

MO829
Tópicos em Teoria da Computação
Teoria dos Jogos Algorítmica

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2017

Jogos de formação de redes

Jogo de conexão local

Jogo de conexão local

- n jogadores

Jogo de conexão local

- n jogadores
- querem formar uma rede com n vértices

Jogo de conexão local

- n jogadores
- querem formar uma rede com n vértices
- cada jogador escolher com quem irá se conectar

Jogo de conexão local

- n jogadores
- querem formar uma rede com n vértices
- cada jogador escolher com quem irá se conectar
- as escolhas dos jogadores formam um grafo G

Jogo de conexão local

- n jogadores
- querem formar uma rede com n vértices
- cada jogador escolher com quem irá se conectar
- as escolhas dos jogadores formam um grafo G

Custo para cada jogador:

Jogo de conexão local

- n jogadores
- querem formar uma rede com n vértices
- cada jogador escolher com quem irá se conectar
- as escolhas dos jogadores formam um grafo G

Custo para cada jogador:

- Custo por ligação: $\alpha > 0$

Jogo de conexão local

- n jogadores
- querem formar uma rede com n vértices
- cada jogador escolher com quem irá se conectar
- as escolhas dos jogadores formam um grafo G

Custo para cada jogador:

- Custo por ligação: $\alpha > 0$
- Custo por distâncias: soma da distância em G a cada outro vértice

Jogo de conexão local

- n jogadores
- querem formar uma rede com n vértices
- cada jogador escolher com quem irá se conectar
- as escolhas dos jogadores formam um grafo G

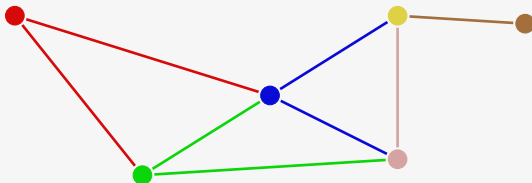
Custo para cada jogador:

- Custo por ligação: $\alpha > 0$
- Custo por distâncias: soma da distância em G a cada outro vértice
- Se N_v é o conjunto de vértices a quem v se ligou, então

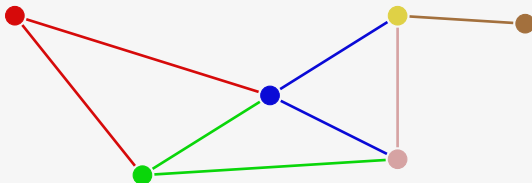
$$c_v(G) = \alpha |N_v| + \sum_{u \in [n]} d_G(u, v),$$

Exemplo

Exemplo

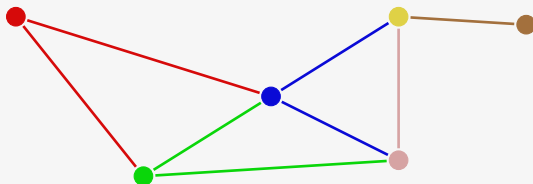


Exemplo



Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

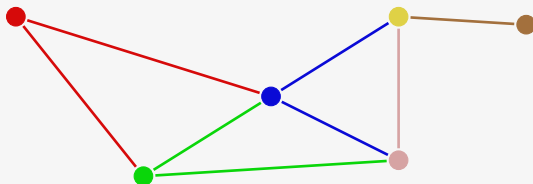
Exemplo



Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- verde: $2 \cdot 2 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$

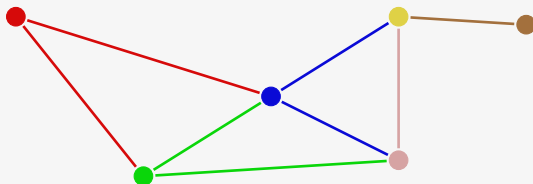
Exemplo



Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- verde: $2 \cdot 2 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- azul: $2 \cdot 2 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$

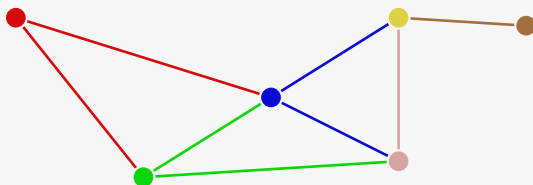
Exemplo



Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- verde: $2 \cdot 2 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- azul: $2 \cdot 2 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$
- marrom: $1 \cdot 2 + (1 + 2 + 2 + 3 + 3) = 2 + 11 = 13$

Exemplo

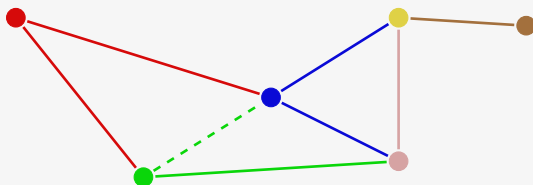


Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- verde: $2 \cdot 2 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- azul: $2 \cdot 2 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$
- marrom: $1 \cdot 2 + (1 + 2 + 2 + 3 + 3) = 2 + 11 = 13$

É um equilíbrio?

Exemplo



Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- verde: $2 \cdot 2 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- azul: $2 \cdot 2 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$
- marrom: $1 \cdot 2 + (1 + 2 + 2 + 3 + 3) = 2 + 11 = 13$

É um equilíbrio?

Se o verde se desligar do azul seu custo cai para

$$1 \cdot 2 + (1 + 2 + 1 + 2 + 3) = 2 + 9 = 11 < 12$$

Comentários

Comentários

- o valor de α afeta as escolhas dos jogadores

Comentários

- o valor de α afeta as escolhas dos jogadores
- vamos considerar estratégias puras apenas

Comentários

- o valor de α afeta as escolhas dos jogadores
- vamos considerar estratégias puras apenas
- um perfil de estratégias induz um grafo G

Comentários

- o valor de α afeta as escolhas dos jogadores
- vamos considerar estratégias puras apenas
- um perfil de estratégias induz um grafo G
 - ▶ falaremos sobre o grafo ao invés do perfil

Comentários

- o valor de α afeta as escolhas dos jogadores
- vamos considerar estratégias puras apenas
- um perfil de estratégias induz um grafo G
 - ▶ falaremos sobre o grafo ao invés do perfil
- um equilíbrio G é conexo e cada aresta é paga por um único jogador

Comentários

- o valor de α afeta as escolhas dos jogadores
- vamos considerar estratégias puras apenas
- um perfil de estratégias induz um grafo G
 - ▶ falaremos sobre o grafo ao invés do perfil
- um equilíbrio G é conexo e cada aresta é paga por um único jogador

Sempre existe equilíbrio de estratégias puras?

Comentários

- o valor de α afeta as escolhas dos jogadores
- vamos considerar estratégias puras apenas
- um perfil de estratégias induz um grafo G
 - ▶ falaremos sobre o grafo ao invés do perfil
- um equilíbrio G é conexo e cada aresta é paga por um único jogador

Sempre existe equilíbrio de estratégias puras?

Lema:

Comentários

- o valor de α afeta as escolhas dos jogadores
- vamos considerar estratégias puras apenas
- um perfil de estratégias induz um grafo G
 - ▶ falaremos sobre o grafo ao invés do perfil
- um equilíbrio G é conexo e cada aresta é paga por um único jogador

Sempre existe equilíbrio de estratégias puras?

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer **estrela** é um equilíbrio.

Comentários

- o valor de α afeta as escolhas dos jogadores
- vamos considerar estratégias puras apenas
- um perfil de estratégias induz um grafo G
 - ▶ falaremos sobre o grafo ao invés do perfil
- um equilíbrio G é conexo e cada aresta é paga por um único jogador

Sempre existe equilíbrio de estratégias puras?

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer **estrela** é um equilíbrio.

Se $\alpha \leq 1$ então o **grafo completo** é um equilíbrio.

Sempre existe equilíbrio

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer **estrela** é um equilíbrio.

Se $\alpha \leq 1$ então o **grafo completo** é um equilíbrio.

Sempre existe equilíbrio

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer **estrela** é um equilíbrio.

Se $\alpha \leq 1$ então o **grafo completo** é um equilíbrio.

Prova:

Sempre existe equilíbrio

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer **estrela** é um equilíbrio.

Se $\alpha \leq 1$ então o **grafo completo** é um equilíbrio.

Prova:

Se $\alpha \geq 1$ e G é uma estrela, qualquer atribuição das arestas de G aos vértices resulta em um equilíbrio:

Sempre existe equilíbrio

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer **estrela** é um equilíbrio.

Se $\alpha \leq 1$ então o **grafo completo** é um equilíbrio.

Prova:

Se $\alpha \geq 1$ e G é uma estrela, qualquer atribuição das arestas de G aos vértices resulta em um equilíbrio:

- nenhum vértice pode deixar de pagar uma aresta sem aumentar o seu custo para infinito (grafo desconexo)

Sempre existe equilíbrio

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer **estrela** é um equilíbrio.

Se $\alpha \leq 1$ então o **grafo completo** é um equilíbrio.

