MC918/MO829
Tópicos em Teoria da Computação
Teoria dos Jogos Algorítmica

Rafael C. S. Schouery
rafael@ic.unicamp.br

Universidade Estadual de Campinas

1º semestre/2017

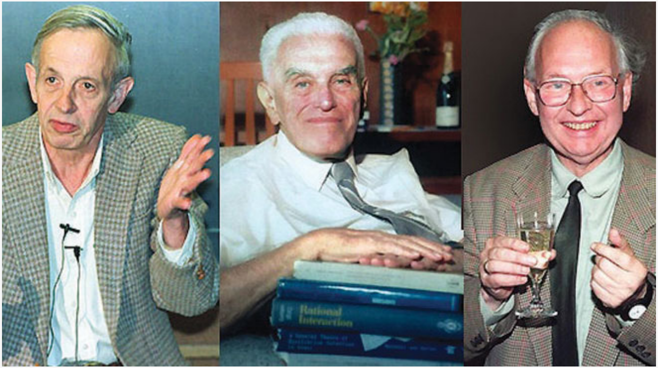
Introdução

O que é a Teoria dos Jogos?

- Estudo da interação entre agentes e dos resultados que possam ocorrer a partir dessa interação

Theory of Games and Economic Behavior,
von Neumann e Morgenstern (1944)

Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 1994

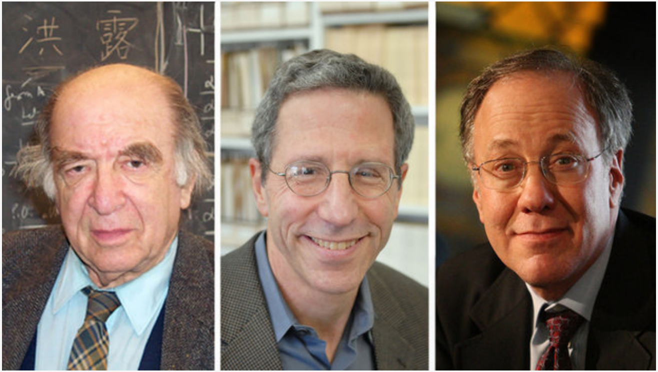


Nash, Harsanyi e Selten: *“for their pioneering analysis of equilibria in the theory of non-cooperative games”*

Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 2005

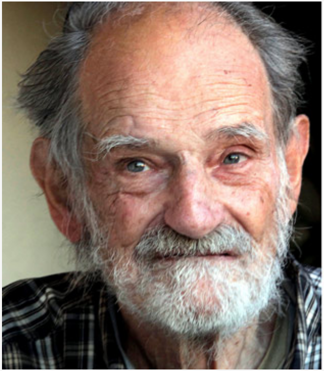
Aumann e Schelling: *"for having enhanced our understanding of conflict and cooperation through game-theory analysis."*

Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 2007



Hurwicz, Maskin e Myerson: *“for having laid the foundations of mechanism design theory.”*

Prêmio Nobel em Ciências Econômicas 2012

Roth e Shapley: *"for the theory of stable allocations and the practice of market design."*

Teoria dos Jogos para Computólogos

O que é Teoria dos Jogos Algorítmica?

- Interface entre a Teoria dos Jogos e a computação

Nisan e Ronen, Algorithmic Mechanism Design, STOC'99: *"We consider algorithmic problems ... where the participants cannot be assumed to follow the algorithm but rather their own self-interest. ... the algorithm designer should ensure in advance that the agents' interests are best served by behaving correctly."*

Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas computacionais clássicos como:

- Balanceamento de carga
- Localização de Instalações
- Empacotamento

Podem ser repensados utilizando a Teoria dos Jogos

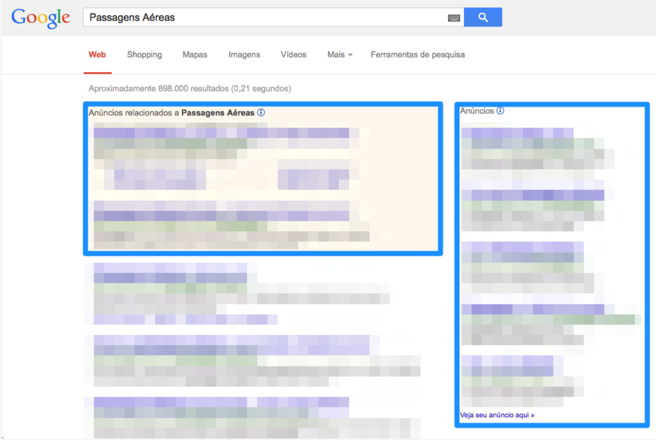
Exemplo: Problemas clássicos revisitados

Problemas de economia clássicos como:

- Encontrar um equilíbrio de Nash em um jogo
- Encontrar um equilíbrio de mercado
- Decidir como distribuir n itens a m jogadores

Podem ser repensados utilizando a Teoria da Computação

Exemplo: Leilões de anúncios



Objetivo

- Apresentar os principais conceitos relacionados à Teoria dos Jogos
- Abordar a Teoria dos Jogos do ponto de vista da Teoria da Computação
- Apresentar problemas e resultados da área de Teoria dos Jogos Algorítmica

Jogos e conceitos básicos de soluções

Dilema do Prisioneiro

- Dois prisioneiros A e B interrogados separadamente
- Duas possíveis respostas: confessar ou silenciar
- Duração da pena depende das respostas

Duração da pena:

A \ B	Confessar	Silenciar
Confessar	4 (A), 4 (B)	1 (A), 5 (B)
Silenciar	5 (A), 1 (B)	2 (A), 2 (B)

Análise do Dilema do Prisioneiro

A \ B	Confessar	Silenciar
Confessar	4 (A), 4 (B)	1 (A), 5 (B)
Silenciar	5 (A), 1 (B)	2 (A), 2 (B)

Análise feita pelo jogador A:

- Se B Confessar, é melhor Confessar e ficar 4 anos preso do que Silenciar e ficar 5 anos preso
- Se B Silenciar, é melhor Confessar e ficar 1 ano preso do que Silenciar e ficar 2 anos preso

Por simetria, para ambos os jogadores, é melhor Confessar independente da estratégia do outro jogador

Jogo da Poluição

- Conjunto de n países
- Precisam decidir se poluem ou não poluem
- Não poluir custa 3
- Cada país paga 1 por cada país poluente

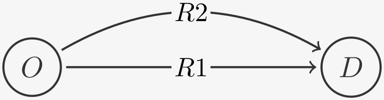
Suponha que $k < n$ países poluam

- Um país que não polui paga $k + 3$
- Se ele passar a poluir, seu custo será de $k + 1$
- A única situação estável é quando todos poluem

O custo de um país poderia ser 3, ao invés de n, se os países não fossem egoístas!

Jogo do Congestionamento

- Dois motoristas A e B
- Duas rotas possíveis ($R1$ e $R2$) de O para D
- Rota $R1$ é a mais rápida



Jogo do Congestionamento

Tempo do percurso:

$A \backslash B$	$R1$	$R2$
$R1$	5, 5	1, 2
$R2$	2, 1	6, 6

Análise feita pelo jogador A:

- Se B escolher $R1$, é melhor escolher $R2$
- Se B escolher $R2$, é melhor escolher $R1$

A melhor rota para A depende da escolha de B

Se ambos escolherem rotas diferentes, eles não se arrependem

Pedra-Papel-Tesoura

- Dois jogadores A e B
- Três possíveis escolhas: pedra, papel, ou tesoura
- Pedra quebra tesoura que corta papel que embrulha pedra

B A	pedra	papel	tesoura
pedra	0 0	1 -1	-1 1
papel	-1 1	0 0	1 -1
tesoura	1 -1	-1 1	0 0

Quem perde ou empata, se arrepende da sua escolha

Formalização de um jogo simultâneo

Em um jogo:

- Temos um conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Cada jogador i tem um conjunto S_i de estratégias
- Um perfil (de estratégias) é um vetor $(s_1, \ldots, s_n)$ onde $s_i \in S_i$
    - também chamamos de resultados do jogo
- $S = S_1 \times \cdots \times S_n$ é o conjunto de perfis
- Cada jogador i tem uma função u_i de S em $\mathbb{R}$
- $u_i(s_1, \ldots, s_n)$ é a utilidade (ganho) do jogador i quando o perfil é $(s_1, \ldots, s_n)$
- Alternativamente, podemos considerar uma função de custo c_i de S em $\mathbb{R}$
    - Podemos converter usando $c_i(s) = -u_i(s)$

Racionalidade

Em geral, consideramos que os jogadores são racionais

- Isto é, eles buscam maximizar sua utilidade
- Ou minimizar o seu custo

Vários dos principais conceitos que veremos se baseiam na racionalidade dos jogadores

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$
$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$
$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$
$$S = S_A \times S_B$$

$$c_A(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

$$c_B(s) = \begin{cases} 4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ 5, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ 1, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ 2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

Formalização do Dilema do Prisioneiro

$$N = \{A, B\}$$
$$S_A = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$
$$S_B = \{\text{Confessar}, \text{Silenciar}\}$$
$$S = S_A \times S_B$$

$$u_A(s) = \begin{cases} -4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ -1, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ -5, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ -2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

$$u_B(s) = \begin{cases} -4, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Confessar}), \\ -5, & \text{se } s = (\text{Confessar}, \text{Silenciar}), \\ -1, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Confessar}), \\ -2, & \text{se } s = (\text{Silenciar}, \text{Silenciar}) \end{cases}$$

Notação

Considere um jogo dado por

- Conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Para cada jogador i:
  - Conjunto S_i de estratégias do jogador i
  - Função de utilidade u_i de S em $\mathbb{R}$

Para um perfil $s = (s_1, \ldots, s_n)$ em S:

- s_{-i} é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$
- (s'_i, s_{-i}) é o vetor $(s_1, \ldots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \ldots, s_n)$

S_{-i} é o conjunto $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots S_n$

- Isto é, o conjunto de todos os s_{-i}

Essa notação é útil para comparar duas estratégias quando os outros jogadores mantém suas escolhas

Resposta Ótima e Estratégia Dominante

Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma resposta ótima para $s_{-i} \in S_{-i}$ se, para todo $s_i' \in S_i$, temos que

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$$

Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma estratégia dominante se, para todo $s_{-i} \in S_{-i}$, temos que s_i é uma resposta ótima para s_{-i}

Pedra-Papel-Tesoura

B A	pedra	papel	tesoura
pedra	0 0	1 -1	-1 1
papel	-1 1	0 0	1 -1
tesoura	1 -1	-1 1	0 0

- Tesoura é uma resposta ótima para papel
- Nenhum dos jogadores tem uma estratégia dominante

Dilema do Prisioneiro

B / A	Confessar	Silenciar
Confessar	-4, -4	-1, -5
Silenciar	-5, -1	-2, -2

- Confessar é uma resposta ótima para Silenciar
- Confessar é uma resposta ótima para Confessar
- Confessar é uma estratégia dominante para ambos os jogadores

Leilão de um item de carta fechada

Um leiloeiro deseja vender um item para um grupo de compradores

- Cada comprador deve submeter um único lance
- Os lances são submetidos simultaneamente
- O comprador com maior lance ganha o leilão
- Os perdedores pagam 0
- O vencedor paga um preço p que depende apenas dos lances dos compradores

Modelando o leilão

- Cada comprador é um jogador
- Um jogador k acredita que o item vale v_k
  - Está disposto a pagar no máximo v_k pelo item
- Um jogador k submete um lance $\ell_k \in \mathbb{R}_+$
- A utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:
  - $v_k - p(\ell)$, se o jogador ganha o item
  - 0, se o jogador não ganha o item

Leilão de primeiro preço

$p(\ell)$ é igual ao maior lance dado

Note que a utilidade $u_k(\ell)$ de um jogador k é igual a:

- $v_k - p(\ell) = v_k - \ell_k$, se o jogador ganha o item
- 0, se o jogador não ganha o item

Um jogador só pode obter utilidade positiva se $\ell_k < v_k$

- I.e., se der um lance menor do que o seu real valor
- Não vale a pena relatar o real valor para o item
    - É melhor "mentir"...

