ_1, \ldots, \succ_n)$ e $a' = f(\succ_1, \ldots, \succ_i', \ldots \succ_n)$

O eleitor i, que prefere a' a a, pode modificar o resultado declarando $\succ_i'$ em vez de sua verdadeira preferência $\succ_i$

Se f não pode ser estrategicamente manipulável, diz-se que f é à prova de estratégia (ou compatível com incentivo)

Teorema de Gibbard-Satterthwaite

Teorema: Se f é uma função de escolha social à prova de estratégia sobre A, com $|A| \geq 3$, então f é uma ditadura.

Ideia da prova:

- Estendemos f para uma função F de bem-estar social
- Se f é à prova de estratégia e não é uma ditadura então
  - F é unanime
  - F satisfaz independência de alternativas irrelevantes
  - F não é uma ditadura
- Pelo Teorema de Arrow, tal F não existe
- Portanto, não existe f à prova de estratégia que não é uma ditadura

Mecanismos com dinheiro

O modelo original não mede quanto uma pessoa prefere uma alternativa à outra

Dinheiro pode ser usado para permitir essa distinção

Preferências passam a ser valorações dos itens em A

Se a é o resultado, imagine que i paga adicionalmente um valor p e quer maximizar $u_i(a) = v_i(a) - p$

Leilões de Vickrey

Considere um leilão de um único item

Leilão de primeiro preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga este valor pelo item

Desvantagem: induz compradores a não declararem o valor real, mas um valor menor.

Leilão de segundo preço (ou leilões de Vickrey):

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Vantagem: induz compradores a declararem o valor real

Mecanismos

- n: número de participantes
- A: conjunto de alternativas
- $v_i : A \to \mathbb{R}$ valoração das alternativas para i
- $V_i \subseteq \mathbb{R}^A$: conjunto das possíveis valorações de i

Mecanismo (f, p):

- função de escolha social $f : V_1 \times \cdots \times V_n \to A$
- e vetor de preços $p_1, \ldots, p_n$ que cada participante paga, onde $p_i : V_1 \times \cdots \times V_n \to \mathbb{R}$

O valor $v_i(f(v_1, \ldots, v_n)) - p_i(v_1, \ldots, v_n)$ é a utilidade de i para $v_1, \ldots, v_n$

Mecanismos à prova de estratégia

Um mecanismo (f, p) é à prova de estratégia se

- para todo i,
- todo $v_1, \ldots, v_n \in V_1 \times \cdots V_n$
- e todo $v'_i \in V_i$

onde

- $a = f(v_{-i}, v_i)$
- $a' = f(v_{-i}, v'_i)$

vale que

$$v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v'_i)$$

compatível com incentivo $=$ à prova de estratégia

Exemplo

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Formalizando o mecanismo:

- n é o número de compradores
- $A = [n]$ (ganhador)
- Lance: valor v_i
- Ganhador: a tal que $v_a = \max\{v_i : i \in [n]\}$
- Preços: para cada i em $[n]$:
  - $p_i(a) = 0$ se $i \neq a$
  - $p_a(a) = v_b$ onde $v_b = \max\{v_i : i \in [n] \setminus \{a\}\}$

Já vimos que esse mecanismo é à prova de estratégia

Mecanismos VCG

Lembre-se que $\sum_i v_i(a)$ é o chamado bem-estar social

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) = a \in \arg\max \left\{ \sum_i v_i(a') : a' \in A \right\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tal que

$$p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$$

Mecanismos VCG

Observações:

- O mecanismo maximiza bem-estar social
- Note que o $h_i(v_{-i})$ não depende do valor v_i
- Portanto i, para minimizar o seu preço, pode apenas escolher v_i de modo que $\sum_{j \neq i} v_j(a)$ seja máximo
  - já que a escolha de v_i afeta o $a = f(v_1, \ldots, v_n)$

Mecanismos VCG

Teorema: O mecanismo VCG é à prova de estratégia

Prova: Fixe i, $v_1, \ldots, v_n$ e v_i' e seja:

- $a = f(v_{-i}, v_i)$
- $a' = f(v_{-i}, v_i')$
- $u_i = v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i)$
- $u_i' = v_i(a') - p_i(v_{-i}, v_i')$