Prova:

Se $\alpha \geq 1$ e G é uma estrela, qualquer atribuição das arestas de G aos vértices resulta em um equilíbrio:

- nenhum vértice pode deixar de pagar uma aresta sem aumentar o seu custo para infinito (grafo desconexo)
- nenhum vértice tem interesse em pagar por uma aresta a mais, pois aumenta seu custo de pelo menos $\alpha \geq 1$ e diminui seu custo de apenas 1

Sempre existe equilíbrio

Sempre existe equilíbrio

Se $\alpha \leq 1$ e G é o grafo completo, qualquer atribuição das arestas de G aos vértices resulta em um equilíbrio:

Sempre existe equilíbrio

Se $\alpha \leq 1$ e G é o grafo completo, qualquer atribuição das arestas de G aos vértices resulta em um equilíbrio:

- nenhum vértice ganha ao deixar de pagar uma aresta pois uma distância aumenta de 1 para 2, e só economiza $\alpha \leq 1$

Custo e ótimo social

Custo e ótimo social

O custo social de um grafo G é

$$\mathbf{cs}(G) = \alpha |E_G| + \sum_{u \in [n]} \sum_{v \in [n]} d_G(u, v)$$

Custo e ótimo social

O custo social de um grafo G é

$$\mathbf{cs}(G) = \alpha |E_G| + \sum_{u \in [n]} \sum_{v \in [n]} d_G(u, v)$$

Ou seja, a soma dos custos dos jogadores

Custo e ótimo social

O custo social de um grafo G é

$$\text{cs}(G) = \alpha |E_G| + \sum_{u \in [n]} \sum_{v \in [n]} d_G(u, v)$$

Ou seja, a soma dos custos dos jogadores

Qual o valor do custo social **ótimo**?

Custo e ótimo social

O custo social de um grafo G é

$$\text{cs}(G) = \alpha |E_G| + \sum_{u \in [n]} \sum_{v \in [n]} d_G(u, v)$$

Ou seja, a soma dos custos dos jogadores

Qual o valor do custo social **ótimo**?

Teorema:

Custo e ótimo social

O custo social de um grafo G é

$$\text{cs}(G) = \alpha |E_G| + \sum_{u \in [n]} \sum_{v \in [n]} d_G(u, v)$$

Ou seja, a soma dos custos dos jogadores

Qual o valor do custo social **ótimo**?

Teorema: Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima.

Custo e ótimo social

O custo social de um grafo G é

$$\text{cs}(G) = \alpha |E_G| + \sum_{u \in [n]} \sum_{v \in [n]} d_G(u, v)$$

Ou seja, a soma dos custos dos jogadores

Qual o valor do custo social **ótimo**?

Teorema: Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima. Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Custo e ótimo social

Teorema: Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima. Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Prova:

Custo e ótimo social

Teorema: Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima. Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Prova: Solução com m aresta tem custo pelo menos

Custo e ótimo social

Teorema: Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima. Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Prova: Solução com m aresta tem custo pelo menos

$$2(n(n-1) - 2m) + 2m + \alpha m$$

Custo e ótimo social

Teorema: Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima. Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Prova: Solução com m aresta tem custo pelo menos

$$2(n(n-1) - 2m) + 2m + \alpha m = 2n(n-1) - (2-\alpha)m$$

Custo e ótimo social

Teorema: Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima. Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Prova: Solução com m aresta tem custo pelo menos

$$2(n(n-1) - 2m) + 2m + \alpha m = 2n(n-1) - (2-\alpha)m$$

- Se $\alpha < 2$, só há uma solução ótima: o grafo completo

Custo e ótimo social

Teorema: Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima. Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Prova: Solução com m aresta tem custo pelo menos

$$2(n(n-1) - 2m) + 2m + \alpha m = 2n(n-1) - (2-\alpha)m$$

- Se $\alpha < 2$, só há uma solução ótima: o grafo completo
- Se $\alpha > 2$, qualquer estrela é ótima (tem m mínimo possível e minimiza a soma das distâncias)

Custo e ótimo social

Teorema: Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima. Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Prova: Solução com m aresta tem custo pelo menos

$$2(n(n-1) - 2m) + 2m + \alpha m = 2n(n-1) - (2-\alpha)m$$

- Se $\alpha < 2$, só há uma solução ótima: o grafo completo
- Se $\alpha > 2$, qualquer estrela é ótima (tem m mínimo possível e minimiza a soma das distâncias)
- Se $\alpha = 2$, qualquer grafo que contém uma estrela é ótimo

Preço da estabilidade

Preço da estabilidade

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela é um equilíbrio.

Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Preço da estabilidade

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela é um equilíbrio.

Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Teorema:

Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima. Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Preço da estabilidade

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela é um equilíbrio.

Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Teorema:

Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima. Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

O preço da estabilidade é:

Preço da estabilidade

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela é um equilíbrio.

Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Teorema:

Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima. Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

O preço da estabilidade é:

- 1 para $\alpha \leq 1$

Preço da estabilidade

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela é um equilíbrio.

Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Teorema:

Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima. Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

O preço da estabilidade é:

- 1 para $\alpha \leq 1$
- 1 para $\alpha \geq 2$

Preço da estabilidade

Lema:

Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela é um equilíbrio.

Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Teorema:

Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima. Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

O preço da estabilidade é:

- 1 para $\alpha \leq 1$
- 1 para $\alpha \geq 2$
- Mas, e para $1 < \alpha < 2$?

Preço da estabilidade

Preço da estabilidade

Teorema:

Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Preço da estabilidade

Teorema:

Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Prova: O grafo completo é única solução ótima, e tem custo

Preço da estabilidade

Teorema:

Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Prova: O **grafo completo** é única solução ótima, e tem custo

$$n(n-1) + \alpha \frac{n(n-1)}{2} =$$

Preço da estabilidade

Teorema:

Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Prova: O **grafo completo** é única solução ótima, e tem custo

$$n(n-1) + \alpha \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(2+\alpha)n(n-1)}{2}$$

Preço da estabilidade

Teorema:

Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Prova: O **grafo completo** é única solução ótima, e tem custo

$$n(n-1) + \alpha \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(2+\alpha)n(n-1)}{2} > \frac{3n(n-1)}{2}$$

Preço da estabilidade

Teorema:

Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Prova: O **grafo completo** é única solução ótima, e tem custo

$$n(n-1) + \alpha \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(2+\alpha)n(n-1)}{2} > \frac{3n(n-1)}{2}$$

E **estrelas** são equilíbrios de custo

Preço da estabilidade

Teorema:

Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Prova: O **grafo completo** é única solução ótima, e tem custo

$$n(n-1) + \alpha \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(2+\alpha)n(n-1)}{2} > \frac{3n(n-1)}{2}$$

E **estrelas** são equilíbrios de custo

$$2(n-1) + 2(n-1)(n-2) + \alpha(n-1)$$

Preço da estabilidade

Teorema:

Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Prova: O **grafo completo** é única solução ótima, e tem custo

$$n(n-1) + \alpha \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(2+\alpha)n(n-1)}{2} > \frac{3n(n-1)}{2}$$

E **estrelas** são equilíbrios de custo

$$\begin{aligned} 2(n-1) + 2(n-1)(n-2) + \alpha(n-1) \\ = (2 + 2(n-2) + \alpha)(n-1) \end{aligned}$$

Preço da estabilidade

Teorema:

Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Prova: O **grafo completo** é única solução ótima, e tem custo

$$n(n-1) + \alpha \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(2+\alpha)n(n-1)}{2} > \frac{3n(n-1)}{2}$$

E **estrelas** são equilíbrios de custo

$$\begin{aligned} & 2(n-1) + 2(n-1)(n-2) + \alpha(n-1) \\ &= (2 + 2(n-2) + \alpha)(n-1) \\ &= (2n - 2 + \alpha)(n-1) \end{aligned}$$

Preço da estabilidade

Teorema:

Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Prova: O **grafo completo** é única solução ótima, e tem custo

$$n(n-1) + \alpha \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(2+\alpha)n(n-1)}{2} > \frac{3n(n-1)}{2}$$

E **estrelas** são equilíbrios de custo

$$\begin{aligned} 2(n-1) + 2(n-1)(n-2) + \alpha(n-1) \\ &= (2 + 2(n-2) + \alpha)(n-1) \\ &= (2n - 2 + \alpha)(n-1) \\ &< 2n(n-1) \end{aligned}$$

Preço da estabilidade

Teorema:

Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Prova: O **grafo completo** é única solução ótima, e tem custo

$$n(n-1) + \alpha \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(2+\alpha)n(n-1)}{2} > \frac{3n(n-1)}{2}$$

E **estrelas** são equilíbrios de custo

$$\begin{aligned} 2(n-1) + 2(n-1)(n-2) + \alpha(n-1) \\ &= (2 + 2(n-2) + \alpha)(n-1) \\ &= (2n - 2 + \alpha)(n-1) \\ &< 2n(n-1) \end{aligned}$$

$$\text{Logo PoS} < \frac{2n(n-1)}{3n(n-1)/2} = \frac{4}{3}$$

Preço da anarquia

Preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o **grafo completo** é o único equilíbrio, e é solução ótima:

Preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o **grafo completo** é o único equilíbrio, e é solução ótima:

- o **preço da anarquia** é 1 para $\alpha < 1$

Preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o **grafo completo** é o único equilíbrio, e é solução ótima:

- o **preço da anarquia** é 1 para $\alpha < 1$

Suponha então que $\alpha \geq 1$

Preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o **grafo completo** é o único equilíbrio, e é solução ótima:

- o **preço da anarquia** é 1 para $\alpha < 1$

Suponha então que $\alpha \geq 1$

Diâmetro: distância máxima entre dois vértices do grafo

Preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o **grafo completo** é o único equilíbrio, e é solução ótima:

- o **preço da anarquia** é 1 para $\alpha < 1$

Suponha então que $\alpha \geq 1$

Diâmetro: distância máxima entre dois vértices do grafo

Lema: Se um grafo é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o **grafo completo** é o único equilíbrio, e é solução ótima:

- o **preço da anarquia** é 1 para $\alpha < 1$

Suponha então que $\alpha \geq 1$

Diâmetro: distância máxima entre dois vértices do grafo

Lema: Se um grafo é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o **preço da anarquia** é $O(\sqrt{\alpha})$.

O Teorema vindo do Lema

O Teorema vindo do Lema

Lema: Se um grafo é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

O Teorema vindo do Lema

Lema: Se um grafo é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o **preço da anarquia** é $O(\sqrt{\alpha})$.

