The Curse of Simultaneity

Renato Paes Leme, Vasilis Syrgkanis e Éva Tardos

MO829 - RESUMO DO ARTIGO

Francisco Jhonatas 29 de junho de 2017

Resumo

Este resumo é referente ao artigo *The Curse of Simultaneity* proposto em [1], onde é introduzido o conceito de Preço de Anarquia Sequencial. Esta nova ferramenta surge com a ideia de podermos analisar jogos, onde em sua versão simultânea apresentam Preço de Anarquia ilimitado ou inexistente. Para exemplificar este novo recurso, os autores analisam os seguintes jogos na versão sequencial: *Machine Cost Sharing Games, Unrelated Machine Scheduling Games, and Consensus and Cut Games*.

1 Introdução

De uma forma mais geral, as análises de ineficiência de equilíbrio estavam sendo focadas nos jogos em suas versões simultâneas. Como resultado direto destas análises, temos que existem muitas classes de jogos que apresentam Preço de Anarquia (PoA) ilimitado ou muitas das vezes inexistentes.

Para exemplificar o conceito de Preço de Anarquia Sequencial, os autores utlizaram jogos que geralmente possuem um alto Preço de Anarquia. Mais especificamente, os jogos analisados foram: *Machine Cost Sharing Games, Unrelated Machine Scheduling Games, and Consensus and Cut Games*. Para aplicar esta nova técnica, os jogos aqui são analisados em sua forma normal extensiva com informação completa, forma esta que captura a sequencialidade de um jogo, onde temos o conceito de Equilíbrio Perfeito de Subjogo (SPE).

2 Definições

A configuração geral é a seguinte: temos n jogadores com espaços de ações $A_1, \dots, A_n$ e funções de utilidade $u_i : \times_i A_i \to \mathbb{R}$ para cada jogador i, e também uma ordenação de jogadores, por exemplo $1, 2, \dots, n$.

Em cada rodada i, o jogador i observa as ações tomadas pelos jogadores $1, 2, \dots, i-1$ e escolhe uma ação $a_i \in A_i$. Portanto, temos que a estratégia do jogador i é um mapeamento dos espaços de ações de seus predecessores, ou seja, $s_i : A_1 \times \dots \times A_{i-1} \to A_i$.

Um perfil de estratégias $s = (s_1, \dots, s_n)$ é um **Equilíbrio Perfeito de Subjogo** (SPE) se ele simultaneamente é um equilíbrio para todos os subjogos (sub-árvores) do jogo quando restrito à s. Temos que o SPE sempre existe, ele é um equilíbrio puro de Nash para o jogo nesta versão sequencial e ele pode ser calculado através de indução retrativa (*backwards induction*).

Seja a função social $W : \times_i A_i \to \mathbb{R}_+$, temos que o valor do **Preço de Anarquia Sequencial** é calculado, considerando jogos de utilidade, como sendo a razão entre a solução ótima (em função de W) e a qualidade do pior SPE, ou seja,

$$SPoA = \max_{a \in SPE} \frac{W^*}{W(a)}.$$

Para jogos de custo, o SPoA é calculado apenas invertendo os termos da razão.

3 Machine Cost Sharing Games

Considere que N é o conjunto de n tarefas e R é o conjunto de m máquinas. Cada tarefa (jogador) i possui um conjunto R_i de máquinas que ele pode escolher para executar sua tarefa. Temos também que cada máquina r é associada com uma função de custo decrescente $\gamma_r(x)$. Com isso, o jogador i tem que escolher, como sua estratégia, uma máquina $s_i \in R_i$ que lhe ofereça o menor custo. Custo esse que, dado um perfil de estratégias s, é definido por: $c_i(s) = \gamma_{s_i}(n_{s_i})$, where $n_r = |\{j \in N : s_j = r\}|$.

Os autores assumem que as funções de custo decrescente das máquinas são do tipo de alocação justa, ou seja, $\gamma_r(x) = c_r/x$, onde x indica a quantidade de jogadores que escolheram a máquina r. Dizemos que as máquinas possuem custos genéricos se $c_r/k \neq c'_r/k', \forall r \neq r', 1 \leq k, k' \leq n$.

Na versão simultânea desse jogo, tendo como função social $C(s) = \sum_i c_i(s)$, o PoA vale n.

Teorema 1: Para qualquer jogo de compartilhamento de custo de máquinas com alocação de custo justa e custos genéricos, existe um único SPE que está a um fator de $O(\log n)$ do ótimo. Além disso, o SPE pode ser computado através de um algoritmo guloso natural. Quando os custos não são genéricos, podem existir mais de um SPE mas o limitante do SPoA ainda é mantido.

Demonstração. (ideia) Encontrar s que minimiza $C(s)$ pode ser modelado como o problema da cobertura de conjuntos: jogadores são elementos e as máquinas são representadas pelo conjunto de jogadores que elas podem servir. Existe um algoritmo de aproximação guloso clássico para o problema de cobertura de conjuntos que possui um fator de $\log n$. Para mostrar o teorema, basta mostrar que as ações escolhidas no SPE único (devido ao fato dos custos serem genéricos) pelos jogadores durante o cálculo da indução retrativa é equivalente ao resultado do algoritmo. $\square$

4 Unrelated Machine Scheduling

Considere que N é o conjunto de n tarefas, M é o conjunto de m máquinas e que t_{ji} é o tempo de processamento da tarefa j na máquina i. Analisando sob a perspectiva da teoria dos jogos, cada jogador (tarefa) i tem como seu espaço de estratégias $S_i \subseteq M$, e o custo de i é a carga da máquina na qual ele foi alocado. Utilizou-se como função social, a função clássica deste problema combinatório que é minimizar o *makespan*, ou seja, $\min \max_{i \in M} \sum_{j;\phi(j)=i} t_{ji}$.