Leilão de segundo preço (Vickrey)

$p(\ell)$ é igual ao segundo maior lance dado

v_k é uma estratégia dominante para o comprador k:

- Seja ℓ_{-k} os lances dos outros jogadores
- Se $\max\{\ell_{-k}\} > v_k$, v_k é uma resposta ótima:
  - $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} < 0$
  - $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0
- Se $\max\{\ell_{-k}\} \leq v_k$, v_k é uma resposta ótima:
  - $\ell_k \geq \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é $v_k - \max\{\ell_{-k}\} \geq 0$
  - $\ell_k < \max\{\ell_{-k}\}$: a utilidade de k é 0

Se todo jogador relatar v_k

- então o item é entregue para o comprador com maior v_k
- maximizando o bem-estar social

Design de Mecanismos

Sub-área da Teoria dos Jogos onde buscamos projetar jogos com características “interessantes”

No caso do Dilema do Prisioneiro:

- as penas são escolhidas para incentivar os jogadores a confessar

No caso do Leilão de Segundo Preço:

- o preço é escolhido para incentivar os jogadores a relatarem os seus valores reais e consequentemente maximizar o bem-estar social

Veremos mais sobre Design de Mecanismos durante o curso

Equilíbrio

Relembrando:

- Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma resposta ótima para $s_{-i} \in S_{-i}$ se, para todo $s'_i \in S_i$, temos que

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$$

Um perfil $s = (s_1, \ldots, s_n)$ é um equilíbrio (de Nash) se, para todo jogador i, s_i é uma resposta ótima para s_{-i}

Isto é, nenhum jogador pode melhorar sua utilidade através de uma mudança individual de estratégia

Jogo do Congestionamento

B A	$R1$	$R2$
$R1$	5 5	2 1
$R2$	1 2	6 6

- $(R1, R2)$ é um equilíbrio de Nash
- $(R2, R1)$ também é um equilíbrio de Nash
- Ou seja, um jogo pode ter mais de um equilíbrio

Qual equilíbrio irá ocorrer?

Pedra-Papel-Tesoura

A \ B	pedra	papel	tesoura
pedra	0, 0	-1, 1	1, -1
papel	1, -1	0, 0	-1, 1
tesoura	-1, 1	1, -1	0, 0

- Não existe equilíbrio para o jogo Pedra-Papel-Tesoura
- Isto é, um jogo pode não ter equilíbrios

Como você joga Pedra-Papel-Tesoura na vida real?

Estratégias mistas

Por enquanto, consideramos que cada jogador escolhe uma única estratégia

Podemos considerar também estratégias mistas:

- O jogador escolhe uma estratégia de forma aleatória
- Uma estratégia mista para o jogador i é uma distribuição de probabilidades no conjunto S_i

Estratégias puras:

- $s_i \in S_i$ é chamada de estratégia pura
- Uma estratégia pura s_i pode ser vista como uma estratégias mistas onde a probabilidade de s_i ser escolhida é igual a 1

Utilidade esperada

Seja σ um vetor de estratégias mistas

- Ou seja, para cada jogador i, σ_i é uma distribuição de probabilidades em S_i
- Chamamos σ de um perfil de estratégias (mistas)

Qual é a utilidade esperada do jogador i para σ?

