Leilões ascendentes para itens expirando gradualmente

MC918 - Teoria dos Jogos

HUGO DJEMAA *

*Ciência da Computação - Graduação
E-mail: hugo.djemaa@gmail.com

***Resumo* – Nesse documento, vamos estudar um artigo de pesquisa escrito por Ron Lavi e Noam Nisan sobre um tipo de leilão dinamico. Antes de mostrar que este problema não pode ser modelizado por mecanismo a prova de estratégia, vamos relacionar esse tipo de leilão com um outro conhecido, para tentar de achar estratégias recomandadas para melhorar a utilidade de cada jogador e o bem-estar social. Os resultados validos para o leilão conhecido não são mais validos com nosso modelo, mas é possivel achar um conjunto de estratégia que formam uma famila melhorando as utilidades dos jogadores, e que admitem como pior bem-estar social um terço do otimo.**

***Palavras-chave* – Teoria dos Jogos, Leilões**

I. INTRODUÇÃO

O leilão estudado pelo artigo[1] é parecido a o que pode ocorrer na internet, por exemplo no ebay. Um vendedor coloca várias instancias de um item com tempos finais diferentes. Os jogadores podem chegar a qualquer momento, fazer uns lances e ir embora. Como os objetos são todos iguais, supomos que um jogador tem interesse em comprar um so antes de ir embora da plataforma.

II. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Vamos definir formalmente nosso leilão e o relacionar com um outro ja estudado na literatura. O artigo original faz a relação com dois leilões, o a lance incremental e o japonês. Nos vamos interessarnos unicamente a relação com o leilão a lance incremental.

A. O modelo

Definição II.1. *O leilão é definido por um conjunto de objetos e um conjunto de jogadores de tal forma :*

a) Itens:

- M instancias do mesmo item com tempo de vencimento diferentes
- Um item t expira no momento t
- Um item não pode ser comprado depois do seu tempo de vencimento
- Tem M unidades de tempo que correspondem aos M objetos

b) Jogadores:

Um jogador i tem três atributos privados

- O tempo correspondendo a sua chegada no leilão $r(i)$
- O tempo de saida do leilão $d(i)$
- O valor estimado de uma instancia para o jogador $v(i)$

Observação. Um jogador i pode comprar um item t sse $r(i) \leq t \leq d(i)$

c) Notações:

- Um jogador i é ativo ao momento t se $r(i) \leq t \leq d(i)$ e se i não comprou nenhum item antes de t
- Uma alocação é uma atribuição de uns itens para uns jogadores (respeitando as restrições)
- X_t é uma alocação dos itens de t até M
- $X_t\,[d]$ é o jogador que recebe o item d em X_t
- $X_t\,[d_1, d_2]$ o conjunto de jogadores recebendo os objetos de d_1 até d_2

B. O leilão a lance incremental

O leilão a lance incremental[2] :
Todos os jogadores estão presentes no inicio do leilão, a $t = 1$. O leilão mantem um preço p_t e um vencedor win_t para um objeto t. Em t, um jogador i pode escolher um objeto $t' \geq t$, $p_{t'}\mid_{new} = p_{t'}\mid_{old} + \delta$, onde δ é um pequeno inteiro, $win'_t = i$. Um jogador não pode agir se ele ja é o vencedor temporario de um objeto, quando nenhum jogador pode ou quer fazer mais ofertas, incrementamos o tempo. Na hora de passar a t+1, win_t ganha o objeto t e paga $p_t - \delta$

C. Diferença e adaptações com nosso caso

A diferença entre essa modelagem e o nosso modelo é que nesse caso, os jogadores entram e saiam ao longo do tempo, temos que adicionar este componente na definição do jogo. Existe estratégias para os modelos apresentados, que permitem atingir sempre o maximo do bem estar social. São chamadas de estratégias míopes : um jogador i sempre tenta comprar o objeto de menor preço se esse preço for inferior ao seu valor estimado $v(i)$, senão não faz nada.

