MO829
Tópicos em Teoria da Computação
Teoria dos Jogos Algorítmica

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2017

Jogo de balanceamento de carga

Jogo de balanceamento de carga

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n *tarefas*

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n *tarefas*
- m *máquinas*

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n *tarefas*
- m *máquinas*
- w_i : *peso* da tarefa i

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n *tarefas*
- m *máquinas*
- w_i : *peso* da tarefa i
- s_j : *velocidade* da máquina j

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n *tarefas*
- m *máquinas*
- w_i : *peso* da tarefa i
- s_j : *velocidade* da máquina j

Cada jogador:

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n *tarefas*
- m *máquinas*
- w_i : *peso* da tarefa i
- s_j : *velocidade* da máquina j

Cada jogador:

- Controla uma tarefa

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n *tarefas*
- m *máquinas*
- w_i: *peso* da tarefa i
- s_j: *velocidade* da máquina j

Cada jogador:

- Controla uma tarefa
- Escolhe em qual máquina aloca a tarefa

Jogo de balanceamento de carga

Dados:

- n *tarefas*
- m *máquinas*
- w_i : *peso* da tarefa i
- s_j : *velocidade* da máquina j

Cada jogador:

- Controla uma tarefa
- Escolhe em qual máquina aloca a tarefa
- Conjuntos de estratégias do jogador i é $S_i = [m]$

Jogo de balanceamento de carga

Jogo de balanceamento de carga

As escolhas dos jogadores geram uma *atribuição* de tarefas às maquinas:

$$A : [n] \to [m]$$

Jogo de balanceamento de carga

As escolhas dos jogadores geram uma *atribuição* de tarefas às maquinas:

$$A : [n] \to [m]$$

A carga de uma máquina j é:

Jogo de balanceamento de carga

As escolhas dos jogadores geram uma *atribuição* de tarefas às maquinas:

$$A : [n] \to [m]$$

A carga de uma máquina j é:

$$\ell_j = \sum_{\substack{i \in [n] \\ j = A(i)}} \frac{w_i}{s_j}$$

Jogo de balanceamento de carga

As escolhas dos jogadores geram uma *atribuição* de tarefas às maquinas:

$$A : [n] \to [m]$$

A carga de uma máquina j é:

$$\ell_j = \sum_{\substack{i \in [n] \\ j = A(i)}} \frac{w_i}{s_j}$$

O custo de A para um jogador i é ℓ_j tal que $j = A(i)$

Jogo de balanceamento de carga

Jogo de balanceamento de carga

Jogo:

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m, $w_1, \ldots, w_n$

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$

É um jogo finito, logo tem equilíbrio (misto) de Nash

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$

É um jogo finito, logo tem equilíbrio (misto) de Nash

Estamos interessados apenas em estratégias puras

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$

É um jogo finito, logo tem equilíbrio (misto) de Nash

Estamos interessados apenas em estratégias puras

Consideramos ainda dois casos:

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$

É um jogo finito, logo tem equilíbrio (misto) de Nash

Estamos interessados apenas em estratégias puras

Consideramos ainda dois casos:

- máquinas *idênticas* ($s_1 = \cdots = s_m$)

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$

É um jogo finito, logo tem equilíbrio (misto) de Nash

Estamos interessados apenas em estratégias puras

Consideramos ainda dois casos:

- máquinas *idênticas* ($s_1 = \cdots = s_m$)
- máquinas *relacionadas* (caso geral)

Jogo de balanceamento de carga

Jogo: n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$

É um jogo finito, logo tem equilíbrio (misto) de Nash

Estamos interessados apenas em estratégias puras

Consideramos ainda dois casos:

- máquinas *idênticas* ($s_1 = \cdots = s_m$)
- máquinas *relacionadas* (caso geral)

O jogo com estratégias puras tem equilíbrio?

O jogo tem equilíbrio?

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

O jogo tem equilíbrio?

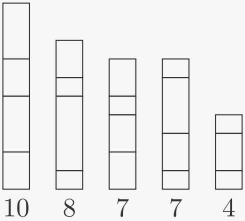
Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente

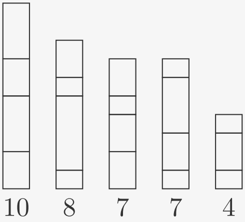


Vetores encontrados:

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



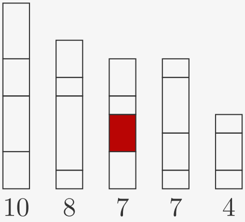
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



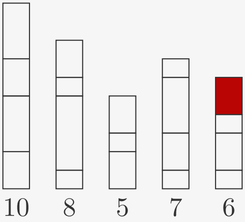
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



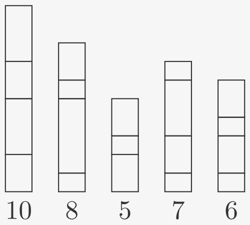
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



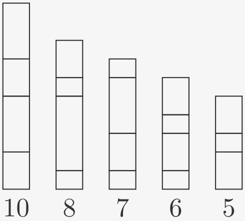
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



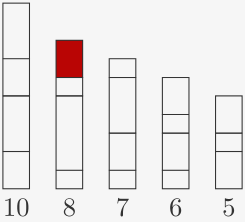
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$
- $(10, 8, 7, 6, 5)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



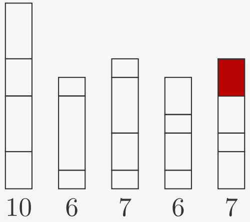
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$
- $(10, 8, 7, 6, 5)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



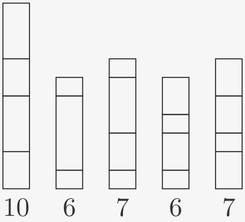
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$
- $(10, 8, 7, 6, 5)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



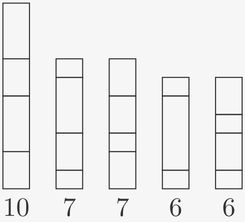
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$
- $(10, 8, 7, 6, 5)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



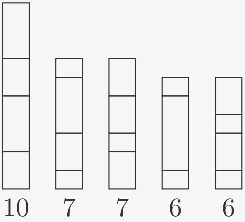
Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$
- $(10, 8, 7, 6, 5)$
- $(10, 7, 7, 6, 6)$

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



Vetores encontrados:

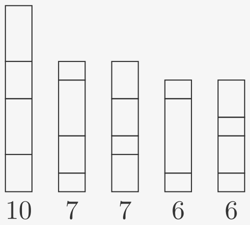
- $(10, 8, 7, 7, 4)$
- $(10, 8, 7, 6, 5)$
- $(10, 7, 7, 6, 6)$

Migração vai para vetor lexicograficamente menor

O jogo tem equilíbrio?

Proposição: O jogo de balanceamento de cargas dado por n, m, $w_1, \ldots, w_n$, $s_1, \ldots, s_m$ com estratégias puras tem pelo menos um equilíbrio

Dada uma atribuição $A : [n] \to [m]$, considere o vetor com a carga de cada máquina, em ordem decrescente



Vetores encontrados:

- $(10, 8, 7, 7, 4)$
- $(10, 8, 7, 6, 5)$
- $(10, 7, 7, 6, 6)$

Migração vai para vetor lexicograficamente menor

Processo sempre termina e encontra um equilíbrio

Duas perguntas

Jogo de balanceamento de cargas com estratégias puras

Duas perguntas

Jogo de balanceamento de cargas com estratégias puras

- Quão ruim pode ser um equilíbrio em comparação com o chamado ótimo social?

Duas perguntas

Jogo de balanceamento de cargas com estratégias puras

- Quão ruim pode ser um equilíbrio em comparação com o chamado ótimo social?

- Quanto tempo para chegar a um equilíbrio?

Duas perguntas

Jogo de balanceamento de cargas com estratégias puras

- Quão ruim pode ser um equilíbrio em comparação com o chamado ótimo social?
- Quanto tempo para chegar a um equilíbrio?

Aqui o custo social de uma atribuição A é a carga da máquina mais carregada, ou seja, é o *makespan*

Duas perguntas

Jogo de balanceamento de cargas com estratégias puras

- Quão ruim pode ser um equilíbrio em comparação com o chamado ótimo social?
- Quanto tempo para chegar a um equilíbrio?

Aqui o custo social de uma atribuição A é a carga da máquina mais carregada, ou seja, é o *makespan*

Dados n, m, $w_1, \dots, w_n$, $s_1, \dots, s_m$, determinar o makespan mínimo é um problema NP-difícil

Duas medidas de qualidade

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- Nash(J) é o conjunto de equilíbrios de um jogo J

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- Nash(J) é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- custo(A) é o custo da atribuição A para J

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- Nash(J) é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- custo(A) é o custo da atribuição A para J
- opt(J) é o custo mínimo de uma atribuição para J

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- Nash(J) é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- custo(A) é o custo da atribuição A para J
- opt(J) é o custo mínimo de uma atribuição para J

Preço da anarquia PoA(m):

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- Nash(J) é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- custo(A) é o custo da atribuição A para J
- opt(J) é o custo mínimo de uma atribuição para J

Preço da anarquia PoA(m):

- É o valor máximo da razão entre o pior custo de um equilíbrio e o custo da solução ótima

$$\text{PoA}(m) = \max_{J \in \mathcal{J}(m)} \max_{A \in \text{Nash}(J)} \frac{\text{custo}(A)}{\text{opt}(J)}$$

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- Nash(J) é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- custo(A) é o custo da atribuição A para J
- opt(J) é o custo mínimo de uma atribuição para J

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- Nash(J) é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- custo(A) é o custo da atribuição A para J
- opt(J) é o custo mínimo de uma atribuição para J

Preço da estabilidade PoS(m):

Duas medidas de qualidade

Seja $\mathcal{J}(m)$ o conjunto de todos jogos de balanceamento de carga com m máquinas

- Nash(J) é o conjunto de equilíbrios de um jogo J
- custo(A) é o custo da atribuição A para J
- opt(J) é o custo mínimo de uma atribuição para J

Preço da estabilidade PoS(m):

- É o valor máximo da razão entre o melhor custo de um equilíbrio e o custo da solução ótima

$$\text{PoS}(m) = \max_{J \in \mathcal{J}(m)} \min_{A \in \text{Nash}(J)} \frac{\text{custo}(A)}{\text{opt}(J)}$$

Duas medidas de qualidade

O valores de PoA(m) e de PoS(m) valem pelo menos 1

Duas medidas de qualidade

O valores de PoA(m) e de PoS(m) valem pelo menos 1

Preço da estabilidade é 1:

Duas medidas de qualidade

O valores de PoA(m) e de PoS(m) valem pelo menos 1

Preço da estabilidade é 1:

- Comece com a configuração de makespan mínimo e vá aplicando melhores respostas

Duas medidas de qualidade

O valores de PoA(m) e de PoS(m) valem pelo menos 1

Preço da estabilidade é 1:

- Comece com a configuração de makespan mínimo e vá aplicando melhores respostas
- O makespan nunca aumenta e termina num equilíbrio

Preço da anarquia

Preço da anarquia

Exemplo:

Preço da anarquia

Exemplo:

Preço da anarquia

Exemplo: $m = 2$

Preço da anarquia

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$

Preço da anarquia

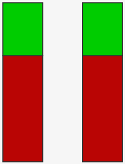
Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$

Preço da anarquia

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

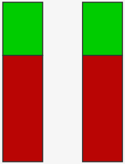
Preço da anarquia

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$



Preço da anarquia

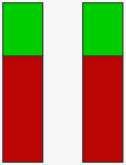
Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

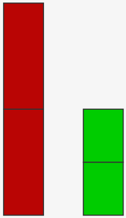


Makespan mínimo: 3

Preço da anarquia

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

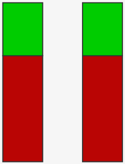




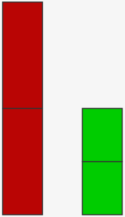
Makespan mínimo: 3

Preço da anarquia

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$



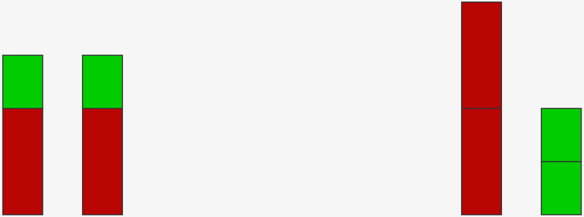
Makespan mínimo: 3



Equilíbrio com makespan 4

Preço da anarquia

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$



Makespan mínimo: 3 Equilíbrio com makespan 4

Preço da anarquia pelo menos 4/3

Caso de máquinas idênticas

Caso de máquinas idênticas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas idênticas, PoA$(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)$

Caso de máquinas idênticas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas idênticas, PoA$(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)$

Prova: Jogo $J = (n, m, w)$

Caso de máquinas idênticas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas idênticas, PoA$(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)$

Prova: Jogo $J = (n, m, w)$

- Atribuição em equilíbrio $A : [n] \to [m]$

Caso de máquinas idênticas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas idênticas, PoA$(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)$

Prova: Jogo $J = (n, m, w)$

- Atribuição em equilíbrio $A : [n] \to [m]$
- j^*: máquina com carga máxima em A

Caso de máquinas idênticas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas idênticas, PoA$(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)$

Prova: Jogo $J = (n, m, w)$

- Atribuição em equilíbrio $A : [n] \to [m]$
- j^*: máquina com carga máxima em A
- i^*: tarefa de menor peso em j^*

Caso de máquinas idênticas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas idênticas, PoA$(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)$

Prova: Jogo $J = (n, m, w)$

- Atribuição em equilíbrio $A : [n] \to [m]$
- j^*: máquina com carga máxima em A
- i^*: tarefa de menor peso em j^*
- $\ell(j)$: carga da máquina j em A

Caso de máquinas idênticas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas idênticas, PoA$(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)$

Prova: Jogo $J = (n, m, w)$

- Atribuição em equilíbrio $A : [n] \to [m]$
- j^*: máquina com carga máxima em A
- i^*: tarefa de menor peso em j^*
- $\ell(j)$: carga da máquina j em A

Se só i^* em j^*, então custo$(A) =$ opt(J) e nada a provar.