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma)] = \sum_{s \in S} u_i(s) \mathbb{P}_\sigma(s),$$

onde $\mathbb{P}_\sigma(s) = \prod_j \sigma_j(s_j)$

Dizemos que os jogadores são neutros ao risco

Resposta ótima e Estratégia Dominante

Uma estratégia mista σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i} se, para todo σ_i', temos que

$$\mathbb{E}[u_i(\sigma_i, \sigma_{-i})] \geq \mathbb{E}[u_i(\sigma_i', \sigma_{-i})]$$

Uma estratégia mista σ_i é dominante se, para todo σ_{-i}, temos que σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

Equilíbrio Misto de Nash

Um vetor σ é um equilíbrio misto (de Nash) se, para todo jogador i, σ_i é uma resposta ótima para σ_{-i}

Exemplo: $\rho_1 = \rho_2 = (1/3, 1/3, 1/3)$ é um equilíbrio misto de Nash para o Pedra-Papel-Tesoura.

Vamos mostrar que esse é de fato um equilíbrio e que ele é único!

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

Para um par de estratégias mistas (σ, φ):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[u_1(\sigma,\varphi)] &= 0 \times (\sigma_1\varphi_1 + \sigma_2\varphi_2 + \sigma_3\varphi_3) \\ &+ 1 \times (\sigma_1\varphi_3 + \sigma_2\varphi_1 + \sigma_3\varphi_2) \\ &- 1 \times (\sigma_1\varphi_2 + \sigma_2\varphi_3 + \sigma_3\varphi_1) \\ &= \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)\end{aligned}$$

E por simetria,

$$\mathbb{E}[u_2(\sigma,\varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma,\varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$\mathbb{E}[u_2(\sigma,\varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Se $\varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$, então:

- $\mathbb{E}[u_1(\sigma,\varphi)] = 0$ para qualquer estratégia mista σ
- Isto é, qualquer σ é uma resposta ótima
- Isto é, $\sigma = (1/3, 1/3, 1/3)$ é uma resposta ótima

Por simetria, se $\sigma = \varphi = (1/3, 1/3, 1/3)$ ambos os jogadores estão jogando respostas ótimas e temos um equilíbrio.

Mas será que ele é único?

Equilíbrio misto do Pedra-Papel-Tesoura

$$\mathbb{E}[u_1(\sigma,\varphi)] = \sigma_1(\varphi_3 - \varphi_2) + \sigma_2(\varphi_1 - \varphi_3) + \sigma_3(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$\mathbb{E}[u_2(\sigma,\varphi)] = \varphi_1(\sigma_3 - \sigma_2) + \varphi_2(\sigma_1 - \sigma_3) + \varphi_3(\sigma_2 - \sigma_1)$$

Suponha que:

- (σ, φ) é um equilíbrio e $\varphi \neq (1/3, 1/3, 1/3)$
- Nem σ nem φ são estratégia puras
  - não existe equilíbrio onde um dos jogadores joga uma estratégia pura
- Sem perda de generalidade, $\varphi_1 \geq \varphi_2 \geq \varphi_3$ e $\varphi_1 > \varphi_3$
- Mas então, $\sigma_2 = 1$ é a única resposta ótima
  - $\varphi_3 - \varphi_2 \leq 0$, $\varphi_2 - \varphi_1 \leq 0$, mas $\varphi_1 - \varphi_3 > 0$

Equilíbrio Misto de Nash

Teorema (Nash, 1951): Todo jogo com um número finito de jogadores e conjuntos finitos de estratégias tem um equilíbrio misto.

Existem jogos sem equilíbrio misto de Nash

- com número infinito de jogadores ou
- com conjuntos de estratégias infinitos

Jogo do Semáforo

B / A	Cruzar	Parar
Cruzar	-100 / -100	0 / 1
Parar	1 / 0	0 / 0

Dois equilíbrios puros:

- (Cruzar, Parar)
- (Parar, Cruzar)

Equilíbrio Misto para o Jogo do Semáforo

Vamos encontrar um equilíbrio misto:

- Jogador A cruza com probabilidade p_a
- Jogador B cruza com probabilidade p_b

Utilidade do jogador A:

$$\begin{aligned} & -100\, p_a p_b + 1\, p_a(1-p_b) + 0\,(1-p_a)p_b + 0\,(1-p_a)(1-p_b) \\ & = -100\, p_a p_b + 1\, p_a(1-p_b) = p_a(1-101p_b) \end{aligned}$$

Análise de casos:

- $(1-101p_b) > 0$: $p_a = 1$ é a única resposta ótima
- $(1-101p_b) < 0$: $p_a = 0$ é a única resposta ótima
- $(1-101p_b) = 0$: qualquer $p_a \in [0,1]$ é resposta ótima

Por simetria, $p_a = p_b = 1/101$ é um equilíbrio misto!

Jogos na forma extensiva

Até o momento vimos jogos simultâneos:

- Todos os jogadores escolhem uma estratégia simultaneamente
- São jogos na forma normal
  - Uma grande tabela de perfis possíveis do jogo

Veremos agora jogos na forma extensiva

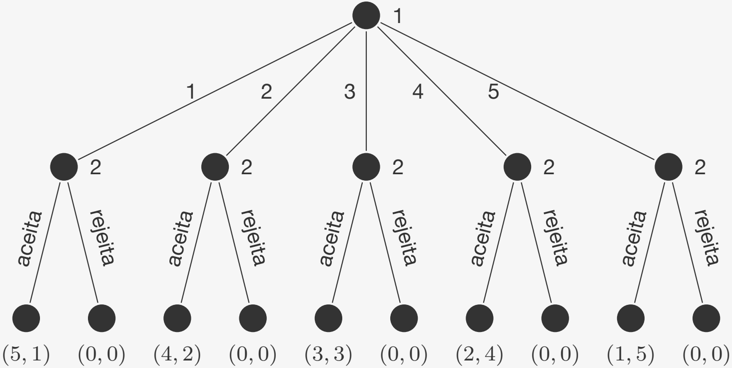
- Jogadores alternam entre si para jogar

Jogos de Informação Perfeita

Um jogo de informação perfeita (na forma extensiva):

- é uma árvore enraizada
- cada nó interno representa a escolha de um jogador
- cada aresta representa a estratégia escolhida
- as folhas representa as utilidade obtidas

Ex: Jogo do Ultimato (BI$ 6)



Formalização de um jogo de informação perfeita

Em um jogo de informação perfeita:

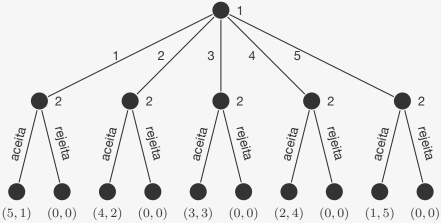
- Temos um conjunto $N = \{1, \ldots, n\}$ de jogadores
- Temos uma árvores $T = (V, E)$ enraizada em $r \in V$
- $T = H \cup Z$, onde
  - Z são as folhas de T
  - H são os vértices internos
- Temos um conjunto A de ações
  - Por simplicidade, o mesmo para todos os jogadores
- $\rho : H \to N$ atribui um jogador para cada vértice interno
  - é o jogador que joga se atingirmos esse vértice
- $\chi : H \to 2^A$ atribui um conjunto de ações para cada vértice interno
  - o conjunto de ações que podem ser tomadas nesse vértice
- $u_i : Z \to \mathbb{R}$ atribui uma utilidade para um jogador i para cada folha

Jogo de informação perfeita e jogo na forma normal

Convertendo um j.i.p. em um jogo na forma normal

- A estratégia pura do jogador é a escolha de qual ação jogará em cada um de seus nós
- Isto é, $S_i = \bigtimes_{h \in H, \rho(h)=i} \chi(h)$
  - O produto cartesiano das ações de cada nó do jogador i
- O jogador define tudo o que ele quer fazer de antemão, dependendo das escolhas dos outros

Ex: Jogo do Ultimato (BI$ 6)



