MO829
Tópicos em Teoria da Computação
Teoria dos Jogos Algorítmica

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2017

Jogos de formação de redes

Jogo de conexão local

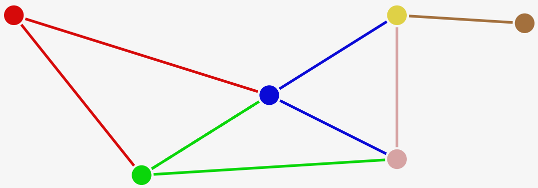
- n jogadores
- querem formar uma rede com n vértices
- cada jogador escolher com quem irá se conectar
- as escolhas dos jogadores formam um grafo G

Custo para cada jogador:

- Custo por ligação: $\alpha > 0$
- Custo por distâncias: soma da distância em G a cada outro vértice
- Se N_v é o conjunto de vértices a quem v se ligou, então

$$c_v(G) \ = \ \alpha\,|N_v| + \sum_{u \in [n]} d_G(u, v),$$

Exemplo



Para $\alpha = 2$, temos os seguintes custos:

- verde: $2 \cdot 2 + (1 + 1 + 1 + 2 + 3) = 4 + 8 = 12$
- azul: $2 \cdot 2 + (1 + 1 + 1 + 1 + 2) = 4 + 6 = 10$
- marrom: $1 \cdot 2 + (1 + 2 + 2 + 3 + 3) = 2 + 11 = 13$

É um equilíbrio?

Se o verde se desligar do azul seu custo cai para

$$1 \cdot 2 + (1 + 2 + 1 + 2 + 3) = 2 + 9 = 11 < 12$$

Comentários

- o valor de α afeta as escolhas dos jogadores
- vamos considerar estratégias puras apenas
- um perfil de estratégias induz um grafo G
  - falaremos sobre o grafo ao invés do perfil
- um equilíbrio G é conexo e cada aresta é paga por um único jogador

Sempre existe equilíbrio de estratégias puras?

Lema:
Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela é um equilíbrio.
Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Sempre existe equilíbrio

Lema:
Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela é um equilíbrio.
Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Prova:
Se $\alpha \geq 1$ e G é uma estrela, qualquer atribuição das arestas de G aos vértices resulta em um equilíbrio:

- nenhum vértice pode deixar de pagar uma aresta sem aumentar o seu custo para infinito (grafo desconexo)
- nenhum vértice tem interesse em pagar por uma aresta a mais, pois aumenta seu custo de pelo menos $\alpha \geq 1$ e diminui seu custo de apenas 1

Sempre existe equilíbrio

Se $\alpha \leq 1$ e G é o grafo completo, qualquer atribuição das arestas de G aos vértices resulta em um equilíbrio:

- nenhum vértice ganha ao deixar de pagar uma aresta pois uma distância aumenta de 1 para 2, e só economiza $\alpha \leq 1$

Custo e ótimo social

O custo social de um grafo G é

$$\mathsf{cs}(G) \;=\; \alpha\,|E_G| + \sum_{u\in[n]}\sum_{v\in[n]} d_G(u,v)$$

Ou seja, a soma dos custos dos jogadores

Qual o valor do custo social ótimo?

Teorema: Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima. Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Custo e ótimo social

Teorema: Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima. Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

Prova: Solução com m aresta tem custo pelo menos

$$2(n(n-1) - 2m) + 2m + \alpha\, m = 2n(n-1) - (2-\alpha)m$$

- Se $\alpha < 2$, só há uma solução ótima: o grafo completo
- Se $\alpha > 2$, qualquer estrela é ótima (tem m mínimo possível e minimiza a soma das distâncias)
- Se $\alpha = 2$, qualquer grafo que contém uma estrela é ótimo

Preço da estabilidade

Lema:
Se $\alpha \geq 1$ então qualquer estrela é um equilíbrio.
Se $\alpha \leq 1$ então o grafo completo é um equilíbrio.

Teorema:
Se $\alpha \geq 2$ então qualquer estrela é solução ótima. Se $\alpha \leq 2$ então o grafo completo é solução ótima.

O **preço da estabilidade** é:

- 1 para $\alpha \leq 1$
- 1 para $\alpha \geq 2$
- Mas, e para $1 < \alpha < 2$?