Caso de máquinas idênticas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas idênticas, PoA$(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)$

Prova: Jogo $J = (n, m, w)$

- Atribuição em equilíbrio $A : [n] \to [m]$
- j^*: máquina com carga máxima em A
- i^*: tarefa de menor peso em j^*
- $\ell(j)$: carga da máquina j em A

Se só i^* em j^*, então custo$(A) =$ opt(J) e nada a provar.
Senão $w_{i^*} \leq \ell(j^*)/2 =$ custo$(A)/2$

Caso de máquinas idênticas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas idênticas, PoA$(m) = \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)$

Prova: Jogo $J = (n, m, w)$

- Atribuição em equilíbrio $A : [n] \to [m]$
- j^*: máquina com carga máxima em A
- i^*: tarefa de menor peso em j^*
- $\ell(j)$: carga da máquina j em A

Se só i^* em j^*, então custo$(A) =$ opt(J) e nada a provar.
Senão $w_{i^*} \leq \ell(j^*)/2 =$ custo$(A)/2$

Não há máquina com carga menor que $\ell(j^*) - w_{i^*}$
(ou i^* teria incentivo para ir para tal máquina)

Caso de máquinas idênticas

Não há máquina com carga menor que $\ell(j^*) - w_{i^*}$

Caso de máquinas idênticas

Não há máquina com carga menor que $\ell(j^*) - w_{i^*}$

Ou seja, para todo $j \in [m]$,

Caso de máquinas idênticas

Não há máquina com carga menor que $\ell(j^*) - w_{i^*}$

Ou seja, para todo $j \in [m]$,

$$\ell(j) \;\geq\; \ell(j^*) - w_{i^*} \;\geq\; \text{custo}(A) - \frac{1}{2}\,\text{custo}(A) \;=\; \frac{1}{2}\,\text{custo}(A)$$

Caso de máquinas idênticas

Não há máquina com carga menor que $\ell(j^*) - w_{i^*}$

Ou seja, para todo $j \in [m]$,

$$\ell(j) \ \geq \ \ell(j^*) - w_{i^*} \ \geq \ \text{custo}(A) - \frac{1}{2}\,\text{custo}(A) \ = \ \frac{1}{2}\,\text{custo}(A)$$

e

Caso de máquinas idênticas

Não há máquina com carga menor que $\ell(j^*) - w_{i^*}$

Ou seja, para todo $j \in [m]$,

$$\ell(j) \;\geq\; \ell(j^*) - w_{i^*} \;\geq\; \text{custo}(A) - \frac{1}{2}\text{custo}(A) \;=\; \frac{1}{2}\text{custo}(A)$$

e

$$\text{opt}(J)$$

Caso de máquinas idênticas

Não há máquina com carga menor que $\ell(j^*) - w_{i^*}$

Ou seja, para todo $j \in [m]$,

$$\ell(j) \;\geq\; \ell(j^*) - w_{i^*} \;\geq\; \text{custo}(A) - \frac{1}{2}\text{custo}(A) \;=\; \frac{1}{2}\text{custo}(A)$$

e

$$\text{opt}(J) \geq \frac{\sum_{i \in [n]} w_i}{m}$$

Caso de máquinas idênticas

Não há máquina com carga menor que $\ell(j^*) - w_{i^*}$

Ou seja, para todo $j \in [m]$,

$$\ell(j) \;\geq\; \ell(j^*) - w_{i^*} \;\geq\; \text{custo}(A) - \frac{1}{2}\text{custo}(A) \;=\; \frac{1}{2}\text{custo}(A)$$

e

$$\begin{aligned} \text{opt}(J) &\geq \frac{\sum_{i\in[n]} w_i}{m} \\ &= \frac{\sum_{j\in[m]} \ell(j)}{m} \end{aligned}$$

Caso de máquinas idênticas

Não há máquina com carga menor que $\ell(j^*) - w_{i^*}$

Ou seja, para todo $j \in [m]$,

$$\ell(j) \;\geq\; \ell(j^*) - w_{i^*} \;\geq\; \text{custo}(A) - \frac{1}{2}\text{custo}(A) \;=\; \frac{1}{2}\text{custo}(A)$$

e

$$\begin{aligned}
\text{opt}(J) &\geq \frac{\sum_{i\in[n]} w_i}{m} \\
&= \frac{\sum_{j\in[m]} \ell(j)}{m} \\
&\geq \frac{\text{custo}(A) + (m-1)\text{custo}(A)/2}{m}
\end{aligned}$$

Caso de máquinas idênticas

Não há máquina com carga menor que $\ell(j^*) - w_{i^*}$

Ou seja, para todo $j \in [m]$,

$$\ell(j) \;\geq\; \ell(j^*) - w_{i^*} \;\geq\; \text{custo}(A) - \frac{1}{2}\text{custo}(A) \;=\; \frac{1}{2}\text{custo}(A)$$

e

$$\begin{aligned}
\text{opt}(J) &\geq \frac{\sum_{i\in[n]} w_i}{m} \\
&= \frac{\sum_{j\in[m]} \ell(j)}{m} \\
&\geq \frac{\text{custo}(A) + (m-1)\text{custo}(A)/2}{m} \\
&= \frac{(m+1)\text{custo}(A)}{2m}
\end{aligned}$$

Caso de máquinas idênticas

Usando o fato que

$$\text{opt}(J) \geq \frac{(m+1)\text{custo}(A)}{2m}$$

Caso de máquinas idênticas

Usando o fato que

$$\text{opt}(J) \geq \frac{(m+1)\text{custo}(A)}{2m}$$

temos que

$$\text{custo}(A) \ \leq \ \left(2 - \frac{2}{m+1}\right)\text{opt}(J) \quad \square$$

Caso de máquinas idênticas

Para $m = 2$, análise é justa para o exemplo pois

$$\frac{4}{3} = \left(2 - \frac{2}{2+1}\right)$$

Caso de máquinas idênticas

Para $m = 2$, análise é justa para o exemplo pois

$$\frac{4}{3} = \left(2 - \frac{2}{2+1}\right)$$

Exercício: Mostre um exemplo para um m arbitrário que prove que a análise é justa para todo m

Tempo de convergência

Tempo de convergência

Para máquinas idênticas, há sequência curta de melhoras de qualquer atribuição inicial para um equilíbrio

Tempo de convergência

Para máquinas idênticas, há sequência curta de melhoras de qualquer atribuição inicial para um equilíbrio

Política da resposta ótima de peso máximo:

Tempo de convergência

Para máquinas idênticas, há sequência curta de melhoras de qualquer atribuição inicial para um equilíbrio

Política da resposta ótima de peso máximo:

- Ative apenas uma tarefa insatisfeita de peso máximo por vez

Tempo de convergência

Para máquinas idênticas, há sequência curta de melhoras de qualquer atribuição inicial para um equilíbrio

Política da resposta ótima de peso máximo:

- Ative apenas uma tarefa insatisfeita de peso máximo por vez
- Uma tarefa ativada muda para a melhor máquina

Tempo de convergência

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em j^* se torna insatisfeita em $t+1$ e quer migrar para a máquina j

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em j^* se torna insatisfeita em $t+1$ e quer migrar para a máquina j

$$\ell_j^{t+1} + w_k < \ell_{j^*}^{t+1}$$

(pois k prefere a máquina j no tempo $t+1$)

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em j^* se torna insatisfeita em $t+1$ e quer migrar para a máquina j

$$\ell_j^{t+1} + w_k < \ell_{j^*}^{t+1} = \ell_{j^*}^t + w_i$$

(pois i migrou para j^* no tempo t)

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em j^* se torna insatisfeita em $t+1$ e quer migrar para a máquina j

$$\ell_j^{t+1} + w_k < \ell_{j^*}^{t+1} = \ell_{j^*}^t + w_i < \ell_j^t$$

(pois i prefere a máquina j^* no tempo t)

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t : carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em j^* se torna insatisfeita em $t+1$ e quer migrar para a máquina j

$$\ell_j^{t+1} + w_k < \ell_{j^*}^{t+1} = \ell_{j^*}^t + w_i < \ell_j^t = \ell_j^{t+1} + w_i$$

(pois i migrou de j no tempo t)

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em j^* se torna insatisfeita em $t+1$ e quer migrar para a máquina j

$$\ell_j^{t+1} + w_k < \ell_{j^*}^{t+1} = \ell_{j^*}^t + w_i < \ell_j^t = \ell_j^{t+1} + w_i$$

Isto é, $w_k < w_i$

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em j^* se torna insatisfeita em $t+1$ e quer migrar para a máquina $j' \neq j$, suponha que $w_k \geq w_i$

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em j^* se torna insatisfeita em $t+1$ e quer migrar para a máquina $j' \neq j$, suponha que $w_k \geq w_i$

$$\ell_{j'}^t + w_i \leq \ell_{j'}^t + w_k$$

(pois $w_k \geq w_i$)

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t : carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em j^* se torna insatisfeita em $t+1$ e quer migrar para a máquina $j' \neq j$, suponha que $w_k \geq w_i$

$$\ell_{j'}^t + w_i \leq \ell_{j'}^t + w_k = \ell_{j'}^{t+1} + w_k$$

(pois a carga de j' não mudou)

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em j^* se torna insatisfeita em $t+1$ e quer migrar para a máquina $j' \neq j$, suponha que $w_k \geq w_i$

$$\ell_{j'}^t + w_i \leq \ell_{j'}^t + w_k = \ell_{j'}^{t+1} + w_k < \ell_{j^*}^{t+1}$$

(pois k ficou insatisfeita)

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em j^* se torna insatisfeita em $t+1$ e quer migrar para a máquina $j' \neq j$, suponha que $w_k \geq w_i$

$$\ell_{j'}^t + w_i \leq \ell_{j'}^t + w_k = \ell_{j'}^{t+1} + w_k < \ell_{j^*}^{t+1} = \ell_{j^*}^t + w_i$$

(pois i migrou para j^*)

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em j^* se torna insatisfeita em $t+1$ e quer migrar para a máquina $j' \neq j$, suponha que $w_k \geq w_i$

$$\ell_{j'}^t + w_i \leq \ell_{j'}^t + w_k = \ell_{j'}^{t+1} + w_k < \ell_{j^*}^{t+1} = \ell_{j^*}^t + w_i$$

Mas então, i prefere j' do que j^*. Contradição pela escolha de $w_k \geq w_i$.

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em $j' \notin \{j^*, j\}$ se torna insatisfeita em $t+1$:

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em $j' \notin \{j^*, j\}$ se torna insatisfeita em $t+1$:

$$\ell_{j'}^t = \ell_{j'}^{t+1}$$

(pois a carga da máquina j' não mudou)

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em $j' \notin \{j^*, j\}$ se torna insatisfeita em $t+1$:

$$\ell_{j'}^t = \ell_{j'}^{t+1} > \ell_j^{t+1} + w_k$$

(pois k prefere a máquina j no tempo $t+1$)

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em $j' \notin \{j^*, j\}$ se torna insatisfeita em $t+1$:

$$\ell_{j'}^t = \ell_{j'}^{t+1} > \ell_j^{t+1} + w_k = \ell_j^t - w_i + w_k$$

(pois i migrou de j no tempo t)

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em $j' \notin \{j^*, j\}$ se torna insatisfeita em $t+1$:

$$\ell_{j'}^t = \ell_{j'}^{t+1} > \ell_j^{t+1} + w_k = \ell_j^t - w_i + w_k > \ell_{j^*}^t + w_k$$

(pois i prefere a máquina j^* no tempo t)

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- ℓ_j^t: carga da máquina j no tempo t
- A tarefa i migra de j para j^* no tempo t

Se a tarefa k em $j' \notin \{j^*, j\}$ se torna insatisfeita em $t+1$:

$$\ell_{j'}^t = \ell_{j'}^{t+1} > \ell_j^{t+1} + w_k = \ell_j^t - w_i + w_k > \ell_{j^*}^t + w_k$$

então k já estava insatisfeita no tempo t

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- Quando uma tarefa migra, torna insatisfeitas apenas tarefas com peso menor

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- Quando uma tarefa migra, torna insatisfeitas apenas tarefas com peso menor
- Isto é, após migrar uma tarefa nunca mais fica insatisfeita

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- Quando uma tarefa migra, torna insatisfeitas apenas tarefas com peso menor
- Isto é, após migrar uma tarefa nunca mais fica insatisfeita
- Cada tarefa migra no máximo uma vez

Tempo de convergência

Teorema: A política de resposta ótima de peso máximo atinge um equilíbrio depois de no máximo n passos

Prova:

- Quando uma tarefa migra, torna insatisfeitas apenas tarefas com peso menor
- Isto é, após migrar uma tarefa nunca mais fica insatisfeita
- Cada tarefa migra no máximo uma vez
- O equilíbrio é atingido em no máximo n passos $\square$