O Teorema vindo do Lema

Lema: Se um grafo é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o **preço da anarquia** é $O(\sqrt{\alpha})$.

Prova: Pelo Lema, basta provar que o diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$.

Diâmetro de um equilíbrio

Diâmetro de um equilíbrio

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o preço da anarquia é $O(\sqrt{\alpha})$.

Diâmetro de um equilíbrio

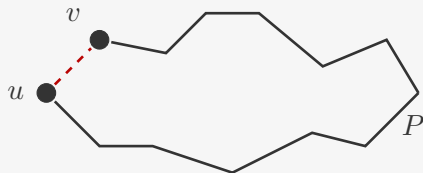
Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o preço da anarquia é $O(\sqrt{\alpha})$.

Prova: Sejam u e v tq $d(u, v) \geq 2k$ para algum $k \geq 1$.

Diâmetro de um equilíbrio

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o preço da anarquia é $O(\sqrt{\alpha})$.

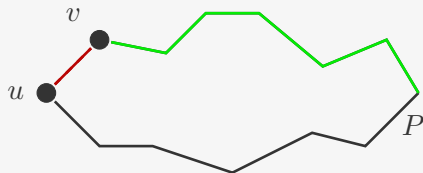
Prova: Sejam u e v tq $d(u, v) \geq 2k$ para algum $k \geq 1$.



Diâmetro de um equilíbrio

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o preço da anarquia é $O(\sqrt{\alpha})$.

Prova: Sejam u e v tq $d(u, v) \geq 2k$ para algum $k \geq 1$.



Se u passar a pagar pela aresta $\{u, v\}$:

- gasta mais α

Diâmetro de um equilíbrio

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o preço da anarquia é $O(\sqrt{\alpha})$.

Prova: Sejam u e v tq $d(u, v) \geq 2k$ para algum $k \geq 1$.



Se u passar a pagar pela aresta $\{u, v\}$:

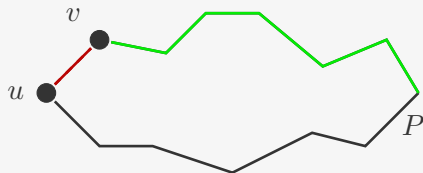
- gasta mais α
- economiza nas distâncias pelo menos

$$(2k-1) + ((2k-1)-2) + \dots + ((2k-i) - (i+1)) + \dots + 3 + 1 = k^2$$

Diâmetro de um equilíbrio

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o preço da anarquia é $O(\sqrt{\alpha})$.

Prova: Sejam u e v tq $d(u, v) \geq 2k$ para algum $k \geq 1$.



Se u passar a pagar pela aresta $\{u, v\}$:

- gasta mais α
- economiza nas distâncias pelo menos

$$(2k-1) + ((2k-1)-2) + \dots + ((2k-i) - (i+1)) + \dots + 3 + 1 = k^2$$

Se $d(u, v) \geq 2k > 2\sqrt{\alpha}$, não é um equilíbrio!

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$, pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$, pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Se G tem diâmetro d , o custo das distâncias é $O(dn^2)$.

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$, pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Se G tem diâmetro d , o custo das distâncias é $O(dn^2)$.

Quebramos o custo das arestas em duas partes:

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$, pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Se G tem diâmetro d , o custo das distâncias é $O(dn^2)$.

Quebramos o custo das arestas em duas partes:

- arestas de corte

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$, pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Se G tem diâmetro d , o custo das distâncias é $O(dn^2)$.

Quebramos o custo das arestas em duas partes:

- arestas de corte
- arestas não de corte

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$, pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Se G tem diâmetro d , o custo das distâncias é $O(dn^2)$.

Quebramos o custo das arestas em duas partes:

- arestas de corte
- arestas não de corte

No máximo $n - 1$ arestas de corte.

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$, pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Se G tem diâmetro d , o custo das distâncias é $O(dn^2)$.

Quebramos o custo das arestas em duas partes:

- arestas de corte
- arestas não de corte

No máximo $n - 1$ arestas de corte.

Então arestas de corte custam menos que αn .

Arestas não de corte

Vamos mostrar que cada vértice u :

Arestas não de corte

Vamos mostrar que cada vértice u :

- paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte

Arestas não de corte

Vamos mostrar que cada vértice u :

- paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte
- Disso segue que custo destas arestas é $O(n^2d)$

Arestas não de corte

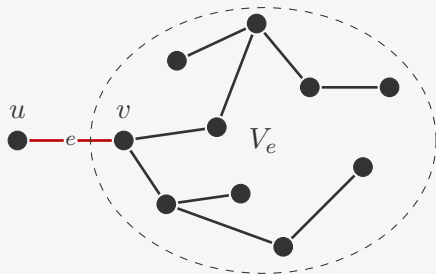
Vamos mostrar que cada vértice u :

- paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte
- Disso segue que custo destas arestas é $O(n^2d)$
- V_e : conjunto dos w tais que todo caminho mínimo de u a w usa e

Arestas não de corte

Vamos mostrar que cada vértice u :

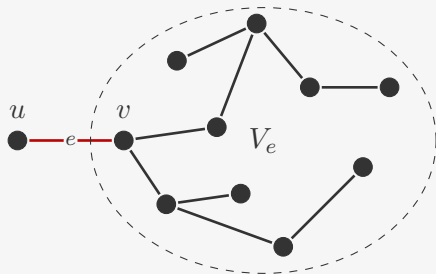
- paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte
- Disso segue que custo destas arestas é $O(n^2d)$
- V_e : conjunto dos w tais que todo caminho mínimo de u a w usa e



Arestas não de corte

Vamos mostrar que cada vértice u :

- paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte
- Disso segue que custo destas arestas é $O(n^2d)$
- V_e : conjunto dos w tais que todo caminho mínimo de u a w usa e

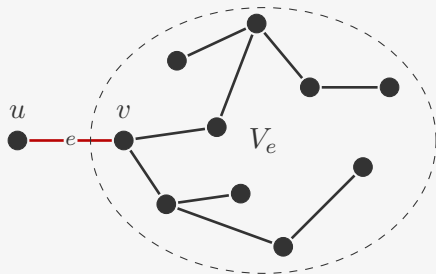


Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta

Arestas não de corte

Vamos mostrar que cada vértice u :

- paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte
- Disso segue que custo destas arestas é $O(n^2d)$
- V_e : conjunto dos w tais que todo caminho mínimo de u a w usa e



Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta

Aumenta de quanto?

Arestas não de corte

Arestas não de corte

Seja:

Arestas não de corte

Seja:

- C um circuito de comprimento mínimo contendo e

Arestas não de corte

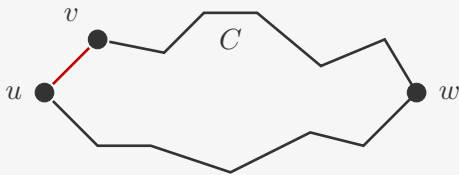
Seja:

- C um circuito de comprimento mínimo contendo e
- w o vértice mais distante de u em C

Arestas não de corte

Seja:

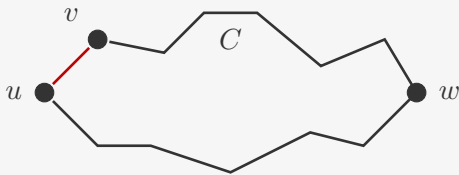
- C um circuito de comprimento mínimo contendo e
- w o vértice mais distante de u em C



Arestas não de corte

Seja:

- C um circuito de comprimento mínimo contendo e
- w o vértice mais distante de u em C

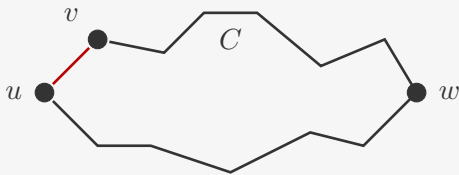


Note que:

Arestas não de corte

Seja:

- C um circuito de comprimento mínimo contendo e
- w o vértice mais distante de u em C



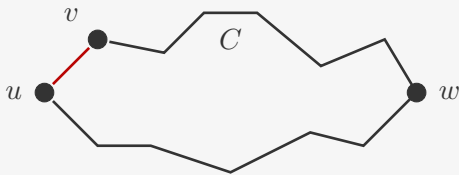
Note que:

- o trecho C_{uw} é um caminho mínimo em G , logo tem comprimento no máximo d

Arestas não de corte

Seja:

- C um circuito de comprimento mínimo contendo e
- w o vértice mais distante de u em C



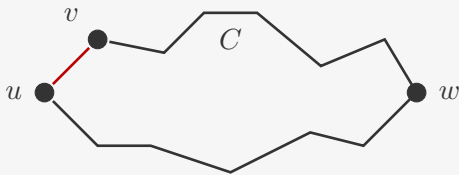
Note que:

- o trecho C_{uw} é um caminho mínimo em G , logo tem comprimento no máximo d
- o trecho C_{vw} é um caminho mínimo em G , logo tem comprimento no máximo d

Arestas não de corte

Seja:

- C um circuito de comprimento mínimo contendo e
- w o vértice mais distante de u em C



Note que:

- o trecho C_{uw} é um caminho mínimo em G , logo tem comprimento no máximo d
- o trecho C_{vw} é um caminho mínimo em G , logo tem comprimento no máximo d

Assim sendo $d(u, v)$ após a remoção de e é no máximo $2d$

Arestas não de corte

Arestas não de corte

Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta

Arestas não de corte

Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta

Aumenta de quanto?

Arestas não de corte

Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta

Aumenta de quanto?

- Distância de u a v sobe para no máximo $2d$

Arestas não de corte

Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta

Aumenta de quanto?

- Distância de u a v sobe para no máximo $2d$
- Custo de u desce de α , e sobe de no máximo $2d|V_e|$

Arestas não de corte

Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta

Aumenta de quanto?