Preço da estabilidade

Teorema:
Para $1 < \alpha < 2$, o preço da estabilidade é no máximo $\frac{4}{3}$.

Prova: O grafo completo é única solução ótima, e tem custo

$$n(n-1) + \alpha\frac{n(n-1)}{2} = \frac{(2+\alpha)n(n-1)}{2} \; > \; \frac{3n(n-1)}{2}$$

E estrelas são equilíbrios de custo

$$\begin{aligned} 2(n-1) + 2(n-1)(n-2) + \alpha(n-1) \\ = (2 + 2(n-2) + \alpha)\,(n-1) \\ = (2n - 2 + \alpha)\,(n-1) \\ < 2n(n-1) \end{aligned}$$

Logo PoS $< \frac{2n(n-1)}{3n(n-1)/2} = \frac{4}{3}$

Preço da anarquia

Para $\alpha < 1$, o grafo completo é o único equilíbrio, e é solução ótima:

- o preço da anarquia é 1 para $\alpha < 1$

Suponha então que $\alpha \geq 1$

Diâmetro: distância máxima entre dois vértices do grafo

Lema: Se um grafo é um equilíbrio com diâmetro d, então seu custo social é $\mathrm{O}(d)$ vezes o custo social ótimo.

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o preço da anarquia é $\mathrm{O}(\sqrt{\alpha})$.

O Teorema vindo do Lema

Lema: Se um grafo é um equilíbrio com diâmetro d, então seu custo social é O(d) vezes o custo social ótimo.

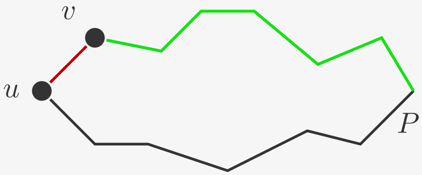
Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o preço da anarquia é O$(\sqrt{\alpha})$.

Prova: Pelo Lema, basta provar que o diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$.

Diâmetro de um equilíbrio

Teorema: O diâmetro de um equilíbrio é no máximo $2\sqrt{\alpha}$, e portanto o preço da anarquia é $O(\sqrt{\alpha})$.

Prova: Sejam u e v tq $d(u,v) \geq 2k$ para algum $k \geq 1$.



Se u passar a pagar pela aresta $\{u,v\}$:

- gasta mais α
- economiza nas distâncias pelo menos

$$(2k-1)+((2k-1)-2)+\cdots+((2k-i)-(i+1))+\cdots+3+1 \;=\; k^2$$

Se $d(u,v) \geq 2k > 2\sqrt{\alpha}$, não é um equilíbrio!

O Lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d, então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova: Ótimo tem custo $\Omega(\alpha\, n + n^2)$, pois o grafo tem que ser conexo ($m \geq n - 1$).

Se G tem diâmetro d, o custo das distâncias é $O(dn^2)$.

Quebramos o custo das arestas em duas partes:

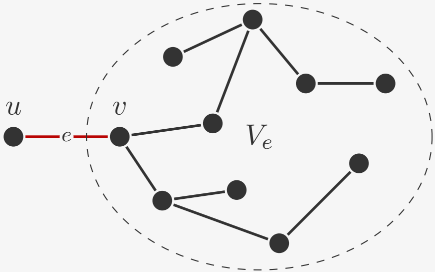
- arestas de corte
- arestas não de corte

No máximo $n - 1$ arestas de corte.
Então arestas de corte custam menos que $\alpha\, n$.

Arestas não de corte

Vamos mostrar que cada vértice u:

- paga por $\mathrm{O}(nd/\alpha)$ arestas não de corte
- Disso segue que custo destas arestas é $\mathrm{O}(n^2 d)$
- V_e: conjunto dos w tais que todo caminho mínimo de u a w usa e



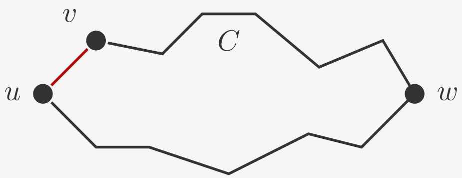
Ao remover e, a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta

Aumenta de quanto?