Problema : Na adaptação para nosso modelo, esse resultado não esta mais valido. Um jogador não tem conhecimento sobre as estratégias dos jogadores que ainda não estão presentes. Assim, ele pode querer dar a prioridade a um objeto que expira logo para anticipar a chegada de uns

jogadores competitivos no futuro (valor estimada alta), ou ao contrario esperar para fazer um lance que o tempo dos outros jogadores no leilão acabasse para ter menos competição.
Por exemplo : se tiver M jogadores com valor alta, uma estratégia boa pode ser esperar até o ultimo momento para fazer uma oferta que o tempo de muitos jogadores expira. Se todos usam a mesma estratégia, muitos objetos não serão vendidos e o bem estar social ficara bem longe do valor maximo.

A partir de agora, vamos chamar o leilão estudado de leilão ascendante online.

III. Modelagem por mecanismos a prova de estratégia

Vamos provar que não é possivel de modelar nosso modelo por um mecanismo a prova de estratégia. Mas primeiramente, umas definições.

- Seja T_i o dominio de um jogador valido $(r(i), v(i), d(i))$
- Seja $T_{-i} = \times_{j \neq i} T_j$
- Seja $b_i \in T_i$ uma alocação de atributos para um jogador
- Seja $v(i, b)$ o valor que o jogador i tira com b : $v(i)$ se o jogador consegue comprar um objeto, 0 senão.

Um mecanismo é a **prova de estratégia** se $\exists p_i : T_1 \times \cdots \times T_n \to \Re \setminus \forall i, \forall b_{-i} \in T_{-i}, \forall b_i \in T_i, \forall \tilde{b_i} \neq b_i$:
$v(i, b_i, b_{-i}) - p(b_i, b_{-i}) \geq v(i, \tilde{b_i}, b_{-i}) - p(\tilde{b_i}, b_{-i})$

Teorema III.1. *Qualquer mecanismo a prova de estratégia para o modelo estudado não pode sempre assurar um bem-estar social superior a $1/M$ do otimo.*

Para provar esse teorema, vamos introduzir o lema seguinte.

Lema III.2. *Para um mecanismo a prova de estratégia que sempre obtem pelo menos $1/c$ do bem-estar social otimo, para um $c \geq 1$. Para qualquer jogador i, com $r(i) = 1$, $\exists p_i : T_{-i} \to \Re$ função de preço tal que, para qualquer combinação de jogadores chegando ao tempo 1, b_{-i} :*

- *se $v(i) > p_i(b_{-i})$ então i ganha o objeto 1 e paga $p_i(b_{-i})$*
- *se $v(i) < p_i(b_{-i})$ então i não ganha nenhum objeto*

Uma vez o lema provado, sera facil justificar o nosso teorema.
Passos na prova do lema:

- Existencia de uma tal função
- Se o jogador i é tal que $v(i) > p_i(b_{-i})$, ele ganha um objeto
- Esse objeto é o primeiro objeto
- Se o jogador i é tal que $v(i) < p_i(b_{-i})$, ele não ganha nada

Demonstração:
Existencia de uma tal função :
Fixamos b_{-i} e supomos que $d(i) = 1$:
Obviamente existe um limiar $p_i^* = p_i^*(b_{-i})$ tal que :
i ganha e paga p_i^* se $v(i) > p_i^*$, e perde e paga 0 se $v(i) < p_i^*$

Se o jogador i é tal que $v(i) > p_i(b_{-i})$, ele ganha um objeto :
Vamos supor que não ganha um objeto.
Se i declara um tempo de saida falso $\tilde{d_i} = 1$, i ganha um objeto e melhora sua utilidade
Como estamos num contexto de mecanismos a prova de estratégias, isso é impossivel.
i ganha um objeto
Se i tal que $v(i) > p_i(b_{-i})$, o objeto que ele ganha é o primeiro :