$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$S_2 = \{(\text{aceita}, \text{aceita}, \text{aceita}, \text{aceita}, \text{aceita}),$
$(\text{aceita}, \text{aceita}, \text{aceita}, \text{aceita}, \text{rejeita}),$
$(\text{aceita}, \text{aceita}, \text{aceita}, \text{rejeita}, \text{aceita}), \ldots\}$

Equilíbrio em jogo de informação perfeita

Como podemos transformar um j.i.p. em um jogo na forma normal

- podemos considerar um equilíbrio de Nash para o mesmo
- E pelo Teorema de Nash um equilíbrio misto sempre existe

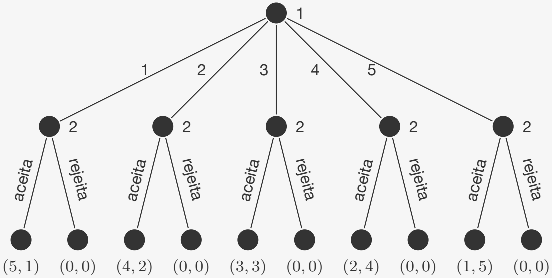
Note que nem todo jogo na forma normal pode ser transformado em um j.i.p.

- Exemplo: Dilema do Prisioneiro

Veremos que:

- Nem todo equilíbrio de Nash faz "sentido"
- Que todo j.i.p. tem um equilíbrio puro

Nem todo equilíbrio de Nash faz “sentido”

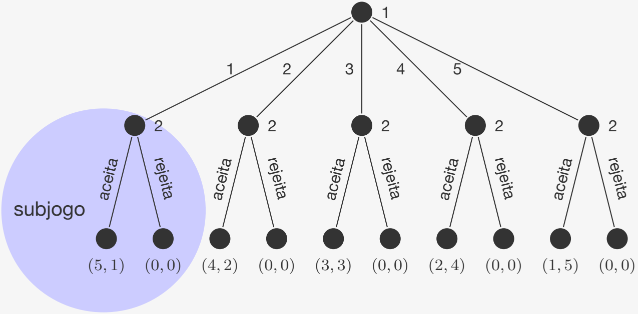


$(5, (\text{rejeita}, \text{rejeita}, \text{rejeita}, \text{rejeita}, \text{aceita}))$ é um equilíbrio:

- Se 1 mudar de estratégia, a utilidade dele vai para 0
- A utilidade de 2 é igual ou menor ao mudar de estratégia
- O jogador 2 **ameaça** o jogador 1
- Mas a ameaça não é crível...
  - Se o jogador 1 escolher 1, não tem porque 2 não aceitar

Equilíbrio perfeito de subjogo

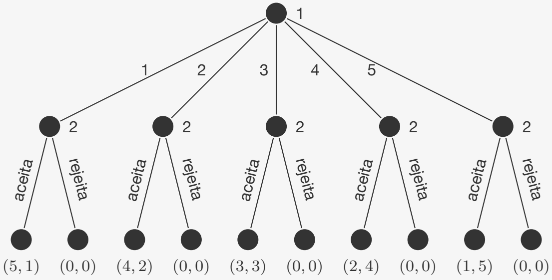
Um subjogo é um jogo induzido pela restrição da árvore T a um nó h e a seus descendentes



Um Equilíbrio Perfeito de Subjogo é um perfil s tal que a restrição de s a um subjogo G' é um equilíbrio de Nash.

Todo equilíbrio perfeito de subjogo é um equilíbrio puro

Equilíbrio perfeito de subjogo



$(5, (\text{rejeita}, \text{rejeita}, \text{rejeita}, \text{rejeita}, \text{aceita}))$ não é um equilíbrio perfeito de subjogo

- O jogador 2 não escolheu uma estratégia de um equilíbrio para quando o jogador 1 escolhe 3 (por exemplo)