A versão simultânea deste jogo sempre possui equilíbrio puro de Nash, mas por outro lado, pode apresentar um valor de PoA arbitrariamente grande. O exemplo tradicional que mostra isso é uma instância que possui duas tarefas e duas máquinas, onde $t_{11} = t_{22} = 1$ e $t_{12} = t_{21} = L >> 1$. Um equilíbrio de Nash é quando a tarefa 1 é atribuída à máquina 2 e a tarefa 2 é atribuída à máquina 1, tendo *makespan* de valor L, enquanto que a solução ótima possui *makespan* 1.

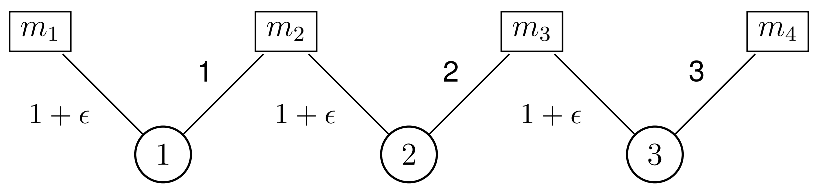

Figura 1: SPoA é $\Omega(n)$ quando os jogadores jogam da esquerda para a direita

O limitante inferior para o SPoA vale $\Omega(n)$ e o mesmo pode ser obtido a partir da generalização da instância apresentada na figura 1. Basicamente, o único SPE desta instância, considerando que a ordenação dos jogadores é feita da esquerda para a direita, é quando todas as tarefas escolhem a máquina a sua direita, o que levará a um *makespan* de valor n. A solução ótima é quando as tarefas são alocadas para as máquinas a sua esquerda, tendo o *makespan* valor de $1+\epsilon$. A seguir é mostrado o valor do limitante superior do SPoA:

Teorema 2: O SPoA dos jogos de balanceamento de carga em máquinas não-relacionadas é limitado por $O(m2^n)$.

Demonstração. (ideia) Considere que $\vec{L_0} \in \mathbb{R}_+^M$ é o vetor de cargas iniciais de cada máquina, $SPE(\vec{L_0}, k)$ é o valor do *makespan* do SPE quando os jogadores $k, k+1, \ldots, n$ jogam a partir de $\vec{L_0}$ e que $t_j^* = \min_{i \in M} t_{ji}$. A partir disso, fazer uma indução em k de 1 a n usando a seguinte hipótese de indução:

$$\forall \vec{L_0} \in \mathbb{R}_+^M, SPE(\vec{L_0}, k) \leq ||\vec{L_0}||_\infty + 2^{n-k} \sum_{j=k}^{n} t_j^*.$$

O teorema segue se tomarmos os seguintes valores: $\vec{L_0} = \vec{0}$, $k = 1$ e $\sum_{j=k}^{n} t_j^* \leq mOPT$.

Onde, aplicando os valores anteriores na hipotese de indução, conseguimos que:

$$SPE(\vec{0}, 1) \leq 2^{n-1} \sum_{j=1}^{n} t_j^* \leq OPT \cdot m2^{n-1}.$$

A partir daí, a hipótese de indução é provada usando algumas manipulações algébricas e as características provenientes de um SPE e o seu cálculo pela indução retrativa. $\square$

5 Consensus and Cut Games

Considere um grafo ponderado $G = (V, E, w)$, onde $w : E \to \mathbb{R}_+$. Os n jogadores, que correspondem à $|V|$, possui um conjunto de ações binários: $A_i = \{R, B\}$, o que corresponde a escolher uma cor entre vermelho (R) e azul (B). Dizemos que um vetor peso w é genérico, se $w_i \neq 0$.

Dado um perfil de estratégias s, os **consensus games** são jogos de custo, onde $c_i(s)$ é a soma dos pesos das arestas de i para jogadores com diferente cor. Temos que a solução ótima corresponde a todos os jogadores escolherem a mesma cor. Na versão simultânea, entretanto, existem instâncias que apresentam equilíbrios puros de Nash que não são iguais ao ótimo. Com isso, os autores apresentam a seguinte observação:

Observação (3) *The unique SPE in generic consensus games is the optimal outcome.*

Por outro lado, os **cut games** são jogos de utilidade, com $u_i(s)$ é a soma dos pesos das arestas de i para jogadores com diferente cor. A versão simultânea apresenta $PoA = 2$, mas esse fator não é o mesmo encontrado para o SPoA, uma vez que um SPE não é necessariamente um equilíbrio puro de Nash na versão simultânea do jogo.

Teorema 2: The SPoA of sequential cut games is at most 4.

Demonstração. Considere os jogadores na ordem em que eles aparecem e que $E_k : \{(i, k) | i < k\}$ seja o conjunto de arestas do jogador k a todos jogadores que jogaram anteriormente. Sejam A, B duas partições dos nós no SPE. Para o jogador k, s.p.d.g. vale que $w(E_k \cap A) \geq w(E_k \cap B) \geq \frac{1}{2}w(E_k)$. Se jogando no equilíbrio, ele desejar mudar para B, então sua utilidade é de pelo menos $\frac{1}{2}w(E_k)$. Então, $u_k(SPE) \geq \frac{1}{2}w(E_k)$. Somando para todos os k, obtemos:

$$2SPE = \sum_k u_k \geq \frac{1}{2} \sum_k w(E_k) = \frac{1}{2} w(E) \geq \frac{1}{2} OPT$$

$\square$

Referências

[1] Renato Paes Leme, Vasilis Syrgkanis e Éva Tardos. "The curse of simultaneity". Em: *Proceedings of the 3rd Innovations in Theoretical Computer Science Conference*. ACM. 2012, pp. 60–67.