Caso i não ganhar o primeiro objeto, e o jogo ocorrer da forma seguinte :
$\forall t > 1$
Seja $x_t = \sum_{i, 1 \leq r(i) \leq t-1} v(i)$
Jogadores j tais que $j, r(j) = d(j) = t, v(j) = (c+1)x_t$
Se $win_t \neq j$ o jogo para de "mandar" novos jogadores, esse tempo $t = ultimo$
Nesse caso, o valor da alocação seria ao maximo $v(ON) \leq x_{ultimo}$
Na melhor alocação possivel, o ultimo objeto teria sido ganhado pelo ultimo jogador que tem o maior valor, e o bem-estar social teria sido pelo menos $v(OPT) \geq (c+1)x_{ultimo}$.
Assim, a razão $\frac{v(ON)}{v(OPT)} \leq \frac{1}{c+1}$, o que é uma contradição.
Então tudo objeto $j \neq 1$ deve ser ganhado pelo jogador j. Como i tem que receber um objeto, ele recebe o primeiro.

Se i tal que $v(i) < p_i(b_{-i})$, ele não ganha nada :
Vamos supor que i ganha um item $j \neq 1$. O preço do objeto vale maximo $v(i) < p_i(b_{-i})$ Agora imaginamos que i teria entrado no mesmo jogo (mesmo b_{-i}) com um valor $\tilde{v}(i) > p_i(b_{-i})$, com um preço assim, i teria ganhado o primeiro objeto e teria obtido uma utilidade de $\tilde{v}(i)$ menos o preço do primeiro objeto. So que se ele tivesse entrado no leilão anunciando um valor de $v(i)$, ele teria ganhado o objeto j e teria melhorado sua utilidade pois o preço do objeto j é inferior ao preço do primeiro objeto. Isto é uma contradição porque estamos num contexto de mecanismo a prova de estratégia.

■

Agora falta provar o teorema a partir do lema. Vamos achar uma alocação onde vamos obter menos que 1/M do bem-estar otimo.
Para uma função de preço $p_i : T_{-i} \to \Re$
Sejam M jogadores com $r(i) = 1, d(i) = M, 1 \leq v(i) \leq 1 + \epsilon, v(i) \neq p_i(b_{-i}), \forall \epsilon > 0, \forall i$
Pelo lema :

- se $v(i) > p_i(b_{-i})$ então i ganha o objeto 1 e paga $p_i(b_{-i})$
- se $v(i) < p_i(b_{-i})$ então i não ganha nenhum objeto

O bem estar social vale ao maximo $1 + \epsilon$ quando o otimo vale mais que M.

IV. Estrutura de teoria dos jogos

Primeiramente vamos criar um conjunto de estratégias que um jogador vai ter interesse a seguir, vamos ver que se todos os jogadores jogam nesse conjunto de estratégia, o bem-estar social sempre vai estar ao minimo 1/3 do otimo. Ademais, vamos ver que esse conjunto é um equilibrio Nash-Conjunto, ou seja, que todos os jogadores tem interesse de jogar nesse conjunto.

A. Definições para o bem-estar social

Definição IV.1. *Um jogador i é semi miope se quando jogar, ele faz um lance para o item t com $p(t) \leq v(i)$ e $r(i) \leq t \leq d(i)$, se não existe tal item, i para de participar. (O objeto não é necessariamente o de menor preço)*

Contexto para alocação semi miope

- A_t : jogadores ativos no tempo t.
- S_t : melhor alocação atual, alocação de maior valor dentro das alocações dos itens de t até M para os jogadores de A_t.
- f_t : o conjunto de jogadores que podem receber o objeto t.
- $f_t = \{j \in S_t \mid S_t \backslash$ j independante em relação aos itens de t+1 até M $\}$

S é *independante em relação* aos itens de t até M se existe uma alocação tal que tudo jogador de S recebe um objeto diferente entre t e M.

$$v_t^* = \begin{cases} 0 & S_t \text{ é indep. / itens de t+1 até M} \\ min_{j \in f_t}\{v(j)\} & \text{senão} \end{cases}$$

Definição IV.2. *Uma regra de alocação é semi miope se tudo t é vendido ao tempo t para um jogador j com $v(j) \geq v_t^*$. Se $v_t^* = 0$ a regra de alocação pode escolher de não dar o objeto para ninguem*
Ademais, o jogador de S_t que vai receber o objeto vai pagar exatamente v_t^*.