Caso de máquinas relacionadas

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, $\text{PoA}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, $\text{PoA}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Primeira parte:

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, PoA$(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Primeira parte:

Mostrar que para jogos $J = (n, m, w, s)$ e atribuições $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio vale que

$$\text{custo}(A) = \mathrm{O}\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, PoA$(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Primeira parte:
Mostrar que para jogos $J = (n, m, w, s)$ e atribuições $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio vale que

$$\text{custo}(A) = \text{O}\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Segunda parte:

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, $\text{PoA}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Primeira parte:

Mostrar que para jogos $J = (n, m, w, s)$ e atribuições $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio vale que

$$\text{custo}(A) = \text{O}\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Segunda parte:

Apresentar jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio tal que

$$\text{custo}(A) = \Omega\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Primeira parte

Primeira parte

Lema: Para jogos $J = (n, m, w, s)$ e atribuições $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio, vale que

$$\text{custo}(A) = \mathrm{O}\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Primeira parte

Lema: Para jogos $J = (n, m, w, s)$ e atribuições $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio, vale que

$$\text{custo}(A) = \mathrm{O}\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Prova: Seja $c = \lfloor \text{custo}(A)/\text{opt}(J) \rfloor$

Primeira parte

Lema: Para jogos $J = (n, m, w, s)$ e atribuições $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio, vale que

$$\text{custo}(A) = \mathrm{O}\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Prova: Seja $c = \lfloor \text{custo}(A)/\text{opt}(J) \rfloor$

Vamos mostrar que $c \leq \Gamma^{-1}(m)$, onde Γ é a função gama

Primeira parte

Lema: Para jogos $J = (n, m, w, s)$ e atribuições $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio, vale que

$$\text{custo}(A) = \mathrm{O}\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Prova: Seja $c = \lfloor \text{custo}(A)/\text{opt}(J) \rfloor$

Vamos mostrar que $c \leq \Gamma^{-1}(m)$, onde Γ é a função gama

- $\Gamma(k) = (k-1)!$ para todo natural k

Primeira parte

Lema: Para jogos $J = (n, m, w, s)$ e atribuições $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio, vale que

$$\text{custo}(A) = \mathrm{O}\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Prova: Seja $c = \lfloor \text{custo}(A)/\text{opt}(J) \rfloor$

Vamos mostrar que $c \leq \Gamma^{-1}(m)$, onde Γ é a função gama

- $\Gamma(k) = (k-1)!$ para todo natural k
- $\Gamma^{-1}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Primeira parte

Lema: Para jogos $J = (n, m, w, s)$ e atribuições $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio, vale que

$$\text{custo}(A) = \mathrm{O}\left(\frac{\lg m}{\lg\lg m}\right)\text{opt}(J)$$

Prova: Seja $c = \lfloor \text{custo}(A)/\text{opt}(J) \rfloor$

Vamos mostrar que $c \leq \Gamma^{-1}(m)$, onde Γ é a função gama

- $\Gamma(k) = (k-1)!$ para todo natural k
- $\Gamma^{-1}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg\lg m}\right)$

SPG, $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_m$

Primeira parte

Lema: Para jogos $J = (n, m, w, s)$ e atribuições $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio, vale que

$$\text{custo}(A) = \text{O}\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Prova: Seja $c = \lfloor \text{custo}(A)/\text{opt}(J) \rfloor$

Vamos mostrar que $c \leq \Gamma^{-1}(m)$, onde Γ é a função gama

- $\Gamma(k) = (k-1)!$ para todo natural k
- $\Gamma^{-1}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

SPG, $s_1 \geq s_2 \geq \cdots \geq s_m$

$L = (1, 2, \ldots, m)$: máquinas em ordem de velocidade

Primeira parte

Primeira parte

$$\Gamma(k) = (k-1)!$$

Primeira parte

$\Gamma(k) = (k-1)!$ $\quad s_1 \geq \cdots \geq s_m$

Primeira parte

$$\Gamma(k) = (k-1)! \qquad s_1 \geq \cdots \geq s_m \qquad L = (1, 2, \ldots, m)$$

Primeira parte

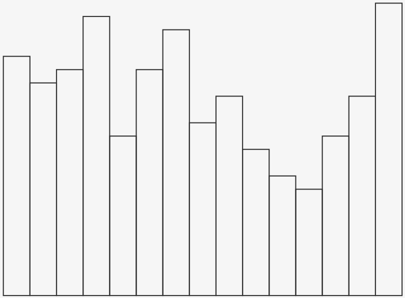
$\Gamma(k) = (k-1)! \qquad s_1 \geq \cdots \geq s_m \qquad L = (1, 2, \ldots, m)$

Para $k \in \{0, \ldots, c-1\}$, L_k é o maior prefixo de L de máquinas com carga $\geq k\text{opt}(J)$

Primeira parte

$$\Gamma(k) = (k-1)! \qquad s_1 \geq \cdots \geq s_m \qquad L = (1, 2, \ldots, m)$$

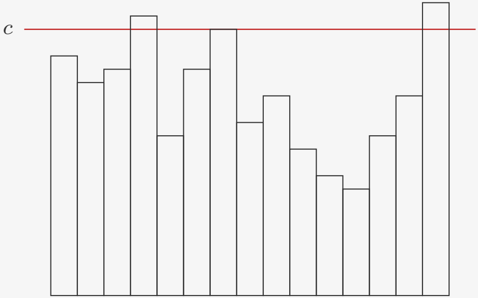
Para $k \in \{0, \ldots, c-1\}$, L_k é o maior prefixo de L de máquinas com carga $\geq k\text{opt}(J)$



Primeira parte

$\Gamma(k) = (k-1)!$ $\qquad s_1 \geq \cdots \geq s_m$ $\qquad L = (1, 2, \ldots, m)$

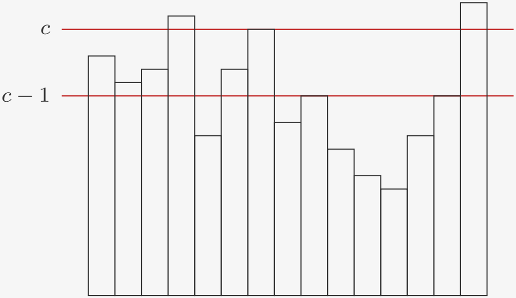
Para $k \in \{0, \ldots, c-1\}$, L_k é o maior prefixo de L de máquinas com carga $\geq k\mathsf{opt}(J)$



Primeira parte

$\Gamma(k) = (k-1)!$ $\qquad s_1 \geq \cdots \geq s_m$ $\qquad L = (1, 2, \ldots, m)$

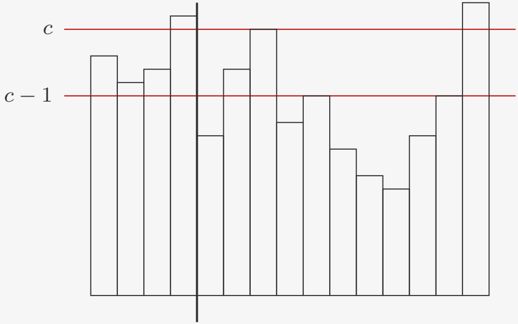
Para $k \in \{0, \ldots, c-1\}$, L_k é o maior prefixo de L de máquinas com carga $\geq k\text{opt}(J)$



Primeira parte

$$\Gamma(k) = (k-1)! \qquad s_1 \geq \cdots \geq s_m \qquad L = (1, 2, \ldots, m)$$

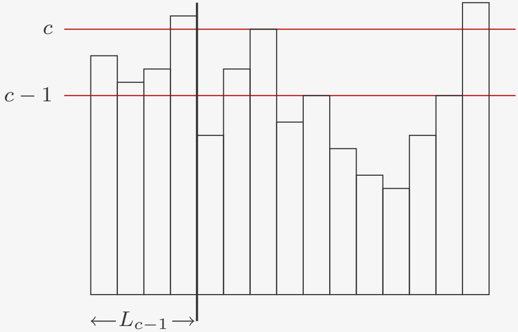
Para $k \in \{0, \ldots, c-1\}$, L_k é o maior prefixo de L de máquinas com carga $\geq k\mathsf{opt}(J)$



Primeira parte

$\Gamma(k) = (k-1)!$ $\qquad s_1 \geq \cdots \geq s_m$ $\qquad L = (1, 2, \ldots, m)$

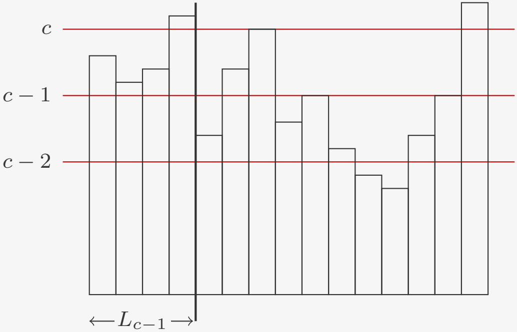
Para $k \in \{0, \ldots, c-1\}$, L_k é o maior prefixo de L de máquinas com carga $\geq k\text{opt}(J)$



Primeira parte

$\Gamma(k) = (k-1)!$ $\qquad s_1 \geq \cdots \geq s_m$ $\qquad L = (1, 2, \ldots, m)$

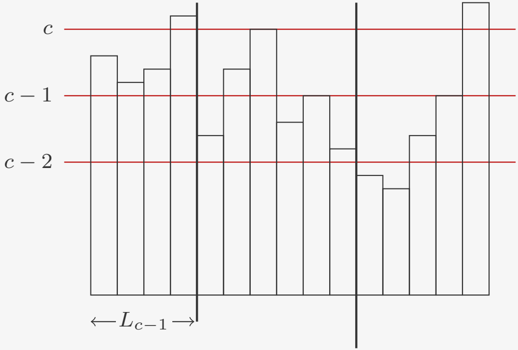
Para $k \in \{0, \ldots, c-1\}$, L_k é o maior prefixo de L de máquinas com carga $\geq k\text{opt}(J)$



Primeira parte

$\Gamma(k) = (k-1)!$ $\qquad s_1 \geq \cdots \geq s_m$ $\qquad L = (1, 2, \ldots, m)$

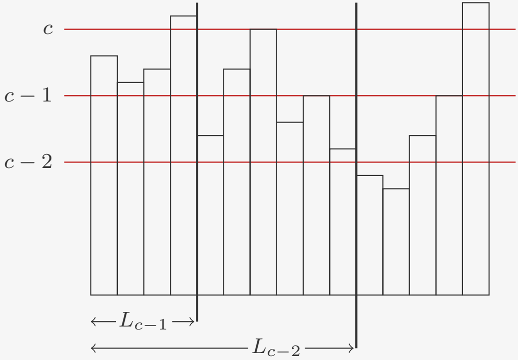
Para $k \in \{0, \ldots, c-1\}$, L_k é o maior prefixo de L de máquinas com carga $\geq k\,$opt(J)



Primeira parte

$$\Gamma(k) = (k-1)! \qquad s_1 \geq \cdots \geq s_m \qquad L = (1, 2, \ldots, m)$$

Para $k \in \{0, \ldots, c-1\}$, L_k é o maior prefixo de L de máquinas com carga $\geq k\text{opt}(J)$



Primeira parte

Vamos provar que:

Primeira parte

Vamos provar que:

- $|L_{c-1}| \geq 1$

Primeira parte

Vamos provar que:

- $|L_{c-1}| \geq 1$
- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$

Primeira parte

Vamos provar que:

- $|L_{c-1}| \geq 1$
- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$

Disso segue que $|L_0| \geq (c-1)! = \Gamma(c)$

Primeira parte

Vamos provar que:

- $|L_{c-1}| \geq 1$
- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$

Disso segue que $|L_0| \geq (c-1)! = \Gamma(c)$

Como $L_0 = L$ e $|L| = m$

Primeira parte

Vamos provar que:

- $|L_{c-1}| \geq 1$
- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$

Disso segue que $|L_0| \geq (c-1)! = \Gamma(c)$

Como $L_0 = L$ e $|L| = m$

- $m \geq \Gamma(c)$

Primeira parte

Vamos provar que:

- $|L_{c-1}| \geq 1$
- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$

Disso segue que $|L_0| \geq (c-1)! = \Gamma(c)$

Como $L_0 = L$ e $|L| = m$

- $m \geq \Gamma(c)$
- $c \leq \Gamma^{-1}(m)$

Primeira parte

Vamos provar que:

- $|L_{c-1}| \geq 1$
- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$

Disso segue que $|L_0| \geq (c-1)! = \Gamma(c)$

Como $L_0 = L$ e $|L| = m$

- $m \geq \Gamma(c)$
- $c \leq \Gamma^{-1}(m)$

Resta provar a recorrência

Prova da recorrência

Prova da recorrência

Vamos provar que:

Prova da recorrência

Vamos provar que:

- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$

Prova da recorrência

Vamos provar que:

- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$
- $|L_{c-1}| \geq 1$

Prova da recorrência

Vamos provar que:

- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$
- $|L_{c-1}| \geq 1$

Primeiro, mostremos que $|L_{c-1}| \geq 1$

Prova da recorrência

Vamos provar que:

- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$
- $|L_{c-1}| \geq 1$

Primeiro, mostremos que $|L_{c-1}| \geq 1$

Suponha que não, ou seja, que $L_{c-1} = \emptyset$

Prova da recorrência

Vamos provar que:

- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$
- $|L_{c-1}| \geq 1$

Primeiro, mostremos que $|L_{c-1}| \geq 1$

Suponha que não, ou seja, que $L_{c-1} = \emptyset$

Então a carga $\ell_1 < (c-1)\text{opt}(J)$

Prova da recorrência

Vamos provar que:

- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$
- $|L_{c-1}| \geq 1$

Primeiro, mostremos que $|L_{c-1}| \geq 1$

Suponha que não, ou seja, que $L_{c-1} = \emptyset$

Então a carga $\ell_1 < (c-1)\text{opt}(J)$

Seja i tarefa em uma máquina com carga $\geq c\,\text{opt}(J)$

Prova da recorrência

Vamos provar que:

- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$
- $|L_{c-1}| \geq 1$

Primeiro, mostremos que $|L_{c-1}| \geq 1$

Suponha que não, ou seja, que $L_{c-1} = \emptyset$

Então a carga $\ell_1 < (c-1)\mathsf{opt}(J)$

Seja i tarefa em uma máquina com carga $\geq c\,\mathsf{opt}(J)$

$$\ell_1 + \frac{w_i}{s_1}$$

Prova da recorrência

Vamos provar que:

- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$
- $|L_{c-1}| \geq 1$

Primeiro, mostremos que $|L_{c-1}| \geq 1$

Suponha que não, ou seja, que $L_{c-1} = \emptyset$

Então a carga $\ell_1 < (c-1)\mathsf{opt}(J)$

Seja i tarefa em uma máquina com carga $\geq c\,\mathsf{opt}(J)$

$$\ell_1 + \frac{w_i}{s_1} \; < \; (c-1)\,\mathsf{opt}(J) + \mathsf{opt}(J)$$

Prova da recorrência

Vamos provar que:

- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$
- $|L_{c-1}| \geq 1$

Primeiro, mostremos que $|L_{c-1}| \geq 1$

Suponha que não, ou seja, que $L_{c-1} = \emptyset$

Então a carga $\ell_1 < (c-1)\mathsf{opt}(J)$

Seja i tarefa em uma máquina com carga $\geq c\,\mathsf{opt}(J)$

$$\ell_1 + \frac{w_i}{s_1} \;<\; (c-1)\,\mathsf{opt}(J) + \mathsf{opt}(J) \;=\; c\,\mathsf{opt}(J)$$

Prova da recorrência

Vamos provar que:

- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$
- $|L_{c-1}| \geq 1$

Primeiro, mostremos que $|L_{c-1}| \geq 1$

Suponha que não, ou seja, que $L_{c-1} = \emptyset$

Então a carga $\ell_1 < (c-1)\text{opt}(J)$

Seja i tarefa em uma máquina com carga $\geq c\,\text{opt}(J)$

$$\ell_1 + \frac{w_i}{s_1} \; < \; (c-1)\,\text{opt}(J) + \text{opt}(J) \; = \; c\,\text{opt}(J)$$

Ou seja, i tem incentivo para mudar para a máquina 1

Prova da recorrência

Vamos provar que:

- $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ para todo $0 \leq k \leq c-2$
- $|L_{c-1}| \geq 1$

Primeiro, mostremos que $|L_{c-1}| \geq 1$

Suponha que não, ou seja, que $L_{c-1} = \emptyset$

Então a carga $\ell_1 < (c-1)\mathsf{opt}(J)$

Seja i tarefa em uma máquina com carga $\geq c\,\mathsf{opt}(J)$

$$\ell_1 + \frac{w_i}{s_1} \;<\; (c-1)\,\mathsf{opt}(J) + \mathsf{opt}(J) \;=\; c\,\mathsf{opt}(J)$$

Ou seja, i tem incentivo para mudar para a máquina 1

Contradição pois A é um equilíbrio

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Seja A^* uma atribuição ótima (de makespan mínimo)

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Seja A^* uma atribuição ótima (de makespan mínimo)

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Seja A^* uma atribuição ótima (de makespan mínimo)

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$

Prova:

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Seja A^* uma atribuição ótima (de makespan mínimo)

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$

Prova: Se $L_k = L$, nada a provar

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Seja A^* uma atribuição ótima (de makespan mínimo)

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$

Prova: Se $L_k = L$, nada a provar

Seja q máquina de menor índice em $L \setminus L_k$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Seja A^* uma atribuição ótima (de makespan mínimo)

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$

Prova: Se $L_k = L$, nada a provar

Seja q máquina de menor índice em $L \setminus L_k$

Temos que $\ell_q < k\,\text{opt}(J)$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Seja A^* uma atribuição ótima (de makespan mínimo)

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$

Prova: Se $L_k = L$, nada a provar

Seja q máquina de menor índice em $L \setminus L_k$

Temos que $\ell_q < k\,\mathsf{opt}(J)$

$\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathsf{opt}(J)$ pois i é tq $A(i) \in L_{k+1}$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Seja A^* uma atribuição ótima (de makespan mínimo)

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$

Prova: Se $L_k = L$, nada a provar

Seja q máquina de menor índice em $L \setminus L_k$

Temos que $\ell_q < k\,\mathsf{opt}(J)$

$\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathsf{opt}(J)$ pois i é tq $A(i) \in L_{k+1}$

Se $w_i \leq s_q\,\mathsf{opt}(J)$, então i tem incentivo para ir para q:

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Seja A^* uma atribuição ótima (de makespan mínimo)

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$

Prova: Se $L_k = L$, nada a provar

Seja q máquina de menor índice em $L \setminus L_k$

Temos que $\ell_q < k\,\mathsf{opt}(J)$

$\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathsf{opt}(J)$ pois i é tq $A(i) \in L_{k+1}$

Se $w_i \leq s_q\,\mathsf{opt}(J)$, então i tem incentivo para ir para q:

$$\ell_q + \frac{w_i}{s_q}$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Seja A^* uma atribuição ótima (de makespan mínimo)

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$

Prova: Se $L_k = L$, nada a provar

Seja q máquina de menor índice em $L \setminus L_k$

Temos que $\ell_q < k\,\text{opt}(J)$

$\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\text{opt}(J)$ pois i é tq $A(i) \in L_{k+1}$

Se $w_i \leq s_q\,\text{opt}(J)$, então i tem incentivo para ir para q:

$$\ell_q + \frac{w_i}{s_q} < k\,\text{opt}(J) + \text{opt}(J)$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Seja A^* uma atribuição ótima (de makespan mínimo)

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$

Prova: Se $L_k = L$, nada a provar

Seja q máquina de menor índice em $L \setminus L_k$

Temos que $\ell_q < k\,\mathsf{opt}(J)$

$\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathsf{opt}(J)$ pois i é tq $A(i) \in L_{k+1}$

Se $w_i \leq s_q\,\mathsf{opt}(J)$, então i tem incentivo para ir para q:

$$\ell_q + \frac{w_i}{s_q} < k\,\mathsf{opt}(J) + \mathsf{opt}(J) = (k+1)\mathsf{opt}(J)$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Seja A^* uma atribuição ótima (de makespan mínimo)

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$

Prova: Se $L_k = L$, nada a provar

Seja q máquina de menor índice em $L \setminus L_k$

Temos que $\ell_q < k\,\mathsf{opt}(J)$

$\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathsf{opt}(J)$ pois i é tq $A(i) \in L_{k+1}$

Se $w_i \leq s_q\,\mathsf{opt}(J)$, então i tem incentivo para ir para q:

$$\ell_q + \frac{w_i}{s_q} < k\,\mathsf{opt}(J) + \mathsf{opt}(J) = (k+1)\mathsf{opt}(J) \leq \ell_{A(i)},$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Seja A^* uma atribuição ótima (de makespan mínimo)

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$

Prova: Se $L_k = L$, nada a provar

Seja q máquina de menor índice em $L \setminus L_k$

Temos que $\ell_q < k\,\mathsf{opt}(J)$

$\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathsf{opt}(J)$ pois i é tq $A(i) \in L_{k+1}$

Se $w_i \leq s_q\,\mathsf{opt}(J)$, então i tem incentivo para ir para q:

$$\ell_q + \frac{w_i}{s_q} < k\,\mathsf{opt}(J) + \mathsf{opt}(J) = (k+1)\mathsf{opt}(J) \leq \ell_{A(i)},$$

contradição

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$:

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$:

- $\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathsf{opt}(J)$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$:

- $\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathrm{opt}(J)$
- $w_i > s_q\,\mathrm{opt}(J)$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$:

- $\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathsf{opt}(J)$
- $w_i > s_q\,\mathsf{opt}(J)$

Por contradição, suponha que $j = A^*(i) \notin L_k$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$:

- $\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathsf{opt}(J)$
- $w_i > s_q\,\mathsf{opt}(J)$

Por contradição, suponha que $j = A^*(i) \notin L_k$

Então, como $s_j \leq s_q$, a carga de j em A^* seria

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$:

- $\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\text{opt}(J)$
- $w_i > s_q\,\text{opt}(J)$

Por contradição, suponha que $j = A^*(i) \notin L_k$

Então, como $s_j \leq s_q$, a carga de j em A^* seria

$$\geq \frac{w_i}{s_j}$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$:

- $\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathsf{opt}(J)$
- $w_i > s_q\,\mathsf{opt}(J)$

Por contradição, suponha que $j = A^*(i) \notin L_k$

Então, como $s_j \leq s_q$, a carga de j em A^* seria

$$\geq \frac{w_i}{s_j} > \frac{s_q\,\mathsf{opt}(J)}{s_j}$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$:

- $\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathsf{opt}(J)$
- $w_i > s_q\,\mathsf{opt}(J)$

Por contradição, suponha que $j = A^*(i) \notin L_k$

Então, como $s_j \leq s_q$, a carga de j em A^* seria

$$\geq \frac{w_i}{s_j} > \frac{s_q\,\mathsf{opt}(J)}{s_j} \geq \mathsf{opt}(J)$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Para toda tarefa i tq $A(i) \in L_{k+1}$:

- $\ell_{A(i)} \geq (k+1)\,\mathsf{opt}(J)$
- $w_i > s_q\,\mathsf{opt}(J)$

Por contradição, suponha que $j = A^*(i) \notin L_k$

Então, como $s_j \leq s_q$, a carga de j em A^* seria

$$\geq \frac{w_i}{s_j} > \frac{s_q\,\mathsf{opt}(J)}{s_j} \geq \mathsf{opt}(J)$$

contradição $\square$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$ $\square$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$ $\square$

Pela definição de L_{k+1}, para cada j em L_{k+1},

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$ $\square$

Pela definição de L_{k+1}, para cada j em L_{k+1},

$$\ell_j = \sum_{i:A(i)=j} \frac{w_i}{s_j} \;\geq\; (k+1)\,\mathsf{opt}(J),$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$ $\square$

Pela definição de L_{k+1}, para cada j em L_{k+1},

$$\ell_j = \sum_{i:A(i)=j} \frac{w_i}{s_j} \geq (k+1)\,\mathrm{opt}(J),$$

e o total de peso atribuído por A a máquinas em L_{k+1} é

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$ $\square$

Pela definição de L_{k+1}, para cada j em L_{k+1},

$$\ell_j = \sum_{i:A(i)=j} \frac{w_i}{s_j} \;\geq\; (k+1)\,\mathsf{opt}(J),$$

e o total de peso atribuído por A a máquinas em L_{k+1} é

$$\geq \sum_{j \in L_{k+1}} (k+1)\,\mathsf{opt}(J)\, s_j$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$ $\square$

Pela definição de L_{k+1}, para cada j em L_{k+1},

$$\ell_j = \sum_{i:A(i)=j} \frac{w_i}{s_j} \geq (k+1)\,\mathsf{opt}(J),$$

e o total de peso atribuído por A a máquinas em L_{k+1} é

$$\geq \sum_{j \in L_{k+1}} (k+1)\,\mathsf{opt}(J)\, s_j$$

Pelo Lema, A^* atribui tudo isso a L_k sem estourar $\mathsf{opt}(J)$, logo

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$ $\square$

Pela definição de L_{k+1}, para cada j em L_{k+1},

$$\ell_j = \sum_{i:A(i)=j} \frac{w_i}{s_j} \geq (k+1)\,\text{opt}(J),$$

e o total de peso atribuído por A a máquinas em L_{k+1} é

$$\geq \sum_{j \in L_{k+1}} (k+1)\,\text{opt}(J)\,s_j$$

Pelo Lema, A^* atribui tudo isso a L_k sem estourar $\text{opt}(J)$, logo

$$\sum_{j \in L_{k+1}} (k+1)\,\text{opt}(J)\,s_j \leq \sum_{j \in L_k} \text{opt}(J)\,s_j,$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Lema: Se i é tal que $A(i) \in L_{k+1}$ então $A^*(i) \in L_k$ $\square$

Pela definição de L_{k+1}, para cada j em L_{k+1},

$$\ell_j = \sum_{i:A(i)=j} \frac{w_i}{s_j} \;\geq\; (k+1)\,\mathsf{opt}(J),$$

e o total de peso atribuído por A a máquinas em L_{k+1} é

$$\geq \sum_{j \in L_{k+1}} (k+1)\,\mathsf{opt}(J)\,s_j$$

Pelo Lema, A^* atribui tudo isso a L_k sem estourar $\mathsf{opt}(J)$, logo

$$\sum_{j \in L_{k+1}} (k+1)\,\mathsf{opt}(J)\,s_j \leq \sum_{j \in L_k} \mathsf{opt}(J)\,s_j,$$

que implica que $\sum_{j \in L_k} s_j \;\geq\; \sum_{j \in L_{k+1}} (k+1) s_j$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Relembrando:

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Relembrando:

$$\sum_{j \in L_k} s_j \;\geq\; \sum_{j \in L_{k+1}} (k+1) s_j$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Relembrando:

$$\sum_{j \in L_k} s_j \;\geq\; \sum_{j \in L_{k+1}} (k+1) s_j$$

Seja s^* a velocidade da máquina mais lenta em L_{k+1}

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Relembrando:

$$\sum_{j \in L_k} s_j \;\geq\; \sum_{j \in L_{k+1}} (k+1) s_j$$

Seja s^* a velocidade da máquina mais lenta em L_{k+1}

$$(|L_k| - |L_{k+1}|)s^*$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Relembrando:

$$\sum_{j \in L_k} s_j \ \geq \ \sum_{j \in L_{k+1}} (k+1) s_j$$

Seja s^* a velocidade da máquina mais lenta em L_{k+1}

$$(|L_k| - |L_{k+1}|)s^* = |L_k \setminus L_{k+1}|s^*$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Relembrando:

$$\sum_{j \in L_k} s_j \ \geq \ \sum_{j \in L_{k+1}} (k+1) s_j$$

Seja s^* a velocidade da máquina mais lenta em L_{k+1}

$$(|L_k| - |L_{k+1}|)s^* = |L_k \setminus L_{k+1}|s^* = \sum_{j \in L_k \setminus L_{k+1}} s^*$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Relembrando:

$$\sum_{j \in L_k} s_j \;\geq\; \sum_{j \in L_{k+1}} (k+1) s_j$$

Seja s^* a velocidade da máquina mais lenta em L_{k+1}

$$(|L_k| - |L_{k+1}|)s^* = |L_k \setminus L_{k+1}|s^* = \sum_{j \in L_k \setminus L_{k+1}} s^*$$

$$\geq \sum_{j \in L_k \setminus L_{k+1}} s_j$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Relembrando:

$$\sum_{j \in L_k} s_j \ \geq \ \sum_{j \in L_{k+1}} (k+1)s_j$$

Seja s^* a velocidade da máquina mais lenta em L_{k+1}

$$\begin{aligned}(|L_k| - |L_{k+1}|)s^* = |L_k \setminus L_{k+1}|s^* &= \sum_{j \in L_k \setminus L_{k+1}} s^* \\ &\geq \sum_{j \in L_k \setminus L_{k+1}} s_j = \sum_{j \in L_k} s_j - \sum_{j \in L_{k+1}} s_j\end{aligned}$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Relembrando:

$$\sum_{j \in L_k} s_j \;\geq\; \sum_{j \in L_{k+1}} (k+1) s_j$$

Seja s^* a velocidade da máquina mais lenta em L_{k+1}

$$\begin{aligned}
(|L_k| - |L_{k+1}|)s^* = |L_k \setminus L_{k+1}|s^* &= \sum_{j \in L_k \setminus L_{k+1}} s^* \\
&\geq \sum_{j \in L_k \setminus L_{k+1}} s_j = \sum_{j \in L_k} s_j - \sum_{j \in L_{k+1}} s_j \\
&\geq \sum_{j \in L_{k+1}} k s_j
\end{aligned}$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Relembrando:

$$\sum_{j \in L_k} s_j \geq \sum_{j \in L_{k+1}} (k+1) s_j$$

Seja s^* a velocidade da máquina mais lenta em L_{k+1}

$$\begin{aligned}(|L_k| - |L_{k+1}|)s^* = |L_k \setminus L_{k+1}|s^* &= \sum_{j \in L_k \setminus L_{k+1}} s^* \\ &\geq \sum_{j \in L_k \setminus L_{k+1}} s_j = \sum_{j \in L_k} s_j - \sum_{j \in L_{k+1}} s_j \\ &\geq \sum_{j \in L_{k+1}} k s_j \geq \sum_{j \in L_{k+1}} k s^*\end{aligned}$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Relembrando:

$$\sum_{j \in L_k} s_j \;\geq\; \sum_{j \in L_{k+1}} (k+1) s_j$$

Seja s^* a velocidade da máquina mais lenta em L_{k+1}

$$\begin{aligned}
(|L_k| - |L_{k+1}|)s^* = |L_k \setminus L_{k+1}|s^* &= \sum_{j \in L_k \setminus L_{k+1}} s^* \\
&\geq \sum_{j \in L_k \setminus L_{k+1}} s_j = \sum_{j \in L_k} s_j - \sum_{j \in L_{k+1}} s_j \\
&\geq \sum_{j \in L_{k+1}} k s_j \geq \sum_{j \in L_{k+1}} k s^* = k|L_{k+1}|s^*
\end{aligned}$$

Prova de que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$

Relembrando:

$$\sum_{j \in L_k} s_j \;\geq\; \sum_{j \in L_{k+1}} (k+1) s_j$$

Seja s^* a velocidade da máquina mais lenta em L_{k+1}

$$\begin{aligned}
(|L_k| - |L_{k+1}|)s^* = |L_k \setminus L_{k+1}|s^* &= \sum_{j \in L_k \setminus L_{k+1}} s^* \\
&\geq \sum_{j \in L_k \setminus L_{k+1}} s_j = \sum_{j \in L_k} s_j - \sum_{j \in L_{k+1}} s_j \\
&\geq \sum_{j \in L_{k+1}} k s_j \geq \sum_{j \in L_{k+1}} k s^* = k|L_{k+1}|s^*
\end{aligned}$$

de onde concluímos que $|L_k| \geq (k+1)|L_{k+1}|$ $\square$

Caso de máquinas relacionadas

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, PoA$(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, $\text{PoA}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Primeira parte:

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, PoA$(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Primeira parte:

Mostrar que para jogos $J = (n, m, w, s)$ e atribuições $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio vale que

$$\text{custo}(A) = \mathrm{O}\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, $\text{PoA}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Primeira parte:

Mostrar que para jogos $J = (n, m, w, s)$ e atribuições $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio vale que

$$\text{custo}(A) = \text{O}\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Segunda parte:

Caso de máquinas relacionadas

Teorema: Para o jogo de balanceamento de carga em m máquinas relacionadas, $\text{PoA}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Primeira parte:

Mostrar que para jogos $J = (n, m, w, s)$ e atribuições $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio vale que

$$\text{custo}(A) = \text{O}\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Segunda parte:

Apresentar jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio tal que

$$\text{custo}(A) = \Omega\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Segunda parte

Lema: Existe um jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio tal que

$$\mathsf{custo}(A) \;\geq\; \frac{1}{2}\Big(\Gamma^{-1}(m) - 2 - \mathsf{o}(1)\Big)\mathsf{opt}(J)$$

Segunda parte

Lema: Existe um jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio tal que

$$\text{custo}(A) \;\geq\; \frac{1}{2}\Big(\Gamma^{-1}(m) - 2 - \text{o}(1)\Big)\text{opt}(J)$$

Prova:

Segunda parte

Lema: Existe um jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio tal que

$$\text{custo}(A) \;\geq\; \frac{1}{2}\Big(\Gamma^{-1}(m) - 2 - \text{o}(1)\Big)\text{opt}(J)$$

Prova: Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas

Segunda parte

Lema: Existe um jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio tal que

$$\text{custo}(A) \;\geq\; \frac{1}{2}\Big(\Gamma^{-1}(m) - 2 - \text{o}(1)\Big)\text{opt}(J)$$

Prova: Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas

Grupo G_k:

Segunda parte

Lema: Existe um jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio tal que

$$\text{custo}(A) \;\geq\; \frac{1}{2}\Big(\Gamma^{-1}(m) - 2 - \text{o}(1)\Big)\text{opt}(J)$$

Prova: Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas

Grupo G_k:

- $\frac{q!}{k!}$ máquinas

Segunda parte

Lema: Existe um jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio tal que

$$\text{custo}(A) \;\geq\; \frac{1}{2}\Big(\Gamma^{-1}(m) - 2 - \text{o}(1)\Big)\text{opt}(J)$$

Prova: Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas

Grupo G_k:

- $\frac{q!}{k!}$ máquinas
- com velocidade 2^k

Segunda parte

Lema: Existe um jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio tal que

$$\text{custo}(A) \;\geq\; \frac{1}{2}\Big(\Gamma^{-1}(m) - 2 - \text{o}(1)\Big)\text{opt}(J)$$

Prova: Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas

Grupo G_k:

- $\frac{q!}{k!}$ máquinas
- com velocidade 2^k
- cada uma com k tarefas (atribuídas por A)

Segunda parte

Lema: Existe um jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio tal que

$$\text{custo}(A) \;\geq\; \frac{1}{2}\Big(\Gamma^{-1}(m) - 2 - \text{o}(1)\Big)\text{opt}(J)$$

Prova: Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas

Grupo G_k:

- $\frac{q!}{k!}$ máquinas
- com velocidade 2^k
- cada uma com k tarefas (atribuídas por A)
- de peso 2^k

Segunda parte

Lema: Existe um jogo $J = (n, m, w, s)$ e atribuição $A : [n] \to [m]$ em equilíbrio tal que

$$\text{custo}(A) \ \geq \ \frac{1}{2}\Big(\Gamma^{-1}(m) - 2 - \text{o}(1)\Big)\text{opt}(J)$$

Prova: Seja $q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$ e sejam $G_0, \ldots, G_q$ grupos disjuntos de máquinas

Grupo G_k:

- $\frac{q!}{k!}$ máquinas
- com velocidade 2^k
- cada uma com k tarefas (atribuídas por A)
- de peso 2^k
- Carga de cada máquina: k

Segunda parte

Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e < 3 \qquad q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$$

Segunda parte

Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e < 3 \qquad q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$$

Total de máquinas:

Segunda parte

Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e < 3 \qquad q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$$

Total de máquinas:

$$\sum_{k=0}^{q} |G_k|$$

Segunda parte

Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e < 3 \qquad q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$$

Total de máquinas:

$$\sum_{k=0}^{q} |G_k| = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$$

Segunda parte

Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e < 3 \qquad q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$$

Total de máquinas:

$$\sum_{k=0}^{q} |G_k| = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$$

Segunda parte

Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e < 3 \qquad q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$$

Total de máquinas:

$$\sum_{k=0}^{q} |G_k| = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < 3\,\Gamma(q+1)$$

Segunda parte

Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e < 3 \qquad q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$$

Total de máquinas:

$$\sum_{k=0}^{q} |G_k| = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < 3\,\Gamma(q+1) \leq m$$

Segunda parte

Como

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e < 3 \qquad q = \lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor$$

Total de máquinas:

$$\sum_{k=0}^{q} |G_k| = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = q! \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < 3\,\Gamma(q+1) \leq m$$

Complete m com máquinas sem grupo e vazias de velocidade 1 (como as de G_0)

A está em equilíbrio?

Tarefa em máquina de G_k não quer mudar para máquina de G_j

A está em equilíbrio?

Tarefa em máquina de G_k não quer mudar para máquina de G_j

- Se $j \geq k$

A está em equilíbrio?

Tarefa em máquina de G_k não quer mudar para máquina de G_j

- Se $j \geq k$
  - a máquina tem carga $j \geq k$

A está em equilíbrio?

Tarefa em máquina de G_k não quer mudar para máquina de G_j

- Se $j \geq k$
  - a máquina tem carga $j \geq k$
- Se $j < k$,

A está em equilíbrio?

Tarefa em máquina de G_k não quer mudar para máquina de G_j

- Se $j \geq k$
  - a máquina tem carga $j \geq k$
- Se $j < k$,
  - como $2^t \geq t + 1$ pra todo $t \geq 1$ temos que

A está em equilíbrio?

Tarefa em máquina de G_k não quer mudar para máquina de G_j

- Se $j \geq k$
  - a máquina tem carga $j \geq k$
- Se $j < k$,
  - como $2^t \geq t + 1$ pra todo $t \geq 1$ temos que

$$j + \frac{2^k}{2^j}$$

A está em equilíbrio?

Tarefa em máquina de G_k não quer mudar para máquina de G_j

- Se $j \geq k$
  - a máquina tem carga $j \geq k$
- Se $j < k$,
  - como $2^t \geq t + 1$ pra todo $t \geq 1$ temos que

$$j + \frac{2^k}{2^j} = j + 2^{k-j}$$

A está em equilíbrio?

Tarefa em máquina de G_k não quer mudar para máquina de G_j

- Se $j \geq k$
  - a máquina tem carga $j \geq k$
- Se $j < k$,
  - como $2^t \geq t + 1$ pra todo $t \geq 1$ temos que

$$j + \frac{2^k}{2^j} = j + 2^{k-j} \geq j + (k - j + 1)$$

A está em equilíbrio?

Tarefa em máquina de G_k não quer mudar para máquina de G_j

- Se $j \geq k$
  - a máquina tem carga $j \geq k$
- Se $j < k$,
  - como $2^t \geq t + 1$ pra todo $t \geq 1$ temos que

$$j + \frac{2^k}{2^j} = j + 2^{k-j} \geq j + (k - j + 1) = k + 1$$

A está em equilíbrio?