- Distância de u a v sobe para no máximo $2d$
- Custo de u desce de α , e sobe de no máximo $2d|V_e|$
- Ou seja, $2d|V_e| \geq \alpha$ e $|V_e| \geq \alpha/2d$

Arestas não de corte

Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta

Aumenta de quanto?

- Distância de u a v sobe para no máximo $2d$
- Custo de u desce de α , e sobe de no máximo $2d|V_e|$
- Ou seja, $2d|V_e| \geq \alpha$ e $|V_e| \geq \alpha/2d$

V_e 's são disjuntos, logo o número de V_e 's é no máximo

Arestas não de corte

Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta

Aumenta de quanto?

- Distância de u a v sobe para no máximo $2d$
- Custo de u desce de α , e sobe de no máximo $2d|V_e|$
- Ou seja, $2d|V_e| \geq \alpha$ e $|V_e| \geq \alpha/2d$

V_e 's são disjuntos, logo o número de V_e 's é no máximo

$$\frac{n}{\frac{\alpha}{2d}}$$

Arestas não de corte

Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta

Aumenta de quanto?

- Distância de u a v sobe para no máximo $2d$
- Custo de u desce de α , e sobe de no máximo $2d|V_e|$
- Ou seja, $2d|V_e| \geq \alpha$ e $|V_e| \geq \alpha/2d$

V_e 's são disjuntos, logo o número de V_e 's é no máximo

$$\frac{n}{\frac{\alpha}{2d}} = \frac{2dn}{\alpha}$$

Arestas não de corte

Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta

Aumenta de quanto?

- Distância de u a v sobe para no máximo $2d$
- Custo de u desce de α , e sobe de no máximo $2d|V_e|$
- Ou seja, $2d|V_e| \geq \alpha$ e $|V_e| \geq \alpha/2d$

V_e 's são disjuntos, logo o número de V_e 's é no máximo

$$\frac{n}{\frac{\alpha}{2d}} = \frac{2dn}{\alpha} = \mathcal{O}\left(\frac{dn}{\alpha}\right)$$

Arestas não de corte

Ao remover e , a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta

Aumenta de quanto?

- Distância de u a v sobe para no máximo $2d$
- Custo de u desce de α , e sobe de no máximo $2d|V_e|$
- Ou seja, $2d|V_e| \geq \alpha$ e $|V_e| \geq \alpha/2d$

V_e 's são disjuntos, logo o número de V_e 's é no máximo

$$\frac{n}{\frac{\alpha}{2d}} = \frac{2dn}{\alpha} = O\left(\frac{dn}{\alpha}\right)$$

Logo cada vértice paga por $O(nd/\alpha)$ arestas não de corte

Recapitulando o lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Recapitulando o lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova:

Recapitulando o lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova:

- Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$

Recapitulando o lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova:

- Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$
- O custo das distâncias é $O(dn^2)$

Recapitulando o lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova:

- Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$
- O custo das distâncias é $O(dn^2)$
- Arestas de corte:

Recapitulando o lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova:

- Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$
- O custo das distâncias é $O(dn^2)$
- Arestas de corte:
 - ▶ custam menos que αn

Recapitulando o lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova:

- Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$
- O custo das distâncias é $O(dn^2)$
- Arestas de corte:
 - ▶ custam menos que αn
- Arestas não de corte:

Recapitulando o lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova:

- Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$
- O custo das distâncias é $O(dn^2)$
- Arestas de corte:
 - ▶ custam menos que αn
- Arestas não de corte:
 - ▶ cada vértice paga por $O(dn/\alpha)$ arestas

Recapitulando o lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova:

- Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$
- O custo das distâncias é $O(dn^2)$
- Arestas de corte:
 - ▶ custam menos que αn
- Arestas não de corte:
 - ▶ cada vértice paga por $O(dn/\alpha)$ arestas
 - ▶ ou seja, cada um paga $O(dn)$

Recapitulando o lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova:

- Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$
- O custo das distâncias é $O(dn^2)$
- Arestas de corte:
 - ▶ custam menos que αn
- Arestas não de corte:
 - ▶ cada vértice paga por $O(dn/\alpha)$ arestas
 - ▶ ou seja, cada um paga $O(dn)$
 - ▶ no total, é pago $O(dn^2)$

Recapitulando o lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d , então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova:

- Ótimo tem custo $\Omega(\alpha n + n^2)$
- O custo das distâncias é $O(dn^2)$
- Arestas de corte:
 - ▶ custam menos que αn
- Arestas não de corte:
 - ▶ cada vértice paga por $O(dn/\alpha)$ arestas
 - ▶ ou seja, cada um paga $O(dn)$
 - ▶ no total, é pago $O(dn^2)$

Resultado: o custo social do grafo em equilíbrio é no máximo $O(d)$ vezes o custo social ótimo

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$. Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$. Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$. Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

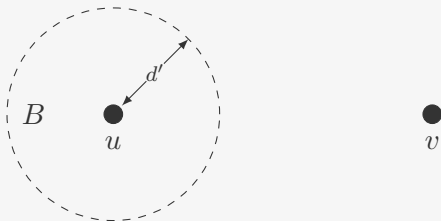
B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$. Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .

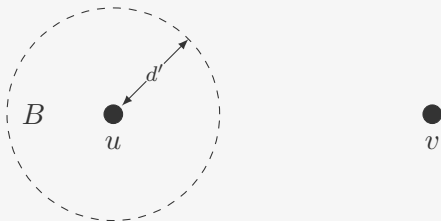


Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$. Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .



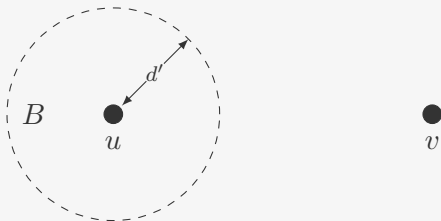
Se v pagar por $\{u, v\}$, a distância de v a cada vértice de B , que era pelo menos $d - d'$, cai para no máximo $d' + 1$.

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $O(1)$ se $\alpha = O(\sqrt{n})$. Em geral, o preço da anarquia é $O(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.

B : conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u .



Se v pagar por $\{u, v\}$, a distância de v a cada vértice de B , que era pelo menos $d - d'$, cai para no máximo $d' + 1$.

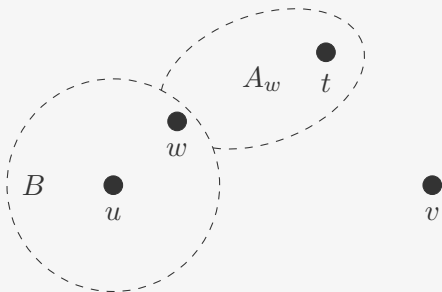
Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq |B|(d - 2d' - 1) \geq (d - 1)|B|/2$.

Segundo resultado

A_w : conjunto dos vértices $t \notin B$ tais que há caminho mínimo de u a t que deixa B por w

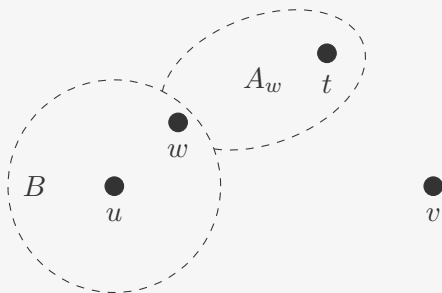
Segundo resultado

A_w : conjunto dos vértices $t \notin B$ tais que há caminho mínimo de u a t que deixa B por w



Segundo resultado

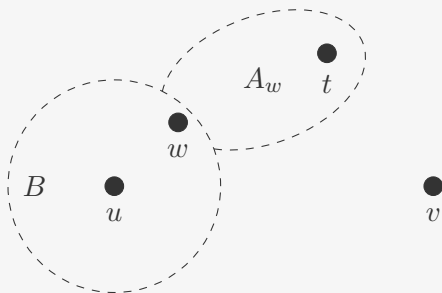
A_w : conjunto dos vértices $t \notin B$ tais que há caminho mínimo de u a t que deixa B por w



Se $A_w \neq \emptyset$, então $d(u, w) = d'$.

Segundo resultado

A_w : conjunto dos vértices $t \notin B$ tais que há caminho mínimo de u a t que deixa B por w



Se $A_w \neq \emptyset$, então $d(u, w) = d'$.

Se u pagar por $\{u, w\}$, economiza $|A_w|(d' - 1)$.

Segundo resultado

Se u pagar por $\{u, w\}$, economiza $|A_w|(d' - 1)$.

Segundo resultado

Se u pagar por $\{u, w\}$, economiza $|A_w|(d' - 1)$.

Logo $\alpha \geq |A_w|(d' - 1)$.

Segundo resultado

Se u pagar por $\{u, w\}$, economiza $|A_w|(d' - 1)$.

Logo $\alpha \geq |A_w|(d' - 1)$.

Note que existe w tal que $|A_w| \geq (n - |B|)/|B|$:

Segundo resultado

Se u pagar por $\{u, w\}$, economiza $|A_w|(d' - 1)$.

Logo $\alpha \geq |A_w|(d' - 1)$.

Note que existe w tal que $|A_w| \geq (n - |B|)/|B|$:

- Existem $n - |B|$ vértices fora de B

Segundo resultado

Se u pagar por $\{u, w\}$, economiza $|A_w|(d' - 1)$.

Logo $\alpha \geq |A_w|(d' - 1)$.

Note que existe w tal que $|A_w| \geq (n - |B|)/|B|$:

- Existem $n - |B|$ vértices fora de B
- Existem $|B|$ conjuntos A_w

Segundo resultado

Se u pagar por $\{u, w\}$, economiza $|A_w|(d' - 1)$.