Arestas não de corte

Seja:

- C um circuito de comprimento mínimo contendo e
- w o vértice mais distante de u em C



Note que:

- o trecho C_{uw} é um caminho mínimo em G, logo tem comprimento no máximo d
- o trecho C_{vw} é um caminho mínimo em G, logo tem comprimento no máximo d

Assim sendo $d(u, v)$ após a remoção de e é no máximo $2d$

Arestas não de corte

Ao remover e, a distância de u aos vértices de V_e (e só a eles) aumenta

Aumenta de quanto?

- Distância de u a v sobe para no máximo $2d$
- Custo de u desce de α, e sobe de no máximo $2d|V_e|$
- Ou seja, $2d|V_e| \geq \alpha$ e $|V_e| \geq \alpha/2d$

V_e's são disjuntos, logo o número de V_e's é no máximo

$$\frac{n}{\frac{\alpha}{2d}} = \frac{2dn}{\alpha} = \mathrm{O}\left(\frac{dn}{\alpha}\right)$$

Logo cada vértice paga por $\mathrm{O}(nd/\alpha)$ arestas não de corte

Recapitulando o lema

Lema: Se um grafo G é um equilíbrio com diâmetro d, então seu custo social é $O(d)$ vezes o custo social ótimo.

Prova:

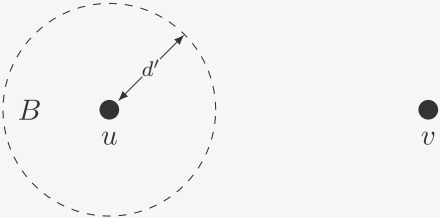
- Ótimo tem custo $\Omega(\alpha\, n + n^2)$
- O custo das distâncias é $O(dn^2)$
- Arestas de corte:
  - custam menos que $\alpha\, n$
- Arestas não de corte:
  - cada vértice paga por $O(dn/\alpha)$ arestas
  - ou seja, cada um paga $O(dn)$
  - no total, é pago $O(dn^2)$

Resultado: o custo social do grafo em equilíbrio é no máximo $O(d)$ vezes o custo social ótimo

Segundo resultado

Teorema: O preço da anarquia é $\mathsf{O}(1)$ se $\alpha = \mathsf{O}(\sqrt{n})$. Em geral, o preço da anarquia é $\mathsf{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$.

Prova: Seja $d = d(u, v)$ e $d' = \lfloor \frac{d-1}{4} \rfloor$.
B: conjunto dos vértices à distância no máximo d' de u.

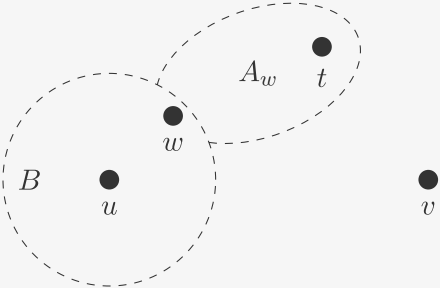


Se v pagar por $\{u, v\}$, a distância de v a cada vértice de B, que era pelo menos $d - d'$, cai para no máximo $d' + 1$.

Se G é um equilíbrio, $\alpha \geq |B|(d - 2d' - 1) \geq (d-1)|B|/2$.

Segundo resultado

A_w: conjunto dos vértices $t \notin B$ tais que há caminho mínimo de u a t que deixa B por w



Se $A_w \neq \emptyset$, então $d(u, w) = d'$.

Se u pagar por $\{u, w\}$, economiza $|A_w|(d' - 1)$.

Segundo resultado

Se u pagar por $\{u, w\}$, economiza $|A_w|(d' - 1)$.

Logo $\alpha \geq |A_w|(d' - 1)$.

Note que existe w tal que $|A_w| \geq (n - |B|)/|B|$:

- Existem $n - |B|$ vértices fora de B
- Existem B conjuntos A_w
- A média de vértices em cada conjunto A_w é pelo menos $(n - |B|)/|B|$
- Portanto, existe um conjunto com pelo menos $(n - |B|)/|B|$ vértices

Combinando, concluímos que $\alpha \geq (d' - 1)(n - |B|)/|B|$.