Tarefa em máquina de G_k não quer mudar para máquina de G_j

- Se $j \geq k$
  - a máquina tem carga $j \geq k$
- Se $j < k$,
  - como $2^t \geq t + 1$ pra todo $t \geq 1$ temos que

$$j + \frac{2^k}{2^j} = j + 2^{k-j} \geq j + (k - j + 1) = k + 1$$

Portanto, A está em equilíbrio

Jogo e equilíbrio

A é um equilíbrio de custo social q

Jogo e equilíbrio

A é um equilíbrio de custo social q

Vamos mostrar que $\text{opt}(J) \leq 2$

Jogo e equilíbrio

A é um equilíbrio de custo social q

Vamos mostrar que $\text{opt}(J) \leq 2$

Considere atribuição de tarefas de A^*:

Jogo e equilíbrio

A é um equilíbrio de custo social q

Vamos mostrar que $\text{opt}(J) \leq 2$

Considere atribuição de tarefas de A^*:

- As de G_q serão atribuídas as máquinas de G_{q-1}

Jogo e equilíbrio

A é um equilíbrio de custo social q

Vamos mostrar que $\text{opt}(J) \leq 2$

Considere atribuição de tarefas de A^*:

- As de G_q serão atribuídas as máquinas de G_{q-1}
- As de G_{q-1} serão atribuídas as máquinas de G_{q-2}

Jogo e equilíbrio

A é um equilíbrio de custo social q

Vamos mostrar que $\text{opt}(J) \leq 2$

Considere atribuição de tarefas de A^*:

- As de G_q serão atribuídas as máquinas de G_{q-1}
- As de G_{q-1} serão atribuídas as máquinas de G_{q-2}
- Assim sucessivamente...

Jogo e equilíbrio

A é um equilíbrio de custo social q

Vamos mostrar que opt$(J) \leq 2$

Considere atribuição de tarefas de A^*:

- As de G_q serão atribuídas as máquinas de G_{q-1}
- As de G_{q-1} serão atribuídas as máquinas de G_{q-2}
- Assim sucessivamente...

Número de tarefas que A atribuiu a G_k:

Jogo e equilíbrio

A é um equilíbrio de custo social q

Vamos mostrar que $\text{opt}(J) \leq 2$

Considere atribuição de tarefas de A^*:

- As de G_q serão atribuídas as máquinas de G_{q-1}
- As de G_{q-1} serão atribuídas as máquinas de G_{q-2}
- Assim sucessivamente...

Número de tarefas que A atribuiu a G_k:

$$k|G_k| =$$

Jogo e equilíbrio

A é um equilíbrio de custo social q

Vamos mostrar que $\text{opt}(J) \leq 2$

Considere atribuição de tarefas de A^*:

- As de G_q serão atribuídas as máquinas de G_{q-1}
- As de G_{q-1} serão atribuídas as máquinas de G_{q-2}
- Assim sucessivamente...

Número de tarefas que A atribuiu a G_k:

$$k|G_k| = \frac{q!k}{k!} =$$

Jogo e equilíbrio

A é um equilíbrio de custo social q

Vamos mostrar que $\text{opt}(J) \leq 2$

Considere atribuição de tarefas de A^*:

- As de G_q serão atribuídas as máquinas de G_{q-1}
- As de G_{q-1} serão atribuídas as máquinas de G_{q-2}
- Assim sucessivamente...

Número de tarefas que A atribuiu a G_k:

$$k|G_k| = \frac{q!k}{k!} = \frac{q!}{(k-1)!} = |G_{k-1}|$$

Jogo e equilíbrio

A é um equilíbrio de custo social q

Vamos mostrar que $\text{opt}(J) \leq 2$

Considere atribuição de tarefas de A^*:

- As de G_q serão atribuídas as máquinas de G_{q-1}
- As de G_{q-1} serão atribuídas as máquinas de G_{q-2}
- Assim sucessivamente...

Número de tarefas que A atribuiu a G_k:

$$k|G_k| = \frac{q!k}{k!} = \frac{q!}{(k-1)!} = |G_{k-1}|$$

Uma tarefa em cada máquina, com custo de $\frac{2^k}{2^{k-1}} = 2$

Conclusão

Preço da anarquia deste jogo: $\geq \frac{q}{2} = \frac{\lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor}{2}$

Conclusão

Preço da anarquia deste jogo: $\geq \frac{q}{2} = \frac{\lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor}{2}$

Como $\Gamma^{-1}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$,

Conclusão

Preço da anarquia deste jogo: $\geq \frac{q}{2} = \frac{\lfloor \Gamma^{-1}(m/3)-1 \rfloor}{2}$

Como $\Gamma^{-1}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$, existem c e m_0 tq

Conclusão

Preço da anarquia deste jogo: $\geq \frac{q}{2} = \frac{\lfloor \Gamma^{-1}(m/3)-1 \rfloor}{2}$

Como $\Gamma^{-1}(m) = \Theta(\frac{\lg m}{\lg \lg m})$, existem c e m_0 tq

$$\Gamma^{-1}(m) \geq c \left(\frac{\lg m}{\lg \lg m} \right),$$

Conclusão

Preço da anarquia deste jogo: $\geq \frac{q}{2} = \frac{\lfloor \Gamma^{-1}(m/3)-1 \rfloor}{2}$

Como $\Gamma^{-1}(m) = \Theta(\frac{\lg m}{\lg \lg m})$, existem c e m_0 tq

$$\Gamma^{-1}(m) \geq c \left(\frac{\lg m}{\lg \lg m} \right),$$

para $m \geq m_0$

Conclusão

Preço da anarquia deste jogo: $\geq \frac{q}{2} = \frac{\lfloor \Gamma^{-1}(m/3)-1 \rfloor}{2}$

Como $\Gamma^{-1}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$, existem c e m_0 tq

$$\Gamma^{-1}(m) \geq c\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right),$$

para $m \geq m_0$

Então, para $m \geq 3m_0$, o preço da anarquia é

Conclusão

Preço da anarquia deste jogo: $\geq \frac{q}{2} = \frac{\lfloor \Gamma^{-1}(m/3)-1 \rfloor}{2}$

Como $\Gamma^{-1}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$, existem c e m_0 tq

$$\Gamma^{-1}(m) \geq c \left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right),$$

para $m \geq m_0$

Então, para $m \geq 3m_0$, o preço da anarquia é

$$\geq \frac{\lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor}{2}$$

Conclusão

Preço da anarquia deste jogo: $\geq \frac{q}{2} = \frac{\lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor}{2}$

Como $\Gamma^{-1}(m) = \Theta(\frac{\lg m}{\lg \lg m})$, existem c e m_0 tq

$$\Gamma^{-1}(m) \geq c \left(\frac{\lg m}{\lg \lg m} \right),$$

para $m \geq m_0$

Então, para $m \geq 3m_0$, o preço da anarquia é

$$\geq \frac{\lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor}{2} \geq \frac{\lfloor c\,(\frac{\lg m/3}{\lg \lg m/3}) - 1 \rfloor}{2}$$

Conclusão

Preço da anarquia deste jogo: $\geq \frac{q}{2} = \frac{\lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor}{2}$

Como $\Gamma^{-1}(m) = \Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$, existem c e m_0 tq

$$\Gamma^{-1}(m) \geq c \left(\frac{\lg m}{\lg \lg m} \right),$$

para $m \geq m_0$

Então, para $m \geq 3m_0$, o preço da anarquia é

$$\geq \frac{\lfloor \Gamma^{-1}(m/3) - 1 \rfloor}{2} \geq \frac{\lfloor c\left(\frac{\lg m/3}{\lg \lg m/3}\right) - 1 \rfloor}{2} = \Omega\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m} \right)$$

Tempo de convergência

No caso de máquinas relacionadas, não se conhece resultado como o para máquinas idênticas

Tempo de convergência

No caso de máquinas relacionadas, não se conhece resultado como o para máquinas idênticas

Mas podemos computar um equilíbrio eficientemente

Tempo de convergência

Algoritmo LPT (*largest processing time*):

Tempo de convergência

Algoritmo LPT (*largest processing time*):

- Atribua tarefas em ordem decrescente de peso

Tempo de convergência

Algoritmo LPT (*largest processing time*):

- Atribua tarefas em ordem decrescente de peso
- pondo-as em máquinas que minimizem o seu custo

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas)

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas)

Sejam:

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas)

Sejam:

- t a última tarefa colocada

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas)

Sejam:

- t a última tarefa colocada
- j^* a máquina a que foi atribuída

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas)

Sejam:

- t a última tarefa colocada
- j^* a máquina a que foi atribuída

Apenas tarefas alocadas a j^* podem estar insatisfeitas

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas)

Sejam:

- t a última tarefa colocada
- j^* a máquina a que foi atribuída

Apenas tarefas alocadas a j^* podem estar insatisfeitas

Seja $i < t$ uma tarefa alocada a j^*

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas)

Sejam:

- t a última tarefa colocada
- j^* a máquina a que foi atribuída

Apenas tarefas alocadas a j^* podem estar insatisfeitas

Seja $i < t$ uma tarefa alocada a j^*

Para toda máquina j

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas)

Sejam:

- t a última tarefa colocada
- j^* a máquina a que foi atribuída

Apenas tarefas alocadas a j^* podem estar insatisfeitas

Seja $i < t$ uma tarefa alocada a j^*

Para toda máquina j

$$\frac{\displaystyle\sum_{k:\ A(k)=j^*} w_k}{s_{j^*}}$$

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas)

Sejam:

- t a última tarefa colocada
- j^* a máquina a que foi atribuída

Apenas tarefas alocadas a j^* podem estar insatisfeitas

Seja $i < t$ uma tarefa alocada a j^*

Para toda máquina j

$$\frac{\displaystyle\sum_{k:\ A(k)=j^*} w_k}{s_{j^*}} \leq \frac{w_t + \displaystyle\sum_{k:\ A(k)=j} w_k}{s_j}$$

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas)

Sejam:

- t a última tarefa colocada
- j^* a máquina a que foi atribuída

Apenas tarefas alocadas a j^* podem estar insatisfeitas

Seja $i < t$ uma tarefa alocada a j^*

Para toda máquina j

$$\frac{\sum\limits_{k:\ A(k)=j^*} w_k}{s_{j^*}} \leq \frac{w_t + \sum\limits_{k:\ A(k)=j} w_k}{s_j} \leq \frac{w_i + \sum\limits_{k:\ A(k)=j} w_k}{s_j}$$

Tempo de convergência

Teorema: A atribuição calculada por LPT é um equilíbrio

Prova: Por indução no número de tarefas (colocadas)

Sejam:

- t a última tarefa colocada
- j^* a máquina a que foi atribuída

Apenas tarefas alocadas a j^* podem estar insatisfeitas

Seja $i < t$ uma tarefa alocada a j^*

Para toda máquina j

$$\frac{\sum_{k:\ A(k)=j^*} w_k}{s_{j^*}} \leq \frac{w_t + \sum_{k:\ A(k)=j} w_k}{s_j} \leq \frac{w_i + \sum_{k:\ A(k)=j} w_k}{s_j}$$

Logo i está satisfeita e a atribuição está em equilíbrio $\square$

Recapitulação

- Jogos de balanceamento de carga

Recapitulação

- Jogos de balanceamento de carga
  - com máquinas idênticas

Recapitulação

- Jogos de balanceamento de carga
  - com máquinas idênticas
  - com máquinas relacionadas

Recapitulação

- Jogos de balanceamento de carga
  - com máquinas idênticas
  - com máquinas relacionadas
- Ambas as versões tem equilíbrio puro

Recapitulação

- Jogos de balanceamento de carga
  - com máquinas idênticas
  - com máquinas relacionadas
- Ambas as versões tem equilíbrio puro
- Preço da estabilidade de ambos é 1

Recapitulação

- Jogos de balanceamento de carga
  - com máquinas idênticas
  - com máquinas relacionadas
- Ambas as versões tem equilíbrio puro
- Preço da estabilidade de ambos é 1
- Preço da anarquia:

Recapitulação

- Jogos de balanceamento de carga
  - com máquinas idênticas
  - com máquinas relacionadas
- Ambas as versões tem equilíbrio puro
- Preço da estabilidade de ambos é 1
- Preço da anarquia:
  - máquinas idênticas: $2 - \frac{2}{m+1}$

Recapitulação

- Jogos de balanceamento de carga
  - com máquinas idênticas
  - com máquinas relacionadas
- Ambas as versões tem equilíbrio puro
- Preço da estabilidade de ambos é 1
- Preço da anarquia:
  - máquinas idênticas: $2 - \frac{2}{m+1}$
  - máquinas relacionadas: $\Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$

Recapitulação

- Jogos de balanceamento de carga
  - com máquinas idênticas
  - com máquinas relacionadas
- Ambas as versões tem equilíbrio puro
- Preço da estabilidade de ambos é 1
- Preço da anarquia:
  - máquinas idênticas: $2 - \frac{2}{m+1}$
  - máquinas relacionadas: $\Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$
- Tempo de convergência:

Recapitulação

- Jogos de balanceamento de carga
  - com máquinas idênticas
  - com máquinas relacionadas
- Ambas as versões tem equilíbrio puro
- Preço da estabilidade de ambos é 1
- Preço da anarquia:
  - máquinas idênticas: $2 - \frac{2}{m+1}$
  - máquinas relacionadas: $\Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$
- Tempo de convergência:
  - máquinas idênticas: convergência em n passos

Recapitulação

- Jogos de balanceamento de carga
  - com máquinas idênticas
  - com máquinas relacionadas
- Ambas as versões tem equilíbrio puro
- Preço da estabilidade de ambos é 1
- Preço da anarquia:
  - máquinas idênticas: $2 - \frac{2}{m+1}$
  - máquinas relacionadas: $\Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$
- Tempo de convergência:
  - máquinas idênticas: convergência em n passos
  - máquinas relacionadas:

Recapitulação

- Jogos de balanceamento de carga
  - com máquinas idênticas
  - com máquinas relacionadas
- Ambas as versões tem equilíbrio puro
- Preço da estabilidade de ambos é 1
- Preço da anarquia:
  - máquinas idênticas: $2 - \frac{2}{m+1}$
  - máquinas relacionadas: $\Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$
- Tempo de convergência:
  - máquinas idênticas: convergência em n passos
  - máquinas relacionadas:
    - não conhecemos uma política boa

Recapitulação

- Jogos de balanceamento de carga
  - com máquinas idênticas
  - com máquinas relacionadas
- Ambas as versões tem equilíbrio puro
- Preço da estabilidade de ambos é 1
- Preço da anarquia:
  - máquinas idênticas: $2 - \frac{2}{m+1}$
  - máquinas relacionadas: $\Theta\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right)$
- Tempo de convergência:
  - máquinas idênticas: convergência em n passos
  - máquinas relacionadas:
    - não conhecemos uma política boa
    - existe algoritmo eficiente que encontra equilíbrio

Estratégias mistas

Até o momento, consideramos apenas equilíbrios puros

Estratégias mistas

Até o momento, consideramos apenas equilíbrios puros

- Vamos considerar agora equilíbrios mistos

Estratégias mistas

Até o momento, consideramos apenas equilíbrios puros

- Vamos considerar agora equilíbrios mistos

Uma estratégia mista para o jogador i é um vetor p_i onde:

Estratégias mistas

Até o momento, consideramos apenas equilíbrios puros

- Vamos considerar agora equilíbrios mistos

Uma estratégia mista para o jogador i é um vetor p_i onde:

- p_i^j é a probabilidade da tarefa i ser alocada na máquina j

Estratégias mistas

Até o momento, consideramos apenas equilíbrios puros

- Vamos considerar agora equilíbrios mistos

Uma estratégia mista para o jogador i é um vetor p_i onde:

- p_i^j é a probabilidade da tarefa i ser alocada na máquina j
- Note que, A se torna uma atribuição aleatória

Estratégias mistas

Até o momento, consideramos apenas equilíbrios puros

- Vamos considerar agora equilíbrios mistos

Uma estratégia mista para o jogador i é um vetor p_i onde:

- p_i^j é a probabilidade da tarefa i ser alocada na máquina j
- Note que, A se torna uma atribuição aleatória

Seja x_i^j a variável aleatória binária que indica se a tarefa i é alocada na máquina j

Estratégias mistas

Até o momento, consideramos apenas equilíbrios puros

- Vamos considerar agora equilíbrios mistos

Uma estratégia mista para o jogador i é um vetor p_i onde:

- p_i^j é a probabilidade da tarefa i ser alocada na máquina j
- Note que, A se torna uma atribuição aleatória

Seja x_i^j a variável aleatória binária que indica se a tarefa i é alocada na máquina j

$p_i^j = \mathbb{P}[x_i^j = 1]$ ou equivalentemente $p_i^j = \mathbb{P}[A(i) = j]$

Estratégias mistas

Assim, a carga esperada da máquina j é

Estratégias mistas

Assim, a carga esperada da máquina j é

$$\mathbb{E}[\ell_j]$$

Estratégias mistas

Assim, a carga esperada da máquina j é

$$\mathbb{E}\left[\ell_j\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i \in [n]} \frac{w_i x_i^j}{s_j}\right]$$

Estratégias mistas

Assim, a carga esperada da máquina j é

$$\mathbb{E}\left[\ell_j\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i \in [n]} \frac{w_i x_i^j}{s_j}\right] = \sum_{i \in [n]} \frac{w_i \mathbb{E}\left[x_i^j\right]}{s_j}$$

Estratégias mistas

Assim, a carga esperada da máquina j é

$$\mathbb{E}\left[\ell_j\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i\in[n]} \frac{w_i x_i^j}{s_j}\right] = \sum_{i\in[n]} \frac{w_i \mathbb{E}\left[x_i^j\right]}{s_j} = \sum_{i\in[n]} \frac{w_i p_i^j}{s_j}$$

Estratégias mistas

Assim, a carga esperada da máquina j é

$$\mathbb{E}\left[\ell_j\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i\in[n]} \frac{w_i x_i^j}{s_j}\right] = \sum_{i\in[n]} \frac{w_i \mathbb{E}\left[x_i^j\right]}{s_j} = \sum_{i\in[n]} \frac{w_i p_i^j}{s_j}$$

$P = (p_i^j)_{i\in[n],j\in[m]}$ é um perfil de estratégias

Estratégias mistas

Assim, a carga esperada da máquina j é

$$\mathbb{E}\left[\ell_j\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i\in[n]} \frac{w_i x_i^j}{s_j}\right] = \sum_{i\in[n]} \frac{w_i \mathbb{E}\left[x_i^j\right]}{s_j} = \sum_{i\in[n]} \frac{w_i p_i^j}{s_j}$$

$P = (p_i^j)_{i\in[n],j\in[m]}$ é um perfil de estratégias

O custo de P é o makespan esperado, isto é,

Estratégias mistas

Assim, a carga esperada da máquina j é

$$\mathbb{E}\left[\ell_j\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i\in[n]} \frac{w_i x_i^j}{s_j}\right] = \sum_{i\in[n]} \frac{w_i \mathbb{E}\left[x_i^j\right]}{s_j} = \sum_{i\in[n]} \frac{w_i p_i^j}{s_j}$$

$P = (p_i^j)_{i\in[n],j\in[m]}$ é um perfil de estratégias

O custo de P é o makespan esperado, isto é,

$$\text{custo}(P) = \mathbb{E}[\text{custo}(A)] = \mathbb{E}\left[\max_{j\in[m]}(\ell_j)\right]$$

Estratégias mistas

O custo de uma máquina j para a tarefa i é $c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j | A(i) = j]$

Estratégias mistas

O custo de uma máquina j para a tarefa i é $c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j | A(i) = j]$

Para todo perfil de estratégias P, vale que

Estratégias mistas

O custo de uma máquina j para a tarefa i é $c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j | A(i) = j]$

Para todo perfil de estratégias P, vale que

$$c_i^j$$

Estratégias mistas

O custo de uma máquina j para a tarefa i é $c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j | A(i) = j]$

Para todo perfil de estratégias P, vale que

$$c_i^j = \frac{w_i + \sum_{k \neq i} w_k p_k^j}{s_j}$$

Estratégias mistas

O custo de uma máquina j para a tarefa i é $c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j | A(i) = j]$

Para todo perfil de estratégias P, vale que

$$c_i^j = \frac{w_i + \sum_{k \neq i} w_k p_k^j}{s_j} = \mathbb{E}(\ell_j) + (1 - p_i^j)\frac{w_i}{s_j}$$

Estratégias mistas

O custo de uma máquina j para a tarefa i é $c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j | A(i) = j]$

Para todo perfil de estratégias P, vale que

$$c_i^j = \frac{w_i + \sum_{k \neq i} w_k p_k^j}{s_j} = \mathbb{E}(\ell_j) + (1 - p_i^j)\frac{w_i}{s_j}$$

Proposição: Um perfil de estratégias P é um equilíbrio de Nash se e somente se para todo jogador i e para toda máquina j, se $p_i^j > 0$ então, para toda máquina k vale que $c_i^j \leq c_i^k$

Preço da anarquia para equilíbrio puro

Exemplo:

Preço da anarquia para equilíbrio puro

Exemplo:

Preço da anarquia para equilíbrio puro

Exemplo: $m = 2$

Preço da anarquia para equilíbrio puro

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$

Preço da anarquia para equilíbrio puro

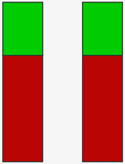
Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$

Preço da anarquia para equilíbrio puro

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

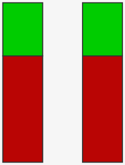
Preço da anarquia para equilíbrio puro

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$



Preço da anarquia para equilíbrio puro

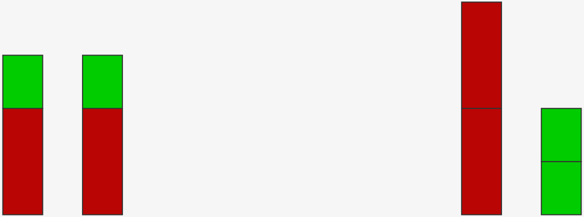
Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$



Makespan mínimo: 3

Preço da anarquia para equilíbrio puro

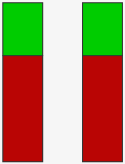
Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$



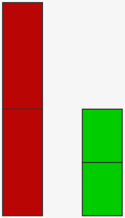
Makespan mínimo: 3

Preço da anarquia para equilíbrio puro

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$



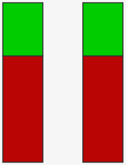
Makespan mínimo: 3



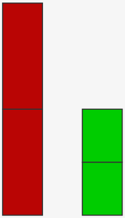
Equilíbrio com makespan 4

Preço da anarquia para equilíbrio puro

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$



Makespan mínimo: 3



Equilíbrio com makespan 4

Preço da anarquia pelo menos 4/3

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j]$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \le i \le 4} w_i p_i^j$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2}$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 2$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \le i \le 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 1?

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 1?

$$c_i^j$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 1?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 1?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 1$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 1?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 1 = 3.5$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é a carga esperada de uma máquina?

$$\mathbb{E}[\ell_j] = \sum_{1 \leq i \leq 4} w_i p_i^j = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 3$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 2?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 2 = 4$$

Qual é o custo para uma tarefa de peso 1?

$$c_i^j = \mathbb{E}[\ell_j] + (1 - p_i^j) w_i = 3 + \frac{1}{2} \times 1 = 3.5$$

Note que P é um equilíbrio misto

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4
- Existem 4 formas do makespan ser 5

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4
- Existem 4 formas do makespan ser 5
- Existem 2 formas do makespan ser 6

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4
- Existem 4 formas do makespan ser 5
- Existem 2 formas do makespan ser 6

Assim,

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4
- Existem 4 formas do makespan ser 5
- Existem 2 formas do makespan ser 6

Assim,

$$\text{custo}(P)$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4
- Existem 4 formas do makespan ser 5
- Existem 2 formas do makespan ser 6

Assim,

$$\text{custo}(P) = \mathbb{E}[\text{custo}(A)]$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4
- Existem 4 formas do makespan ser 5
- Existem 2 formas do makespan ser 6

Assim,

$$\begin{aligned}\text{custo}(P) &= \mathbb{E}[\text{custo}(A)] \\ &= \frac{1}{16}\left(3 \times 4 + 4 \times 6 + 5 \times 4 + 6 \times 2\right)\end{aligned}$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4
- Existem 4 formas do makespan ser 5
- Existem 2 formas do makespan ser 6

Assim,

$$\begin{aligned} \text{custo}(P) &= \mathbb{E}[\text{custo}(A)] \\ &= \frac{1}{16}\left(3 \times 4 + 4 \times 6 + 5 \times 4 + 6 \times 2\right) = 4.25 \end{aligned}$$

Preço da anarquia para equilíbrio misto

Exemplo: $m = 2$, $s_1 = s_2 = 1$ e $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = 1$

- $p_i^j = 1/2$ para toda tarefa i e máquina j

Qual é o makespan esperado?

- Existem 4 formas do makespan ser 3
- Existem 6 formas do makespan ser 4
- Existem 4 formas do makespan ser 5
- Existem 2 formas do makespan ser 6

Assim,

$$\begin{aligned}\text{custo}(P) &= \mathbb{E}[\text{custo}(A)] \\ &= \frac{1}{16}\left(3 \times 4 + 4 \times 6 + 5 \times 4 + 6 \times 2\right) = 4.25\end{aligned}$$

Que é pior do que o equilíbrio puro que tínhamos visto (com custo 4)

Resultados para equilíbrio misto

Resultados para equilíbrio misto

Teorema: Para todo $m \in \mathbb{N}$, existe uma instância J do jogo do balanceamento de carga com m máquinas idênticas e $n = m$ tarefas que tem um equilíbrio de Nash com perfil de estratégias P onde

$$\text{custo}(P) = \Omega\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Resultados para equilíbrio misto

Teorema: Para todo $m \in \mathbb{N}$, existe uma instância J do jogo do balanceamento de carga com m máquinas idênticas e $n = m$ tarefas que tem um equilíbrio de Nash com perfil de estratégias P onde

$$\text{custo}(P) = \Omega\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Teorema: Seja J uma instância do jogo de balanceamento de carga com n tarefas e m máquinas idênticas. Seja P qualquer perfil de estratégias que forme um equilíbrio de Nash. Vale que

$$\text{custo}(P) = O\left(\frac{\lg m}{\lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Resultados para equilíbrio misto

Resultados para equilíbrio misto

Teorema: Para todo $m \in \mathbb{N}$, existe uma instância J do jogo do balanceamento de carga com m máquinas idênticas e $n \leq m$ tarefas que tem um equilíbrio de Nash com perfil de estratégias P onde

$$\text{custo}(P) = \Omega\left(\frac{\lg m}{\lg \lg \lg m}\right) \text{opt}(J)$$