Logo $\alpha \geq |A_w|(d' - 1)$.

Note que existe w tal que $|A_w| \geq (n - |B|)/|B|$:

- Existem $n - |B|$ vértices fora de B
- Existem $|B|$ conjuntos A_w
- A média de vértices em cada conjunto A_w é pelo menos $(n - |B|)/|B|$

Segundo resultado

Se u pagar por $\{u, w\}$, economiza $|A_w|(d' - 1)$.

Logo $\alpha \geq |A_w|(d' - 1)$.

Note que existe w tal que $|A_w| \geq (n - |B|)/|B|$:

- Existem $n - |B|$ vértices fora de B
- Existem B conjuntos A_w
- A média de vértices em cada conjunto A_w é pelo menos $(n - |B|)/|B|$
- Portanto, existe um conjunto com pelo menos $(n - |B|)/|B|$ vértices

Segundo resultado

Se u pagar por $\{u, w\}$, economiza $|A_w|(d' - 1)$.

Logo $\alpha \geq |A_w|(d' - 1)$.

Note que existe w tal que $|A_w| \geq (n - |B|)/|B|$:

- Existem $n - |B|$ vértices fora de B
- Existem $|B|$ conjuntos A_w
- A média de vértices em cada conjunto A_w é pelo menos $(n - |B|)/|B|$
- Portanto, existe um conjunto com pelo menos $(n - |B|)/|B|$ vértices

Combinando, concluímos que $\alpha \geq (d' - 1)(n - |B|)/|B|$.

Segundo resultado

Como $\alpha \geq (d' - 1)(n - |B|)/|B|$, temos que:

Segundo resultado

Como $\alpha \geq (d' - 1)(n - |B|)/|B|$, temos que:

- $\alpha \geq (d' - 1)n/|B| - (d' - 1)$

Segundo resultado

Como $\alpha \geq (d' - 1)(n - |B|)/|B|$, temos que:

- $\alpha \geq (d' - 1)n/|B| - (d' - 1)$
- i.e., $|B| \geq (d' - 1)n/(d' - 1 + \alpha)$

Segundo resultado

Como $\alpha \geq (d' - 1)(n - |B|)/|B|$, temos que:

- $\alpha \geq (d' - 1)n/|B| - (d' - 1)$
- i.e., $|B| \geq (d' - 1)n/(d' - 1 + \alpha)$
- E, como $\alpha \geq d > d'$, vale que

Segundo resultado

Como $\alpha \geq (d' - 1)(n - |B|)/|B|$, temos que:

- $\alpha \geq (d' - 1)n/|B| - (d' - 1)$
- i.e., $|B| \geq (d' - 1)n/(d' - 1 + \alpha)$
- E, como $\alpha \geq d > d'$, vale que

$$|B|$$

Segundo resultado

Como $\alpha \geq (d' - 1)(n - |B|)/|B|$, temos que:

- $\alpha \geq (d' - 1)n/|B| - (d' - 1)$
- i.e., $|B| \geq (d' - 1)n/(d' - 1 + \alpha)$
- E, como $\alpha \geq d > d'$, vale que

$$|B| \geq \frac{(d' - 1)n}{d' - 1 + \alpha}$$

Segundo resultado

Como $\alpha \geq (d' - 1)(n - |B|)/|B|$, temos que:

- $\alpha \geq (d' - 1)n/|B| - (d' - 1)$
- i.e., $|B| \geq (d' - 1)n/(d' - 1 + \alpha)$
- E, como $\alpha \geq d > d'$, vale que

$$|B| \geq \frac{(d' - 1)n}{d' - 1 + \alpha} \geq \frac{(d' - 1)n}{d + \alpha}$$

Segundo resultado

Como $\alpha \geq (d' - 1)(n - |B|)/|B|$, temos que:

- $\alpha \geq (d' - 1)n/|B| - (d' - 1)$
- i.e., $|B| \geq (d' - 1)n/(d' - 1 + \alpha)$
- E, como $\alpha \geq d > d'$, vale que

$$|B| \geq \frac{(d' - 1)n}{d' - 1 + \alpha} \geq \frac{(d' - 1)n}{d + \alpha} \geq \frac{n(d' - 1)}{2\alpha}$$

Segundo resultado

Relembrando:

Segundo resultado

Relembrando:

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2}$$

Segundo resultado

Relembrando:

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \quad |B| \geq \frac{n(d'-1)}{2\alpha}$$

Segundo resultado

Relembrando:

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \quad |B| \geq \frac{n(d'-1)}{2\alpha} \quad d' = \left\lfloor \frac{d-1}{4} \right\rfloor$$

Segundo resultado

Relembrando:

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \quad |B| \geq \frac{n(d'-1)}{2\alpha} \quad d' = \left\lfloor \frac{d-1}{4} \right\rfloor$$

Então

Segundo resultado

Relembrando:

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \quad |B| \geq \frac{n(d'-1)}{2\alpha} \quad d' = \left\lceil \frac{d-1}{4} \right\rceil$$

Então

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2}$$

Segundo resultado

Relembrando:

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \quad |B| \geq \frac{n(d'-1)}{2\alpha} \quad d' = \left\lfloor \frac{d-1}{4} \right\rfloor$$

Então

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \geq \frac{(d-1)n(d'-1)}{4\alpha}$$

Segundo resultado

Relembrando:

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \quad |B| \geq \frac{n(d'-1)}{2\alpha} \quad d' = \left\lfloor \frac{d-1}{4} \right\rfloor$$

Então

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \geq \frac{(d-1)n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{4d'n(d'-1)}{4\alpha}$$

Segundo resultado

Relembrando:

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \quad |B| \geq \frac{n(d'-1)}{2\alpha} \quad d' = \left\lfloor \frac{d-1}{4} \right\rfloor$$

Então

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \geq \frac{(d-1)n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{4d'n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{n(d'-1)^2}{\alpha}$$

Segundo resultado

Relembrando:

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \quad |B| \geq \frac{n(d'-1)}{2\alpha} \quad d' = \left\lfloor \frac{d-1}{4} \right\rfloor$$

Então

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \geq \frac{(d-1)n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{4d'n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{n(d'-1)^2}{\alpha}$$

Ou seja, $\alpha^2 \geq n(d'-1)^2$, e

Segundo resultado

Relembrando:

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \quad |B| \geq \frac{n(d'-1)}{2\alpha} \quad d' = \left\lfloor \frac{d-1}{4} \right\rfloor$$

Então

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \geq \frac{(d-1)n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{4d'n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{n(d'-1)^2}{\alpha}$$

Ou seja, $\alpha^2 \geq n(d'-1)^2$, e

d

Segundo resultado

Relembrando:

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \quad |B| \geq \frac{n(d'-1)}{2\alpha} \quad d' = \left\lfloor \frac{d-1}{4} \right\rfloor$$

Então

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \geq \frac{(d-1)n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{4d'n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{n(d'-1)^2}{\alpha}$$

Ou seja, $\alpha^2 \geq n(d'-1)^2$, e

$$d \leq 4(d'+1)$$

Segundo resultado

Relembrando:

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \quad |B| \geq \frac{n(d'-1)}{2\alpha} \quad d' = \left\lfloor \frac{d-1}{4} \right\rfloor$$

Então

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \geq \frac{(d-1)n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{4d'n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{n(d'-1)^2}{\alpha}$$

Ou seja, $\alpha^2 \geq n(d'-1)^2$, e

$$d \leq 4(d'+1) \leq 4d' + 4$$

Segundo resultado

Relembrando:

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \quad |B| \geq \frac{n(d'-1)}{2\alpha} \quad d' = \left\lfloor \frac{d-1}{4} \right\rfloor$$

Então

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \geq \frac{(d-1)n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{4d'n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{n(d'-1)^2}{\alpha}$$

Ou seja, $\alpha^2 \geq n(d'-1)^2$, e

$$d \leq 4(d'+1) \leq 4d' + 4 = 4(d'-1) + 8$$

Segundo resultado

Relembrando:

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \quad |B| \geq \frac{n(d'-1)}{2\alpha} \quad d' = \left\lfloor \frac{d-1}{4} \right\rfloor$$

Então

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \geq \frac{(d-1)n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{4d'n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{n(d'-1)^2}{\alpha}$$

Ou seja, $\alpha^2 \geq n(d'-1)^2$, e

$$d \leq 4(d'+1) \leq 4d' + 4 = 4(d'-1) + 8 \leq 4\alpha/\sqrt{n} + 8$$

Segundo resultado

Relembrando:

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \quad |B| \geq \frac{n(d'-1)}{2\alpha} \quad d' = \left\lfloor \frac{d-1}{4} \right\rfloor$$

Então

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \geq \frac{(d-1)n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{4d'n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{n(d'-1)^2}{\alpha}$$

Ou seja, $\alpha^2 \geq n(d'-1)^2$, e

$$d \leq 4(d'+1) \leq 4d' + 4 = 4(d'-1) + 8 \leq 4\alpha/\sqrt{n} + 8$$

Do Lema segue que $\text{PoA} = O(1 + \alpha/\sqrt{n})$

□

Jogo de conexão global

Jogo de conexão global

$G = (V, E)$: um digrafo com custo c_e para cada e em E

Jogo de conexão global

$G = (V, E)$: um digrafo com custo c_e para cada e em E

No jogo de conexão global temos:

Jogo de conexão global

$G = (V, E)$: um digrafo com custo c_e para cada e em E

No jogo de conexão global temos:

- k jogadores

Jogo de conexão global

$G = (V, E)$: um digrafo com custo c_e para cada e em E

No jogo de conexão global temos:

- k jogadores
- cada um com um par de vértices (s_i, t_i)

Jogo de conexão global

$G = (V, E)$: um digrafo com custo c_e para cada e em E

No jogo de conexão global temos:

- k jogadores
- cada um com um par de vértices (s_i, t_i)
- Estratégia do jogador i :

Jogo de conexão global

$G = (V, E)$: um digrafo com custo c_e para cada e em E

No jogo de conexão global temos:

- k jogadores
- cada um com um par de vértices (s_i, t_i)
- Estratégia do jogador i :
 - ▶ caminho de s_i a t_i em G

Jogo de conexão global

$G = (V, E)$: um digrafo com custo c_e para cada e em E

No jogo de conexão global temos:

- k jogadores
- cada um com um par de vértices (s_i, t_i)
- Estratégia do jogador i :
 - ▶ caminho de s_i a t_i em G
- custo para i do vetor de estratégias $S = (P_1, \dots, P_k)$:

$$\text{custo}_i(S) = \sum_{e \in P_i} \frac{c_e}{k_e},$$

onde k_e é o número de caminhos em S que usam e

Jogo de conexão global

$G = (V, E)$: um digrafo com custo c_e para cada e em E

No jogo de conexão global temos:

- k jogadores
- cada um com um par de vértices (s_i, t_i)
- Estratégia do jogador i :
 - ▶ caminho de s_i a t_i em G
- custo para i do vetor de estratégias $S = (P_1, \dots, P_k)$:

$$\text{custo}_i(S) = \sum_{e \in P_i} \frac{c_e}{k_e},$$

onde k_e é o número de caminhos em S que usam e

- Custo social $\text{cs}(S)$:

Jogo de conexão global

$G = (V, E)$: um digrafo com custo c_e para cada e em E

No jogo de conexão global temos:

- k jogadores
- cada um com um par de vértices (s_i, t_i)
- Estratégia do jogador i :
 - ▶ caminho de s_i a t_i em G
- custo para i do vetor de estratégias $S = (P_1, \dots, P_k)$:

$$\text{custo}_i(S) = \sum_{e \in P_i} \frac{c_e}{k_e},$$

onde k_e é o número de caminhos em S que usam e

- Custo social $\text{cs}(S)$:
 - ▶ soma do custo das arestas em $\cup_i P_i$

Problema da Floresta de Steiner

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com:

Problema da Floresta de Steiner

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com:

- custo c_e para cada e em E

Problema da Floresta de Steiner

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com:

- custo c_e para cada e em E
- e pares de vértices (s_i, t_i) , para $i = 1, \dots, k$

Problema da Floresta de Steiner

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com:

- custo c_e para cada e em E
- e pares de vértices (s_i, t_i) , para $i = 1, \dots, k$

Problema: Encontrar um subgrafo de G de custo mínimo que contém um caminho de s_i a t_i , para $i = 1, \dots, k$.

Problema da Floresta de Steiner

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com:

- custo c_e para cada e em E
- e pares de vértices (s_i, t_i) , para $i = 1, \dots, k$

Problema: Encontrar um subgrafo de G de custo mínimo que contém um caminho de s_i a t_i , para $i = 1, \dots, k$.

Esse problema é **NP-difícil**, mas é com ele que vamos comparar o custo dos equilíbrios.

Problema da Floresta de Steiner

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com:

- custo c_e para cada e em E
- e pares de vértices (s_i, t_i) , para $i = 1, \dots, k$

Problema: Encontrar um subgrafo de G de custo mínimo que contém um caminho de s_i a t_i , para $i = 1, \dots, k$.

Esse problema é **NP-difícil**, mas é com ele que vamos comparar o custo dos equilíbrios.

Ou seja, o **custo social ótimo** do jogo é o custo da solução do correspondente Problema da Floresta de Steiner.

Exemplo

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo s e t

Exemplo

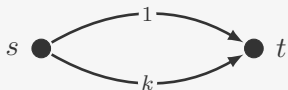
k jogadores, todos com o mesmo s e t

Digrafo:

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo s e t

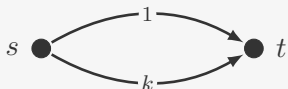
Digrafo:



Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo s e t

Digrafo:

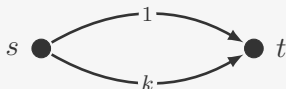


Ótimo: todos pela aresta de custo 1

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo s e t

Digrafo:



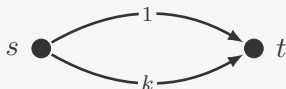
Ótimo: todos pela aresta de custo 1

- Isso é um equilíbrio: **PoS = 1**

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo s e t

Digrafo:



Ótimo: todos pela aresta de custo 1

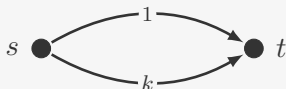
- Isso é um equilíbrio: **PoS = 1**

Outro equilíbrio: todos pela aresta de custo k :

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo s e t

Digrafo:



Ótimo: todos pela aresta de custo 1

- Isso é um equilíbrio: **PoS = 1**

Outro equilíbrio: todos pela aresta de custo k :

- **PoA = k**

Exemplo

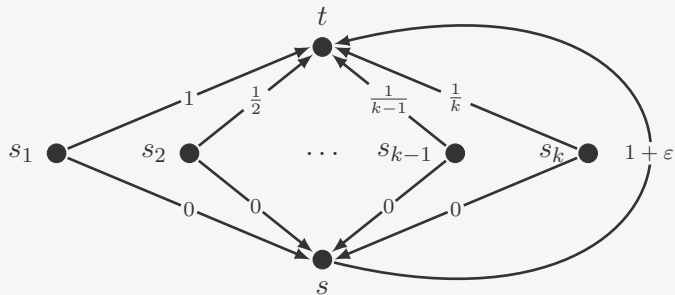
Exemplo

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo t

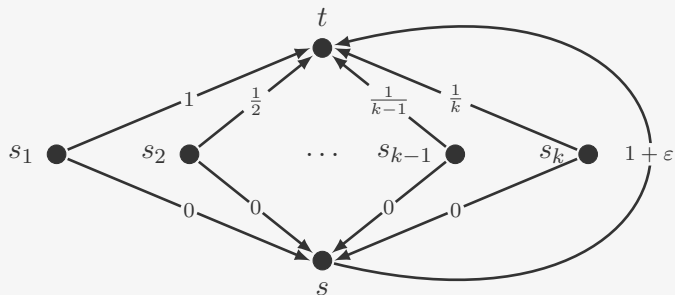
Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo t



Exemplo

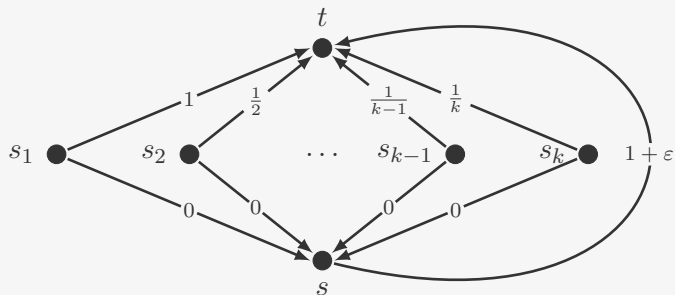
k jogadores, todos com o mesmo t



Ótimo: todos por s , a um custo total de $1 + \varepsilon$.

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo t

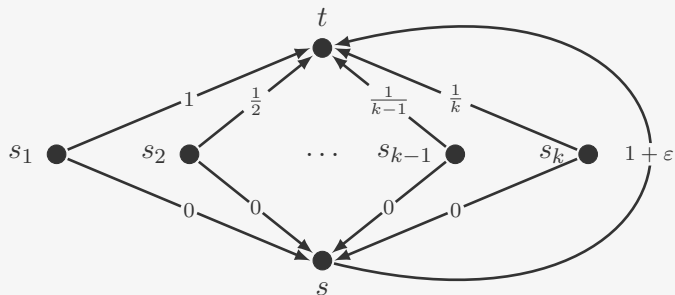


Ótimo: todos por s , a um custo total de $1 + \epsilon$.

Mas isso não é um equilíbrio: k está insatisfeito.

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo t



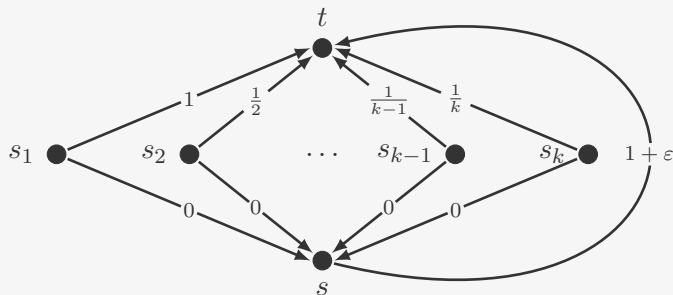
Ótimo: todos por s , a um custo total de $1 + \varepsilon$.

Mas isso não é um equilíbrio: k está insatisfeito.

Único equilíbrio: todos diretamente para t ...

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo t



Ótimo: todos por s , a um custo total de $1 + \varepsilon$.

Mas isso não é um equilíbrio: k está insatisfeito.