Segundo resultado

Como $\alpha \geq (d' - 1)(n - |B|)/|B|$, temos que:

- $\alpha \geq (d' - 1)n/|B| - (d' - 1)$
- i.e., $|B| \geq (d' - 1)n/(d' - 1 + \alpha)$
- E, como $\alpha \geq d > d'$, vale que

$$|B| \geq \frac{(d' - 1)n}{d' - 1 + \alpha} \geq \frac{(d' - 1)n}{d + \alpha} \geq \frac{n(d' - 1)}{2\alpha}$$

Segundo resultado

Relembrando:

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \qquad |B| \geq \frac{n(d'-1)}{2\alpha} \qquad d' = \left\lfloor \frac{d-1}{4} \right\rfloor$$

Então

$$\alpha \geq \frac{(d-1)|B|}{2} \geq \frac{(d-1)n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{4d'n(d'-1)}{4\alpha} \geq \frac{n(d'-1)^2}{\alpha}$$

Ou seja, $\alpha^2 \geq n(d'-1)^2$, e

$$d \leq 4(d'+1) \leq 4d' + 4 = 4(d'-1) + 8 \leq 4\alpha/\sqrt{n} + 8$$

Do Lema segue que $\mathsf{PoA} = \mathsf{O}(1 + \alpha/\sqrt{n})$ $\square$

Jogo de conexão global

$G = (V, E)$: um digrafo com custo c_e para cada e em E

No jogo de conexão global temos:

- k jogadores
- cada um com um par de vértices (s_i, t_i)
- Estratégia do jogador i:
  - caminho de s_i a t_i em G
- custo para i do vetor de estratégias $S = (P_1, \ldots, P_k)$:

$$\text{custo}_i(S) = \sum_{e \in P_i} \frac{c_e}{k_e},$$

  onde k_e é o número de caminhos em S que usam e
- Custo social $\text{cs}(S)$:
  - soma do custo das arestas em $\cup_i P_i$

Problema da Floresta de Steiner

Seja $G = (V, E)$ um digrafo com:

- custo c_e para cada e em E
- e pares de vértices (s_i, t_i), para $i = 1, \ldots, k$

Problema: Encontrar um subgrafo de G de custo mínimo que contém um caminho de s_i a t_i, para $i = 1, \ldots, k$.

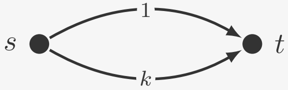
Esse problema é NP-difícil, mas é com ele que vamos comparar o custo dos equilíbrios.

Ou seja, o custo social ótimo do jogo é o custo da solução do correspondente Problema da Floresta de Steiner.

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo s e t

Digrafo:



Ótimo: todos pela aresta de custo 1

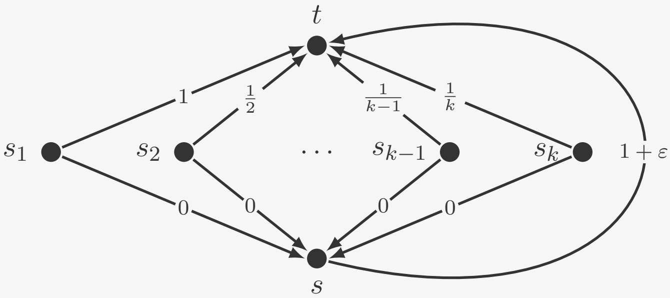
- Isso é um equilíbrio: PoS $= 1$

Outro equilíbrio: todos pela aresta de custo k:

- PoA $= k$

Exemplo

k jogadores, todos com o mesmo t



Ótimo: todos por s, a um custo total de $1+\varepsilon$.

Mas isso não é um equilíbrio: k está insatisfeito.

Único equilíbrio: todos diretamente para t...

cs $= \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} = H_k$ e portanto PoS $=$ PoA $= H_k$

Função Potencial

Sejam:

- $G = (V, E)$: um digrafo
- c_e: custo para cada e em E
- (s_i, t_i): pares de vértices dos jogadores $i = 1, \ldots, k$
- $S = (P_1, \ldots, P_k)$ um vetor de estratégias
- k_e o número de caminhos em S que usam e

Sejam:

- $\psi_e(S) \;=\; c_e\, H_{k_e}$ para cada aresta e
- $\psi(S) \;=\; \sum_e \psi_e(S)$

Lema: custo$(S) \;\leq\; \psi(S) \;\leq\; H_k$ custo(S).