Resultados para equilíbrio misto

Teorema: Para todo $m \in \mathbb{N}$, existe uma instância J do jogo do balanceamento de carga com m máquinas idênticas e $n \leq m$ tarefas que tem um equilíbrio de Nash com perfil de estratégias P onde

$$\text{custo}(P) = \Omega\left(\frac{\lg m}{\lg\lg\lg m}\right)\text{opt}(J)$$

Teorema: Seja J uma instância do jogo de balanceamento de carga com n tarefas e m máquinas relacionadas. Seja P qualquer perfil de estratégias que forme um equilíbrio de Nash. Vale que

$$\text{custo}(P) = O\left(\frac{\lg m}{\lg\lg\lg m}\right)\text{opt}(J)$$

Mecanismos de Coordenação

"Mecanismos" que levem a bons valores de PoA

Mecanismos de Coordenação

"Mecanismos" que levem a bons valores de PoA

- Estabelecer regras no jogo para diminuir o PoA

Mecanismos de Coordenação

"Mecanismos" que levem a bons valores de PoA

- Estabelecer regras no jogo para diminuir o PoA
- Custo para jogadores na mesma máquina pode diferir

Mecanismos de Coordenação

"Mecanismos" que levem a bons valores de PoA

- Estabelecer regras no jogo para diminuir o PoA
- Custo para jogadores na mesma máquina pode diferir
- Custo $c^j : 2^{[n]} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$

Mecanismos de Coordenação

"Mecanismos" que levem a bons valores de PoA

- Estabelecer regras no jogo para diminuir o PoA
- Custo para jogadores na mesma máquina pode diferir
- Custo $c^j : 2^{[n]} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$
  - $c^j(S, i)$ é o tempo de término da tarefa i na máquina j quando o conjunto S de tarefas é atribuído à maquina j

Mecanismos de Coordenação

"Mecanismos" que levem a bons valores de PoA

- Estabelecer regras no jogo para diminuir o PoA
- Custo para jogadores na mesma máquina pode diferir
- Custo $c^j : 2^{[n]} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$
  - $c^j(S, i)$ é o tempo de término da tarefa i na máquina j quando o conjunto S de tarefas é atribuído à maquina j
  - depende apenas dos pesos das tarefas

Mecanismos de Coordenação

"Mecanismos" que levem a bons valores de PoA

- Estabelecer regras no jogo para diminuir o PoA
- Custo para jogadores na mesma máquina pode diferir
- Custo $c^j : 2^{[n]} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$
  - $c^j(S, i)$ é o tempo de término da tarefa i na máquina j quando o conjunto S de tarefas é atribuído à maquina j
  - depende apenas dos pesos das tarefas
  - e da ordem (pré-fixada) das tarefas

Mecanismos de Coordenação

"Mecanismos" que levem a bons valores de PoA

- Estabelecer regras no jogo para diminuir o PoA
- Custo para jogadores na mesma máquina pode diferir
- Custo $c^j : 2^{[n]} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$
  - $c^j(S, i)$ é o tempo de término da tarefa i na máquina j quando o conjunto S de tarefas é atribuído à maquina j
  - depende apenas dos pesos das tarefas
  - e da ordem (pré-fixada) das tarefas
- Mecanismo de Coordenação: $\mathcal{C} = (c^1, c^2, \ldots, c^m)$

Mecanismos de Coordenação

"Mecanismos" que levem a bons valores de PoA

- Estabelecer regras no jogo para diminuir o PoA
- Custo para jogadores na mesma máquina pode diferir
- Custo $c^j : 2^{[n]} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$
  - $c^j(S, i)$ é o tempo de término da tarefa i na máquina j quando o conjunto S de tarefas é atribuído à maquina j
  - depende apenas dos pesos das tarefas
  - e da ordem (pré-fixada) das tarefas
- Mecanismo de Coordenação: $\mathcal{C} = (c^1, c^2, \ldots, c^m)$
- As funções de custo são de conhecimento dos jogadores

Mecanismos de Coordenação

"Mecanismos" que levem a bons valores de PoA

- Estabelecer regras no jogo para diminuir o PoA
- Custo para jogadores na mesma máquina pode diferir
- Custo $c^j : 2^{[n]} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$
  - $c^j(S, i)$ é o tempo de término da tarefa i na máquina j quando o conjunto S de tarefas é atribuído à maquina j
  - depende apenas dos pesos das tarefas
  - e da ordem (pré-fixada) das tarefas
- Mecanismo de Coordenação: $\mathcal{C} = (c^1, c^2, \ldots, c^m)$
- As funções de custo são de conhecimento dos jogadores
- No modelo anterior, custo $c^j(S, i) = \sum_{i' \in S} w_{ij}$

Mecanismos de Coordenação

"Mecanismos" que levem a bons valores de PoA

- Estabelecer regras no jogo para diminuir o PoA
- Custo para jogadores na mesma máquina pode diferir
- Custo $c^j : 2^{[n]} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$
  - $c^j(S, i)$ é o tempo de término da tarefa i na máquina j quando o conjunto S de tarefas é atribuído à maquina j
  - depende apenas dos pesos das tarefas
  - e da ordem (pré-fixada) das tarefas
- Mecanismo de Coordenação: $\mathcal{C} = (c^1, c^2, \ldots, c^m)$
- As funções de custo são de conhecimento dos jogadores
- No modelo anterior, custo $c^j(S, i) = \sum_{i' \in S} w_{ij}$
  - não diferencia tarefas na mesma máquina

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1:

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1:

- Duas máquinas uniformes

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1:

- Duas máquinas uniformes
- três tarefas tal que $w_1 \succ w_2 \succ w_3$

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1:

- Duas máquinas uniformes
- três tarefas tal que $w_1 \succ w_2 \succ w_3$
  - ordenação decrescente pelo peso, com desempate pela ordem de entrada

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1:

- Duas máquinas uniformes
- três tarefas tal que $w_1 \succ w_2 \succ w_3$
  - ordenação decrescente pelo peso, com desempate pela ordem de entrada
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1:

- Duas máquinas uniformes
- três tarefas tal que $w_1 \succ w_2 \succ w_3$
  - ordenação decrescente pelo peso, com desempate pela ordem de entrada
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos
- Máquina 2 executa em ordem crescente de pesos

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1:

- Duas máquinas uniformes
- três tarefas tal que $w_1 \succ w_2 \succ w_3$
  - ordenação decrescente pelo peso, com desempate pela ordem de entrada
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos
- Máquina 2 executa em ordem crescente de pesos

Em um equilíbrio:

1 2

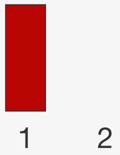
Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1:

- Duas máquinas uniformes
- três tarefas tal que $w_1 \succ w_2 \succ w_3$
  - ordenação decrescente pelo peso, com desempate pela ordem de entrada
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos
- Máquina 2 executa em ordem crescente de pesos

Em um equilíbrio:

- Tarefa 1 escolhe máquina 1



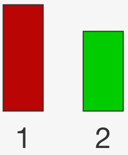
Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1:

- Duas máquinas uniformes
- três tarefas tal que $w_1 \succ w_2 \succ w_3$
  - ordenação decrescente pelo peso, com desempate pela ordem de entrada
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos
- Máquina 2 executa em ordem crescente de pesos

Em um equilíbrio:

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3 escolhe máquina 2



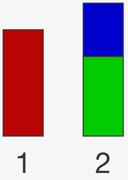
Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1:

- Duas máquinas uniformes
- três tarefas tal que $w_1 \succ w_2 \succ w_3$
  - ordenação decrescente pelo peso, com desempate pela ordem de entrada
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos
- Máquina 2 executa em ordem crescente de pesos

Em um equilíbrio:

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3 escolhe máquina 2
- Tarefa 2 escolhe máquina 2



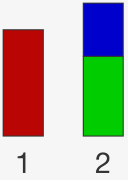
Mecanismos de Coordenação

Exemplo 1:

- Duas máquinas uniformes
- três tarefas tal que $w_1 \succ w_2 \succ w_3$
  - ordenação decrescente pelo peso, com desempate pela ordem de entrada
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos
- Máquina 2 executa em ordem crescente de pesos

Em um equilíbrio:

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3 escolhe máquina 2
- Tarefa 2 escolhe máquina 2
- A configuração é ótima



Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2:

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2:

- Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2:

- Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que
  - $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2:

- Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que
  - $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2:

- Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que
  - $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos
- Máquina 2 executa em ordem crescente de pesos

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2:

- Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que
  - $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos
- Máquina 2 executa em ordem crescente de pesos

Custo social do equilíbrio: 4

1 2

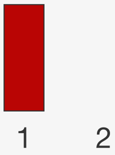
Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2:

- Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que
  - $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos
- Máquina 2 executa em ordem crescente de pesos

Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1



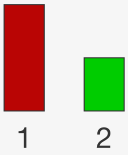
Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2:

- Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que
  - $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos
- Máquina 2 executa em ordem crescente de pesos

Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3, 4 e 2 escolhem máquina 2



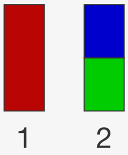
Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2:

- Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que
  - $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos
- Máquina 2 executa em ordem crescente de pesos

Custo social do equilíbrio: 4

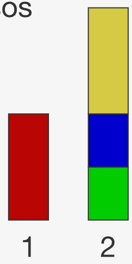
- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3, 4 e 2 escolhem máquina 2



Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2:

- Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que
  - $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos
- Máquina 2 executa em ordem crescente de pesos



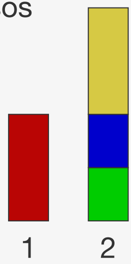
Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3, 4 e 2 escolhem máquina 2

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2:

- Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que
  - $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos
- Máquina 2 executa em ordem crescente de pesos



Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3, 4 e 2 escolhem máquina 2

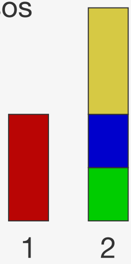
Configuração ótima: Custo social 3

1 2

Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2:

- Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que
  - $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos
- Máquina 2 executa em ordem crescente de pesos

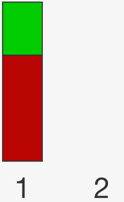


Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3, 4 e 2 escolhem máquina 2

Configuração ótima: Custo social 3

- Tarefas 1 e 3 na máquina 1



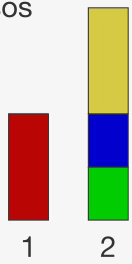
Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2:

- Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que
  - $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos
- Máquina 2 executa em ordem crescente de pesos

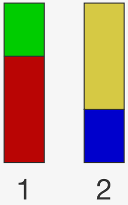
Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3, 4 e 2 escolhem máquina 2



Configuração ótima: Custo social 3

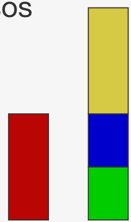
- Tarefas 1 e 3 na máquina 1
- Tarefas 2 e 4 na máquina 2



Mecanismos de Coordenação

Exemplo 2:

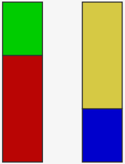
- Duas máquinas uniformes e quatro tarefas tal que
  - $w_1 = 2 + \varepsilon$, $w_2 = 2$, $w_3 = 1 - \varepsilon$ e $w_4 = 1$
- Máquina 1 executa em ordem decrescente de pesos
- Máquina 2 executa em ordem crescente de pesos



1 2

Custo social do equilíbrio: 4

- Tarefa 1 escolhe máquina 1
- Tarefa 3, 4 e 2 escolhem máquina 2



1 2

Configuração ótima: Custo social 3

- Tarefas 1 e 3 na máquina 1
- Tarefas 2 e 4 na máquina 2

$$\text{PoA} = \frac{4 - \varepsilon}{3}$$

Mecanismos de Coordenação

Mecanismo LPT*:

Mecanismos de Coordenação

Mecanismo LPT*:

- Cada máquina escalona na ordem decrescente, usando $\succ$

Mecanismos de Coordenação

Mecanismo LPT*:

- Cada máquina escalona na ordem decrescente, usando $\succ$
- Cada máquina j acrescenta um atraso na tarefa, se necessário, para que termine em tempo $t \equiv j \mod m+1$

Mecanismos de Coordenação

Mecanismo LPT*:

- Cada máquina escalona na ordem decrescente, usando $\succ$
- Cada máquina j acrescenta um atraso na tarefa, se necessário, para que termine em tempo $t \equiv j \mod m+1$
- Atraso pode ser escolhido tão pequeno quanto se queira, usando discretização em ε/mn

Mecanismos de Coordenação

Mecanismo LPT*:

- Cada máquina escalona na ordem decrescente, usando $\succ$
- Cada máquina j acrescenta um atraso na tarefa, se necessário, para que termine em tempo $t \equiv j \mod m + 1$
- Atraso pode ser escolhido tão pequeno quanto se queira, usando discretização em ε/mn

Teorema: O Mecanismo LPT*, para máquinas uniformes, possui preço da anarquia limitado a $4/3 - \varepsilon$. Além disso, essa razão é justa.

Mecanismos de Coordenação

Mecanismo LPT*:

- Cada máquina escalona na ordem decrescente, usando $\succ$
- Cada máquina j acrescenta um atraso na tarefa, se necessário, para que termine em tempo $t \equiv j \mod m+1$
- Atraso pode ser escolhido tão pequeno quanto se queira, usando discretização em ε/mn

Teorema: O Mecanismo LPT*, para máquinas uniformes, possui preço da anarquia limitado a $4/3 - \varepsilon$. Além disso, essa razão é justa.

Teorema: O Mecanismo LPT*, para máquinas relacionadas, possui preço da anarquia entre $1{,}54$ e $1 + \sqrt{3}/3 \approx 1{,}5773$.