Único equilíbrio: todos diretamente para t ...

$$cs = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} = H_k \text{ e portanto } \mathbf{PoS} = \mathbf{PoA} = H_k$$

Função Potencial

Função Potencial

Sejam:

Função Potencial

Sejam:

- $G = (V, E)$: um digrafo

Função Potencial

Sejam:

- $G = (V, E)$: um digrafo
- c_e : custo para cada e em E

Função Potencial

Sejam:

- $G = (V, E)$: um digrafo
- c_e : custo para cada e em E
- (s_i, t_i) : pares de vértices dos jogadores $i = 1, \dots, k$

Função Potencial

Sejam:

- $G = (V, E)$: um digrafo
- c_e : custo para cada e em E
- (s_i, t_i) : pares de vértices dos jogadores $i = 1, \dots, k$
- $S = (P_1, \dots, P_k)$ um vetor de estratégias

Função Potencial

Sejam:

- $G = (V, E)$: um digrafo
- c_e : custo para cada e em E
- (s_i, t_i) : pares de vértices dos jogadores $i = 1, \dots, k$
- $S = (P_1, \dots, P_k)$ um vetor de estratégias
- k_e o número de caminhos em S que usam e

Função Potencial

Sejam:

- $G = (V, E)$: um digrafo
- c_e : custo para cada e em E
- (s_i, t_i) : pares de vértices dos jogadores $i = 1, \dots, k$
- $S = (P_1, \dots, P_k)$ um vetor de estratégias
- k_e o número de caminhos em S que usam e

Sejam:

Função Potencial

Sejam:

- $G = (V, E)$: um digrafo
- c_e : custo para cada e em E
- (s_i, t_i) : pares de vértices dos jogadores $i = 1, \dots, k$
- $S = (P_1, \dots, P_k)$ um vetor de estratégias
- k_e o número de caminhos em S que usam e

Sejam:

- $\psi_e(S) = c_e H_{k_e}$ para cada aresta e

Função Potencial

Sejam:

- $G = (V, E)$: um digrafo
- c_e : custo para cada e em E
- (s_i, t_i) : pares de vértices dos jogadores $i = 1, \dots, k$
- $S = (P_1, \dots, P_k)$ um vetor de estratégias
- k_e o número de caminhos em S que usam e

Sejam:

- $\psi_e(S) = c_e H_{k_e}$ para cada aresta e
- $\psi(S) = \sum_e \psi_e(S)$

Função Potencial

Sejam:

- $G = (V, E)$: um digrafo
- c_e : custo para cada e em E
- (s_i, t_i) : pares de vértices dos jogadores $i = 1, \dots, k$
- $S = (P_1, \dots, P_k)$ um vetor de estratégias
- k_e o número de caminhos em S que usam e

Sejam:

- $\psi_e(S) = c_e H_{k_e}$ para cada aresta e
- $\psi(S) = \sum_e \psi_e(S)$

Lema: $\text{custo}(S) \leq \psi(S) \leq H_k \text{custo}(S)$.

Função Potencial

Sejam:

- $G = (V, E)$: um digrafo
- c_e : custo para cada e em E
- (s_i, t_i) : pares de vértices dos jogadores $i = 1, \dots, k$
- $S = (P_1, \dots, P_k)$ um vetor de estratégias
- k_e o número de caminhos em S que usam e

Sejam:

- $\psi_e(S) = c_e H_{k_e}$ para cada aresta e
- $\psi(S) = \sum_e \psi_e(S)$

Lema: $\text{custo}(S) \leq \psi(S) \leq H_k \text{custo}(S)$.

Prova:

Função Potencial

Sejam:

- $G = (V, E)$: um digrafo
- c_e : custo para cada e em E
- (s_i, t_i) : pares de vértices dos jogadores $i = 1, \dots, k$
- $S = (P_1, \dots, P_k)$ um vetor de estratégias
- k_e o número de caminhos em S que usam e

Sejam:

- $\psi_e(S) = c_e H_{k_e}$ para cada aresta e
- $\psi(S) = \sum_e \psi_e(S)$

Lema: $\text{custo}(S) \leq \psi(S) \leq H_k \text{custo}(S)$.

Prova: Para cada e em S ,

Função Potencial

Sejam:

- $G = (V, E)$: um digrafo
- c_e : custo para cada e em E
- (s_i, t_i) : pares de vértices dos jogadores $i = 1, \dots, k$
- $S = (P_1, \dots, P_k)$ um vetor de estratégias
- k_e o número de caminhos em S que usam e

Sejam:

- $\psi_e(S) = c_e H_{k_e}$ para cada aresta e
- $\psi(S) = \sum_e \psi_e(S)$

Lema: $\text{custo}(S) \leq \psi(S) \leq H_k \text{custo}(S)$.

Prova: Para cada e em S , $\psi_e(S) \geq c_e$

Função Potencial

Sejam:

- $G = (V, E)$: um digrafo
- c_e : custo para cada e em E
- (s_i, t_i) : pares de vértices dos jogadores $i = 1, \dots, k$
- $S = (P_1, \dots, P_k)$ um vetor de estratégias
- k_e o número de caminhos em S que usam e

Sejam:

- $\psi_e(S) = c_e H_{k_e}$ para cada aresta e
- $\psi(S) = \sum_e \psi_e(S)$

Lema: $\text{custo}(S) \leq \psi(S) \leq H_k \text{custo}(S)$.

Prova: Para cada e em S , $\psi_e(S) \geq c_e$ e $\psi_e(S) \leq c_e H_k$. □

Função Potencial Exata

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P'_i \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Então

$$\psi(S) - \psi(S') = \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S').$$

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P'_i \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Então

$$\psi(S) - \psi(S') = \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S').$$

Uma função potencial com tal propriedade é dita exata.

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P'_i \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Então

$$\psi(S) - \psi(S') = \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S').$$

Uma função potencial com tal propriedade é dita exata.

Ou similarmente tal que $\psi(S) - \psi(S') = u_i(S') - u_i(S)$.

Função Potencial Exata

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P'_i \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Então

$$\psi(S) - \psi(S') = \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S').$$

Prova:

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P'_i \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Então

$$\psi(S) - \psi(S') = \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S').$$

Prova:

- Se e está em P_i mas não em P'_i , então:

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P'_i \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Então

$$\psi(S) - \psi(S') = \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S').$$

Prova:

- Se e está em P_i mas não em P'_i , então:
 - ▶ $\psi_e(S') = \psi_e(S) - c_e/k_e$

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P'_i \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Então

$$\psi(S) - \psi(S') = \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S').$$

Prova:

- Se e está em P_i mas não em P'_i , então:
 - ▶ $\psi_e(S') = \psi_e(S) - c_e/k_e$
 - ▶ e i deixou de pagar c_e/k_e

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P'_i \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Então

$$\psi(S) - \psi(S') = \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S').$$

Prova:

- Se e está em P_i mas não em P'_i , então:
 - ▶ $\psi_e(S') = \psi_e(S) - c_e/k_e$
 - ▶ e i deixou de pagar c_e/k_e
- Se e está em P'_i mas não em P_i , então

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P'_i \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Então

$$\psi(S) - \psi(S') = \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S').$$

Prova:

- Se e está em P_i mas não em P'_i , então:
 - ▶ $\psi_e(S') = \psi_e(S) - c_e/k_e$
 - ▶ e i deixou de pagar c_e/k_e
- Se e está em P'_i mas não em P_i , então
 - ▶ $\psi_e(S') = \psi_e(S) + c_e/(k_e + 1)$,

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P'_i \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Então

$$\psi(S) - \psi(S') = \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S').$$

Prova:

- Se e está em P_i mas não em P'_i , então:
 - ▶ $\psi_e(S') = \psi_e(S) - c_e/k_e$
 - ▶ e i deixou de pagar c_e/k_e
- Se e está em P'_i mas não em P_i , então
 - ▶ $\psi_e(S') = \psi_e(S) + c_e/(k_e + 1)$,
 - ▶ e i paga $c_e/(k_e + 1)$ a mais

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P'_i \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Então

$$\psi(S) - \psi(S') = \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S').$$

Prova:

- Se e está em P_i mas não em P'_i , então:
 - ▶ $\psi_e(S') = \psi_e(S) - c_e/k_e$
 - ▶ e i deixou de pagar c_e/k_e
- Se e está em P'_i mas não em P_i , então
 - ▶ $\psi_e(S') = \psi_e(S) + c_e/(k_e + 1)$,
 - ▶ e i paga $c_e/(k_e + 1)$ a mais
- Caso contrário, $\psi_e(S) = \psi_e(S')$

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P'_i \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P'_i)$. Então

$$\psi(S) - \psi(S') = \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S').$$

Prova:

- Se e está em P_i mas não em P'_i , então:
 - ▶ $\psi_e(S') = \psi_e(S) - c_e/k_e$
 - ▶ e i deixou de pagar c_e/k_e
- Se e está em P'_i mas não em P_i , então
 - ▶ $\psi_e(S') = \psi_e(S) + c_e/(k_e + 1)$,
 - ▶ e i paga $c_e/(k_e + 1)$ a mais
- Caso contrário, $\psi_e(S) = \psi_e(S')$

Assim sendo $\psi(S) - \psi(S') = \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S')$ □

Jogos de Potencial

Jogo de potencial:

Jogos de Potencial

Jogo de potencial:

- jogo que admite uma função potencial

Jogos de Potencial

Jogo de potencial:

- jogo que admite uma função potencial

Do lema anterior: jogos de conexão global são jogos de potencial

Jogos de Potencial

Jogo de potencial:

- jogo que admite uma função potencial

Do lema anterior: jogos de conexão global são jogos de potencial

Teorema: Todo jogo de potencial finito tem um equilíbrio puro.

Jogos de Potencial

Jogo de potencial:

- jogo que admite uma função potencial

Do lema anterior: jogos de conexão global são jogos de potencial

Teorema: Todo jogo de potencial finito tem um equilíbrio puro.

Prova:

Jogos de Potencial

Jogo de potencial:

- jogo que admite uma função potencial

Do lema anterior: jogos de conexão global são jogos de potencial

Teorema: Todo jogo de potencial finito tem um equilíbrio puro.

Prova:

Seja S tal que $\psi(S)$ é mínimo.

Jogos de Potencial

Jogo de potencial:

- jogo que admite uma função potencial

Do lema anterior: jogos de conexão global são jogos de potencial

Teorema: Todo jogo de potencial finito tem um equilíbrio puro.