Prova: Para cada e em S, $\psi_e(S) \geq c_e$ e $\psi_e(S) \leq c_e\, H_k$. $\square$

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P_i' \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P_i')$. Então

$$\psi(S) - \psi(S') \ = \ \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S').$$

Uma função potencial com tal propriedade é dita exata.

Ou similarmente tal que $\psi(S) - \psi(S') \ = \ u_i(S') - u_i(S)$.

Função Potencial Exata

Lema: Seja $P_i' \neq P_i$ um caminho alternativo para i e seja $S' = (S_{-i}, P_i')$. Então

$$\psi(S) - \psi(S') \;=\; \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S').$$

Prova:

- Se e está em P_i mas não em P_i', então:
  - $\psi_e(S') = \psi_e(S) - c_e/k_e$
  - e i deixou de pagar c_e/k_e
- Se e está em P_i' mas não em P_i, então
  - $\psi_e(S') = \psi_e(S) + c_e/(k_e + 1)$,
  - e i paga $c_e/(k_e + 1)$ a mais
- Caso contrário, $\psi_e(S) = \psi_e(S')$

Assim sendo $\psi(S) - \psi(S') \;=\; \text{custo}_i(S) - \text{custo}_i(S')$ $\square$

Jogos de Potencial

Jogo de potencial:

- jogo que admite uma função potencial

Do lema anterior: jogos de conexão global são jogos de potencial

Teorema: Todo jogo de potencial finito tem um equilíbrio puro.

Prova:
Seja S tal que $\psi(S)$ é mínimo. Então,

$$\psi(S) \leq \psi(S') \quad \text{para todo } S' = (S_{-i}, S'_i).$$

Logo, $u_i(S') \leq u_i(S)$ para todo $S' = (S_{-i}, S'_i)$. E, portanto S é um equilíbrio. $\square$

Jogos de Potencial

Jogos de congestionamento:

- k jogadores
- Conjunto E de n recursos
- Cada jogador tem como estratégias alguns dos subconjuntos de E
- Cada recurso e tem um função $c_e(x)$ que indica quanto qualquer jogador que utilize e paga quando x jogadores estão usando o recurso
- O custo de cada jogador é a soma dos custos dos recursos

Rosenthal (1973): todo jogo de congestionamento é um jogo de potencial.

Monderer e Shapley (1996): para todo jogo de potencial, há um jogo de congestionamento com a mesma função potencial.

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ, existem números A e B tais que

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B\,\text{custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S, então PoS $\leq AB$.

Prova: Seja S tal que $\psi(S)$ é mínimo e S^* com custo mínimo. Por hipótese,

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \;\leq\; \psi(S) \;\leq\; \psi(S^*) \;\leq\; B\,\text{custo}(S^*).$$

Logo $\text{custo}(S) \leq AB\,\text{custo}(S^*)$. $\square$

Preço da Estabilidade

Teorema: Se, para um jogo de potencial com potencial ψ, existem números A e B tais que

$$\frac{\text{custo}(S)}{A} \leq \psi(S) \leq B\,\text{custo}(S).$$

para todo vetor de estratégias S, então PoS $\leq AB$.

Para jogos de conexão global com k jogadores, vale

Lema: $\text{custo}(S) \ \leq \ \psi(S) \ \leq \ H_k\,\text{custo}(S)$.

Portanto, PoS $\leq H_k$.

Regras de divisões de custo

De volta ao jogo de conexão global:

- Consideramos a divisão uniforme do custo da aresta.

Perguntas:

- Existem regras mais razoáveis?
- Com PoS melhor?
- Para as quais seja fácil determinar equilíbrio?

Regras de divisões de custo

- $J_e := \{i : e \in S_i\}$ (jogadores que usam e)
- custo$_e(i, J_e)$: custo do jogador i por usar aresta e

Condições sobre as regras:

- justa: custo$_e(i, J_e) = 0$ se $i \notin J_e$.
- balanceada com orçamento: $\sum_i$ custo$_e(i, J_e) = c_e$.

Esquema de divisão indiferente (*oblivious*):

- custo$_e(i, J_e)$ depende apenas de c_e e J_e.

Teorema: Existe esquema de divisão de custo não indiferente em que o jogo de conexão global com $t_i = t$ para todo i tem preço da anarquia no máximo 2.