B. Bem-estar social

Queremos mostrar que se todos os jogadores seguem estratégias recomandadas (semi miopes), o bem-estar social sera de pelo menos 1/3 do valor do bem-estar otimo.

Teorema IV.1. *Se todos os jogadores são semi miopes, então o leilão ascendante online consegue um bem-estar social com um valor pelo menos um terço o do bem-estar otimo, mais um valor que tende para zero junto com o δ do leilão :*
$v(OPT) \leq 3 \cdot v(ON) + 2 \cdot M \cdot \delta$

Teorema IV.2. *O leilão ascendante online com jogadores semi miopes é uma regra de alocação semi miope.*

Demonstração:

- Caso $v_t^* = 0$, $v(win_t) \geq v_t^* - \delta$ é obvio
- $v_t^* > 0 \Leftrightarrow f_t$ não é independante (admitido)
- $\exists j \in f_t$ tq j não ganha um objeto entre t+1 e M
- Como j esta em $f_t, v(j) \geq v_t^*$ j ganha o objeto
- Ou não ganha, $p(t) > v(j) \geq v_t^*$
- Se $i = win_t, v(i) \geq p(t) - \delta \Rightarrow v(win_t) \geq v_t^* - \delta$

■

Teorema IV.3. *Qualquer regra de alocação semi miope obtem pelo menos um terço do valor do bem-estar social otimo.*

Demonstração:

- $\forall$ regra de alocação que produz ON : $v(OPT \setminus ON) \leq 2\sum_{t=1}^{M} v_t^*$
- Como para regra de alocação semi miope $v(ON[t]) \geq v_t^*$:
- $v(OPT) \leq v(OPT \setminus ON) + v(ON) \leq 2\sum_{t=1}^{M} v_t^* + v(ON) \leq 2 \cdot v(ON) + v(ON) = 3 \cdot v(ON)$

■

Dos dois teoremas precedentes vem o resultado que nos interessa sobre o bem-estar social nesse tipo de leilão, com estratégias semi miopes.

Teorema IV.4. *Se todos os jogadores são semi miopes, então o leilão ascendante online consegue um bem-estar social com um valor pelo menos um terço o do bem-estar otimo, mais um valor que tende para zero junto com o δ do leilão : $v(OPT) \leq 3 \cdot v(ON) + 2 \cdot M \cdot \delta$*

C. Definições para o equilibrio

Estamos querendo definir um conjunto de estratégias tal que jogar uma estratégia dentro desse conjunto seja intuitivo para qualquer jogador, desviar dessas estratégias se paga por um custo maior (ou uma utilidade menor).

Definição IV.3. *Digamos que R_i é um equilibrio Nash-Conjunto se para qualquer i, qualquer $s_{-i} \in R_{-i}$ e qualquer $s_i \in S_i$, $\exists r_i \in R_i / u_i(r_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s-i)$*
Ou seja, para qualquer conjunto de estratégias recomandadas dos outros jogadores, a melhor resposta esta dentro do conjunto de estratégias recomandadas.

Isso vale para jogos a informação completa, mas os jogadores tem atributos privados. Um jogador i tem um tipo privado $t_i \in T_i$
A utilidade de um jogador depende desse tipo : $u_i(t_i, s_i, s_{-i})$ e junto o conjunto de estratégias recomandadas :
Estratégias Recomandadas para nosso leilão $R_i : T_i \rightarrow 2^{S_i}$
$R_i(*) = \cup_{t_i \in T_i} R_i(t_i)$

Definição IV.4. *$\bar{G} = (T, \bar{S}, \bar{u})$ é uma extensão de $G = (T, S, u)$ se $\forall i, S_i \subseteq \bar{S}_i$ $\forall s \in S, \forall t_i \in T_i : \bar{u}_i(t_i, s) = u_i(t_i, s)$*

A melhor resposta de um jogo pode não ser a melhor resposta da extensão desse jogo, pois as novas estratégias podem ser melhores.