Precisamos mostrar que $u_i \geq u_i'$. Note que

$$u_i = v_i(a) - h_i(v_{-i}) + \sum_{j \neq i} v_j(a) = \sum_j v_j(a) - h_i(v_{-i})$$

Similarmente, $u_i' = \sum_j v_j(a') - h_i(v_{-i})$

Como a é tq $\sum_j v_j(a)$ é máxima, $\sum_j v_j(a) \geq \sum_j v_j(a')$

Regra de pivotação de Clarke

Mecanismo (f, p) é Vickrey-Clarke-Groves (VCG) se

- $f(v_1, \ldots, v_n) = a \in \arg\max \left\{ \sum_i v_i(a') \colon a' \in A \right\}$
- existem funções $h_1, \ldots, h_n$ com $h_i : V_{-i} \to \mathbb{R}$ tal que

$$p_i(v_1, \ldots, v_n) = h_i(v_{-i}) - \sum_{j \neq i} v_j(a)$$

Como escolher as funções h_i?

- Uma ideia ruim: $h_i = 0$

Regra de pivotação Clarke:

- $h_i(v_{-i}) = \max \left\{ \sum_{j \neq i} v_j(b) \colon b \in A \right\}$

Regra de pivotação de Clarke

Regra de pivotação Clarke:

- $h_i(v_{-i}) = \max\left\{ \sum_{j \neq i} v_j(b) \colon b \in A \right\}$

Cada jogador é cobrado:

$$p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max\left\{ \sum_{j \neq i} v_j(b) \colon b \in A \right\} - \sum_{j \neq i} v_j(a)$$

onde $a \in \arg\max\left\{ \sum_i v_i(a') \colon a' \in A \right\}$

Cada jogador paga pela externalidade que causa

Exemplo: Venda de um único item

Leilão de segundo preço:

- Cada jogador dá um lance em um envelope
- Ganha o maior lance, e paga o segundo maior lance

Regra de pivotação de Clarke:

- $p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max \left\{ \sum_{j \neq i} v_j(b) \colon b \in A \right\} - \sum_{j \neq i} v_j(a)$

Isto é,

- Se $i \neq a$, então $\max \left\{ \sum_{j \neq i} v_j(b) \colon b \in A \right\} = v_a$ e $\sum_{j \neq i} v_j(a) = v_a$, ou seja, $p_i = 0$
- Se $i = a$, então $\max \left\{ \sum_{j \neq i} v_j(b) \colon b \in A \right\} = v_s$ onde v_s é o segundo maior lance e $\sum_{j \neq i} v_j(a) = 0$, ou seja, $p_i = v_s$

Exemplo: Leilão reverso

Também chamado de *procurement auction* (leilão de aprovisionamento)

Um agente quer comprar um item de quem der o menor lance:

- para maximizar o bem-estar social, escolhemos o menor lance
- pelo VCG com a Regra de Clarke, pagamos o segundo menor custo
  - captura o que aconteceria se o menor lance não existisse

Exemplo: troca bilateral

- Um vendedor acredita que o item vale $0 \leq v_s \leq 1$
- Um comprador acredita que o item vale $0 \leq v_b \leq 1$
- Os possíveis resultados são troca ou não-troca
  - Se $v_b > v_s$, então troca
  - Se $v_b < v_s$, então não-troca
- Usando o VCG e fazendo com que em caso de não-troca não haja pagamento, temos que
  - o comprador paga v_s
  - e o vendedor recebe v_b
- Isto é, o mecanismo subsidia a troca ($v_b > v_s$)

Exemplo: Leilão multi-unidade

- Venda de k itens idênticos
- n compradores ($k < n$)
- Cada comprador quer comprar só um item e dá valor v^*
- Maximizar o bem-estar social é dar os k itens para os k maiores lances
- VCG com Regra de pivotação de Clarke:
  - Vencedores pagam o $k + 1$-ésimo maior lance
  - Perdedores pagam 0

Transferência de dinheiro

Propriedades interessantes para um mecanismo:

- Um mecanismo é (ex-post) individualmente racional se $v_i(f(v_1, \ldots, v_n)) - p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ para todo i e todo $v_1, \ldots, v_n$
  - a utilidade de todos os participantes é não-negativa
- Um mecanismo não tem transferências positivas se $p_i(v_1, \ldots, v_n) \geq 0$ para todo jogador i e todo $v_1, \ldots, v_n$,
  - nenhum participante recebe dinheiro