Prova:

Seja S tal que $\psi(S)$ é mínimo. Então,

Jogos de Potencial

Jogo de potencial:

- jogo que admite uma função potencial

Do lema anterior: jogos de conexão global são jogos de potencial

Teorema: Todo jogo de potencial finito tem um equilíbrio puro.

Prova:

Seja S tal que $\psi(S)$ é mínimo. Então,

$$\psi(S) \leq \psi(S') \quad \text{para todo } S' = (S_{-i}, S'_i).$$

Jogos de Potencial

Jogo de potencial:

- jogo que admite uma função potencial

Do lema anterior: jogos de conexão global são jogos de potencial

Teorema: Todo jogo de potencial finito tem um equilíbrio puro.

Prova:

Seja S tal que $\psi(S)$ é mínimo. Então,

$$\psi(S) \leq \psi(S') \quad \text{para todo } S' = (S_{-i}, S'_i).$$

Logo, $u_i(S') \leq u_i(S)$ para todo $S' = (S_{-i}, S'_i)$.

Jogos de Potencial

Jogo de potencial:

- jogo que admite uma função potencial

Do lema anterior: jogos de conexão global são jogos de potencial

Teorema: Todo jogo de potencial finito tem um equilíbrio puro.

Prova:

Seja S tal que $\psi(S)$ é mínimo. Então,

$$\psi(S) \leq \psi(S') \quad \text{para todo } S' = (S_{-i}, S'_i).$$

Logo, $u_i(S') \leq u_i(S)$ para todo $S' = (S_{-i}, S'_i)$. E, portanto S é um equilíbrio. \square

Jogos de Potencial

Jogos de congestionamento:

Jogos de Potencial

Jogos de congestionamento:

- k jogadores

Jogos de Potencial

Jogos de congestionamento:

- k jogadores
- Conjunto E de n recursos

Jogos de Potencial

Jogos de congestionamento:

- k jogadores
- Conjunto E de n recursos
- Cada jogador tem como estratégias alguns dos subconjuntos de E

Jogos de Potencial

Jogos de congestionamento:

- k jogadores
- Conjunto E de n recursos
- Cada jogador tem como estratégias alguns dos subconjuntos de E
- Cada recurso e tem um função $c_e(x)$ que indica quanto qualquer jogador que utilize e paga quando x jogadores estão usando o recurso

Jogos de Potencial

Jogos de congestionamento:

- k jogadores
- Conjunto E de n recursos
- Cada jogador tem como estratégias alguns dos subconjuntos de E
- Cada recurso e tem um função $c_e(x)$ que indica quanto qualquer jogador que utilize e paga quando x jogadores estão usando o recurso
- O custo de cada jogador é a soma dos custos dos recursos

Jogos de Potencial

Jogos de congestionamento:

- k jogadores
- Conjunto E de n recursos
- Cada jogador tem como estratégias alguns dos subconjuntos de E
- Cada recurso e tem um função $c_e(x)$ que indica quanto qualquer jogador que utilize e paga quando x jogadores estão usando o recurso
- O custo de cada jogador é a soma dos custos dos recursos

Rosenthal (1973): todo jogo de congestionamento é um jogo de potencial.

Jogos de Potencial

Jogos de congestionamento:

- k jogadores
- Conjunto E de n recursos
- Cada jogador tem como estratégias alguns dos subconjuntos de E
- Cada recurso e tem um função $c_e(x)$ que indica quanto qualquer jogador que utilize e paga quando x jogadores estão usando o recurso
- O custo de cada jogador é a soma dos custos dos recursos

Rosenthal (1973): todo jogo de congestionamento é um jogo de potencial.

Monderer e Shapley (1996): para todo jogo de potencial, há um jogo de congestionamento com a mesma função potencial.

Preço da Estabilidade

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ , existem números A e B tais que

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B \text{ custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S , então **PoS** $\leq AB$.

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ , existem números A e B tais que

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B \text{ custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S , então $\text{PoS} \leq AB$.

Prova:

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ , existem números A e B tais que

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B \text{ custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S , então $\text{PoS} \leq AB$.

Prova: Seja S tal que $\psi(S)$ é mínimo e S^* com custo mínimo.

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ , existem números A e B tais que

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B \text{ custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S , então $\text{PoS} \leq AB$.

Prova: Seja S tal que $\psi(S)$ é mínimo e S^* com custo mínimo. Por hipótese,

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ , existem números A e B tais que

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B \text{ custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S , então $\text{PoS} \leq AB$.

Prova: Seja S tal que $\psi(S)$ é mínimo e S^* com custo mínimo. Por hipótese,

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq \psi(S^*) \leq B \text{ custo}(S^*).$$

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ , existem números A e B tais que

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B \text{custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S , então $\text{PoS} \leq AB$.

Prova: Seja S tal que $\psi(S)$ é mínimo e S^* com custo mínimo. Por hipótese,

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq \psi(S^*) \leq B \text{custo}(S^*).$$

Logo $\text{custo}(S) \leq AB \text{custo}(S^*)$. □

Preço da Estabilidade

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ , existem números A e B tais que

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B \text{ custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S , então **PoS** $\leq AB$.

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ , existem números A e B tais que

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B \text{ custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S , então $\text{PoS} \leq AB$.

Para jogos de conexão global com k jogadores, vale

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ , existem números A e B tais que

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B \text{custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S , então $\text{PoS} \leq AB$.

Para jogos de conexão global com k jogadores, vale

Lema: $\text{custo}(S) \leq \psi(S) \leq H_k \text{custo}(S)$.

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ , existem números A e B tais que

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B \text{custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S , então **PoS** $\leq AB$.

Para jogos de conexão global com k jogadores, vale

Lema: $\text{custo}(S) \leq \psi(S) \leq H_k \text{custo}(S)$.

Portanto, **PoS** $\leq H_k$.

Regras de divisões de custo

Regras de divisões de custo

De volta ao jogo de conexão global:

Regras de divisões de custo

De volta ao jogo de conexão global:

- Consideramos a divisão uniforme do custo da aresta.

Regras de divisões de custo

De volta ao jogo de conexão global:

- Consideramos a divisão uniforme do custo da aresta.

Perguntas:

Regras de divisões de custo

De volta ao jogo de conexão global:

- Consideramos a divisão uniforme do custo da aresta.

Perguntas:

- Existem regras mais razoáveis?

Regras de divisões de custo

De volta ao jogo de conexão global:

- Consideramos a divisão uniforme do custo da aresta.

Perguntas:

- Existem regras mais razoáveis?
- Com **PoS** melhor?

Regras de divisões de custo

De volta ao jogo de conexão global:

- Consideramos a divisão uniforme do custo da aresta.

Perguntas:

- Existem regras mais razoáveis?
- Com PoS melhor?
- Para as quais seja fácil determinar equilíbrio?

Regras de divisões de custo

- $J_e := \{i : e \in S_i\}$ (jogadores que usam e)

Regras de divisões de custo

- $J_e := \{i : e \in S_i\}$ (jogadores que usam e)
- $\text{custo}_e(i, J_e)$: custo do jogador i por usar aresta e

Regras de divisões de custo

- $J_e := \{i : e \in S_i\}$ (jogadores que usam e)
- $\text{custo}_e(i, J_e)$: custo do jogador i por usar aresta e

Condições sobre as regras:

Regras de divisões de custo

- $J_e := \{i : e \in S_i\}$ (jogadores que usam e)
- $\text{custo}_e(i, J_e)$: custo do jogador i por usar aresta e

Condições sobre as regras:

- justa: $\text{custo}_e(i, J_e) = 0$ se $i \notin J_e$.

Regras de divisões de custo

- $J_e := \{i : e \in S_i\}$ (jogadores que usam e)
- $\text{custo}_e(i, J_e)$: custo do jogador i por usar aresta e

Condições sobre as regras:

- justa: $\text{custo}_e(i, J_e) = 0$ se $i \notin J_e$.
- balanceada com orçamento: $\sum_i \text{custo}_e(i, J_e) = c_e$.

Regras de divisões de custo

- $J_e := \{i : e \in S_i\}$ (jogadores que usam e)
- $\text{custo}_e(i, J_e)$: custo do jogador i por usar aresta e

Condições sobre as regras:

- justa: $\text{custo}_e(i, J_e) = 0$ se $i \notin J_e$.
- balanceada com orçamento: $\sum_i \text{custo}_e(i, J_e) = c_e$.

Esquema de divisão indiferente (*oblivious*):

Regras de divisões de custo

- $J_e := \{i : e \in S_i\}$ (jogadores que usam e)
- $\text{custo}_e(i, J_e)$: custo do jogador i por usar aresta e

Condições sobre as regras:

- justa: $\text{custo}_e(i, J_e) = 0$ se $i \notin J_e$.
- balanceada com orçamento: $\sum_i \text{custo}_e(i, J_e) = c_e$.

Esquema de divisão indiferente (*oblivious*):

- $\text{custo}_e(i, J_e)$ depende apenas de c_e e J_e .

Regras de divisões de custo

- $J_e := \{i : e \in S_i\}$ (jogadores que usam e)
- $\text{custo}_e(i, J_e)$: custo do jogador i por usar aresta e

Condições sobre as regras:

- justa: $\text{custo}_e(i, J_e) = 0$ se $i \notin J_e$.
- balanceada com orçamento: $\sum_i \text{custo}_e(i, J_e) = c_e$.

Esquema de divisão indiferente (*oblivious*):

- $\text{custo}_e(i, J_e)$ depende apenas de c_e e J_e .

Teorema: Existe esquema de divisão de custo não indiferente em que o jogo de conexão global com $t_i = t$ para todo i tem preço da anarquia no máximo 2.