Definição IV.5. *$\bar{G}$ é uma extensão ignoravel de G se os conjuntos recomandados $R_i(t_i) = S_i, \forall i$ formam um equilibrio Nash-Conjunto de $\bar{G}$.*

Uma extensão ignoravel não permite melhores estratégias.

Definição IV.6. *Seja A o conjunto das alocações validas.*
Uma escolha social $F : T \rightarrow 2^A$ é uma c-aproximação do bem-estar social se $\forall t \in T$, o bem estar social de uma

alocação $a \in F(t)$ vale pelo menos 1/c do bem-estar otimo em relação a t.

Proposição IV.6.1. *Se $\{R_i(\cdot)\}_i$ são um equilibrio Nash-Conjunto de G e $\bar{G}$ é uma extensão ignoravel de G, então $\{R_i(\cdot)\}$ são um equilibrio Nash-Conjunto de $\bar{G}$.*

Definição IV.7. *Um mecanismo semi miope é o conjunto de :*
Espaço de estratégia : *Cada jogador declara quando chega, seu valor, seu tempo de chegada e de saida, e um tempo de saida t entre sua chegada e sua saida. Esse tempo esta em $d(i,t)$. Se ele não o declara ou se t é superior a seu tempo de saida, $d(i,t) = d(i)$*
Determinação do vencedor ao tempo t : *A_t se torna os jogadores ativos no tempo t com tempo de saida d(i,t) $\forall i$.*
O mecanismo aloca o objeto t a um jogador em f_t
Preços : *$\forall i$, o mecanismo cria um preço de tentativa para cada tempo t $p_t(i)$ assim :*
se $i \notin S_t, p_t(i) = 0$
$\forall i \in S_t, c_t(i) = max\{v(j) \mid j \in A_t \setminus S_t, S_t \setminus i \cup j$ independante / itens t até M$\}$
Para tudo $i \in f_t$ o mecanismo fixa $p_t(i) = c_t(i)$
Se i ganha t, i paga $max_{r(i) \leq t' \leq t} p_{t'}(i)$
Estrategia recomendada : *Em uma estratégia recomendada, i declara seu verdadeiro valor e tempo de saida, e pode declarar um tempo de saida "tentativa".*

D. Analise estratégias

Os três resultados seguintes foram provados no papel de origem. A prova de um fazendo mais de uma pagina, não vamos provar esses resultados aqui.

Lema IV.5. *Se todos os jogadores jogam nas estratégias recomendadas, então a alocação de qualquer mecanismo semi miope é uma regra de alocação semi miope.*

Teorema IV.6. *As estratégias recomendadas para o mecanismo semi miope formam um equilibrio Nash-Conjunto.*

Teorema IV.7. *O leilão ascendente online é uma extensão ignoravel de um mecanismo semi miope*

Graças a proposição IV.6.1, temos que as estratégias recomendadas formam um equilibrio Nash-Conjunto para o leilão ascendente online.

V. Conclusões

Os autores do artigo introduzem a noção de equilibrio Nash-Conjunto (Nash-Set equilibrium) que é um conjunto de estratégia que contem a resposta otimo para um jogador caso os outros jogadores jogam nesse conjunto de estratégia. Definem regras de alocação " semi-miope " que garantem um bem-estar social valendo pelo menos um terço do otimo. E mostram, de duas maneiras diferentes, que existe um tal equilibrio no nosso leilão cujas estratégias são todas semi-miope. Ou seja, um conjunto de regras que garantem uma boa razão da melhor alocação alem de ser boas para os jogadores individualmente.

Referências

[1] R. Lavi and N. Nisan, *Online ascending auctions for gradually expiring items*, 1st ed. Journal of Economic Theory: Elsevier, 2014. 1

[2] D. G. Gabrielle Demange and M. Sotomayor, *Multi-Item Auctions*, 4th ed. Journal of Political Economy 94: The University of Chicago Press, 1986. 1