Regra de Clarke:

$$p_i(v_1, \ldots, v_n) = \max \left\{ \textstyle\sum_{j \neq i} v_j(b) \colon b \in A \right\} - \textstyle\sum_{j \neq i} v_j(a)$$

Transferência de dinheiro

Lema: Mecanismo VCG com pagamento de Clarke não tem transferências positivas e, se $v_i(a) \geq 0$ para todo $v_i \in V_i$ e $a \in A$, tal mecanismo é individualmente racional

Prova: Seja um jogador i e

- $f(v_1, \ldots, v_n) = a \in \arg\max \left\{ \sum_i v_i(a') \colon a' \in A \right\}$
- $b \in \arg\max \left\{ \sum_{j \neq i} v_j(a') \colon a' \in A \right\}$

Individualmente racional:

$$u_i = v_i(a) + \sum_{j \neq i} v_j(a) - \sum_{j \neq i} v_j(b) \geq \sum_j v_j(a) - \sum_j v_j(b) \geq 0$$

Sem transferências positivas:

$$p_i(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{j \neq i} v_j(b) - \sum_{j \neq i} v_j(a) \geq 0 \quad \square$$

Caracterização direta

Um mecanismo (f, p) é à prova de estratégia se

- para todo i,
- todo $v_1, \ldots, v_n \in V_1 \times \cdots V_n$
- e todo $v'_i \in V_i$

onde

- $a = f(v_{-i}, v_i)$
- $a' = f(v_{-i}, v'_i)$

vale que

$$v_i(a) - p_i(v_{-i}, v_i) \geq v_i(a') - p_i(v_{-i}, v'_i)$$

Caracterização direta

Proposição: Um mecanismo é à prova de estratégia se e somente se, para todo i e v_{-i}, satisfaz as seguintes condições:

(a) O pagamento p_i não depende de v_i, depende apenas da alternativa escolhida $f(v_i, v_{-i})$. Isto é, para todo $a \in A$, existe preço p_a tal que $p_i(v_i, v_{-i}) = p_a$ para todo v_i com $f(v_i, v_{-i}) = a$.

(a) O mecanismo otimiza para cada jogador. Isto é, para todo v_i, $f(v_i, v_{-i}) \in \arg\max\{v_i(a) - p_a \colon a \in \mathrm{Im}_{f(\cdot, v_{-i})}\}$

Prova

Vamos mostrar que se um mecanismo satisfaz (a) e (b) então é à prova de estratégia

Seja

- $a = f(v_i, v_{-i})$ e $a' = f(v'_i, v_{-i})$
- $p_a = p(v_i, v_{-i})$ e $p_{a'} = p(v'_i, v_{-i})$

A utilidade de i quando diz a verdade é $v_i(a) - p_a$

Mas, por (b), o mecanismo otimiza para cada jogador

$$f(v_i, v_{-i}) = a \in \operatorname{arg\,max}\{v_i(a) - p_a : a \in \mathrm{Im}_{f(\cdot, v_{-i})}\}$$

Portanto, $v_i(a) - p_a \geq v_i(a') - p_{a'}$

Prova

Vamos mostrar que se um mecanismo é à prova de estratégia então satisfaz as seguintes condições (a) e (b)

Seja i um jogador, onde v_i é a sua real valoração

(a) é necessária:

Se para algum v_i':

- $f(v_i, v_{-i}) = f(v_i', v_{-i})$
- mas $p_i(v_i, v_{-i}) > p_i(v_i', v_{-i})$

então i poderia aumentar a sua utilidade declarando v_i'

Prova

Vamos mostrar que se um mecanismo é à prova de estratégia então satisfaz as seguintes condições (a) e (b)

Seja i um jogador, onde v_i é a sua real valoração

(b) é necessária

Se $f(v_i, v_{-i}) \notin \arg\max\{v_i(a) - p_a \in \mathrm{Im}_{f(\cdot, v_{-i})}\}$

Seja $a' \in \arg\max\{v_i(a) - p_a : a \in \mathrm{Im}_{f(\cdot, v_{-i})}\}$

Portanto existe v_i' tal que $a' = f(v_i', v_{-i})$

i poderia aumentar a sua utilidade declarando v_i' $\square$