Indução Retroativa

É fácil calcular um equilíbrio perfeito de subjogo

- Basta resolver *bottom-up*
  - indução retrógrada - *backward induction*
- Para decidir qual ação o jogador i joga no nó h
  - Resolva recursivamente para todas as subárvores de h
  - Escolha a melhor subárvore para i
  - A base é uma folha, onde não há ação a ser escolhida
- Pode ser feito em tempo linear no tamanho de T
- O algoritmo mostra a existência do equilíbrio

No caso do Jogo do Ultimato

- o jogador 1 analisa o que o jogador 2 fará em cada subjogo
- em cada subjogo, o jogador 2 escolhe aceitar
- com isso, o jogador 1 escolhe dar apenas BI$ 1

Outro exemplo

Jogo dos Piratas:

- 5 piratas: A, B, C, D e E
- Querem dividir 100 moedas de ouro
- Existe uma senhoridade: $A > B > C > D > E$
- O pirata mais sênior escolhe como dividir as moedas
  - Uma votação é feita para aceitar ou rejeitar a proposta
  - Em caso de empate, o mais sênior desempata
  - Se a proposta é aceita
    - as moedas são distribuídas
  - Se a proposta é rejeitada
    - o proponente é jogado para fora do barco e morre
    - uma nova votação é feita
- Os piratas querem
  - Sobreviver antes de tudo
  - Maximizar o número de moedas que recebe
  - Em caso de empate na utilidade, prefere jogar para fora do barco do que não jogar

Jogo dos Piratas - Indução retrógrada

Se tivermos apenas D e E:

- D propõe $(100, 0)$ e a proposta é aceita já que ele desempata

Se tivermos C, D e E:

- C propõe $(99, 0, 1)$ e E apoia a proposta
  - Ele sabe que se C morrer, ele ganhará 0
- C não pode propor $(100, 0, 0)$, E rejeitaria para matar C

Se tivermos B, C, D e E:

- B propõe $(99, 0, 1, 0)$ e D apoia a proposta
- B não pode propor $(99, 0, 0, 1)$, E escolheria matar B

Assim,

- A propõe $(98, 0, 1, 0, 1)$ e C e E aceitam a proposta
  - Se A morrer, eles não ganharão nada

Jogos de Informação Imperfeita

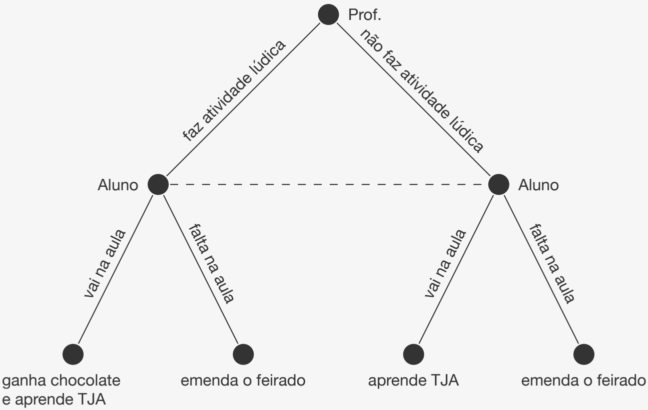
Ideia:

- Ainda teremos a árvore do jogo
- Porém, o jogador não terá certeza de qual nó está
- Ele apenas sabe que está em certo conjunto de nós

Um jogo de informação imperfeita é

- os elementos de um jogo de informação perfeita e
- um conjunto $I = (I_1, \ldots, I_n)$ onde
  - $I_i = (I_{i_1}, I_{i_2}, \ldots, I_{i_{k_i}})$ é uma partição de $\{h \in H : \rho(h) = i\}$
    - uma partição dos nós do jogador i
  - com a propriedade que $\chi(h) = \chi(h')$ para todo $h, h' \in I_{i_t}$
    - precisa ser o mesmo conjunto de ações já que o jogador não sabe se está em h ou h'

Exemplo



- $I_1 = \{I_{1_1}\}$ e $I_{1_1} = \{r\}$
- $I_2 = \{I_{2_1}\}$ e $I_{2_1} = \{h_1, h_2\}$