nome: Gabriel Henriques Siqueira ra: 155446

MC918 - Resumo
Teoria dos Jogos Evolutiva

Abstract

A teoria dos Jogos evolutiva utiliza conceitos de evolução para modelar problemas. Um modelo clássico desta teoria consiste em uma população infinita competindo por recursos, onde os jogadores jogam dois a dois um jogo simétrico para obtenção de recursos. Um problema que pode ser modelado com estas ideias é o roteamento egoísta, onde agentes carregam um fluxo unitário através de uma rede buscando minimizar suas latências. Usando uma dinâmica de imitação, onde o perdedor copia o vencedor, é possível mostrar que esse jogo converge para um quase equilíbrio em tempo $O(\epsilon^{-3} ln(l_{max}/l^*))$.

1 Indrodução

A teoria dos jogos evolutiva consiste em usar conceitos da evolução para modelar problemas de teoria dos jogos. Esta modelagem é feita ao se tratar o problema como organismos de uma população disputando pela obtenção de recursos.

Estes organismos vão jogar algum jogo para disputar esse recurso, o vencedor obtém o recurso, esta obtenção é modelada por um aumento na aptadão deste individuo. A aptidão é uma característica de cada individuo que influencia em sua capacidade de reprodução.

As estrategias do jogo são definidas e modificadas por dinâmicas simples e locais. Por exemplo a dinâmica de replicação, quando um descendente herda a estrategia do pai, ou dinâmica de imitação, quando o perdedor do jogo copia a estratégia do vencedor.

2 Modelo Classico

No modelo clássico as população são infinitas, cada individuo é identificado por um numero real que representa a sua aptidão e uma estrategia mista para o jogo de obtenção de recursos. Os organismos se reproduzem de forma assexuada, criando um numero de repicas proporcionais a sua aptidão. As replicas herdam a estratégia do original, ou seja elas seguem uma dinâmica de replicação.

A interação dos organismos ocorre se escolhendo dois organismos de forma aleatória, todos tem a mesma chance de serem escolhidos, e os colocando para jogar um jogo de dois jogadores simétrico. Este jogo é dado por uma função $F : \Delta(A) \times \Delta(A) \to \mathbb{R}$, onde A é o conjunto de ações possíveis (estratégias puras) e $\Delta(A)$ o conjunto de estratégias mistas sobre A. Seja s a estratégia do primeiro jogador e t a do segundo, temos $F(s,t)$ o ganho ou perda de aptidão do primeiro jogador e $F(t,s)$ o do segundo.

Considere que $(1-\epsilon)$ organismos jogam estratégia s (organismos incumbentes) e ϵ organismos jogam estratégia t (organismos mutantes). Temos a seguinte definição:

Definição (Estratégia evolutiva estável (EEE)): Uma estrategia s é evolutiva estável para um jogo de 2 jogadores simetrico dado pela função F se:

$$\forall t \neq s, \exists \epsilon_t : \forall 0 < \epsilon < \epsilon_t, (1-\epsilon)F(s,s) + \epsilon F(s,t) > (1-\epsilon)F(t,s) + \epsilon(t,t)$$

Ou seja para um valor pequeno o bastante de mutantes uma EEE é uma estrategia dos incumbentes que garante que eles reproduzam mais que os mutantes e com o tempo o numero de mutantes tende a zero.

O seguinte teorema corresponde uma definição equivalente de EEE:

Teorema 2.1. *Uma estrategia s é evolutiva estável para um jogo de 2 jogadores simétrico dado pela função F se e somente se:*

- *(s,s) é um equilíbrio de Nash de F.*
- *E se t é melhor resposta para s, $t \neq s$ então $F(s,t) > F(t,t)$.*

Demonstração.
Da definição s é EEE se: $(1-\epsilon)F(s,s)+\epsilon F(s,t) > (1-\epsilon)F(t,s)+\epsilon(t,t)$.

Como ϵ é muito menor que 1,
s é EEE $\iff$ $F(s,s) > F(t,s)$ ou $F(s,s) = F(t,s)$ e $F(s,t) > F(t,t)$.

Temos $F(s,s) \geq F(t,s), \forall t$, logo (s,s) é um equilíbrio de Nash.

Se $F(s,s) = F(t,s)$ (t é melhor resposta para s) então $F(s,t) > F(t,t)$.
$\square$

3 Roteamento Egoista

Agora será apresentado um modelo paro o roteamento egoísta. Temos infinitos agentes, carregando quantidades infinitesimais de uma unidade de fluxo de uma fonte s até um destino t em uma rede dada por um grafo $G(V, E)$. Esses agentes agem de forma egoísta, então eles tem o objetivo de minimizar suas latência para ir de s até t.

A latência de cada aresta do rede sera dada pela função $l_e : [0,1] \to \mathbb{R}$ que é não negativa, não decrescente e Lipschitz continua. Alem disso temos:

P = conjunto de caminhos de s até t (estrategias puras),
x_p = quantidade de fluxo transportada por $p \in P$ (também pode ser interpretado como a fração de agentes em p),
$\vec{x}$ = vetor de fluxo indexado por p (representa um fluxo da rede),
$x_e = \sum_{p \ni e} x_p$ (carga de uma aresta),
$l_e(x_e)$ é a latência total de uma aresta,
$l_p(\vec{x}) = \sum_{e \in p} l_e(x_e)$ (latência total de um caminho),
$\bar{l} = \sum_{p \in P} x_p l_p(\vec{x})$ (latência média da rede).

Um fluxo viável é um fluxo que transporta uma unidade de fluxo de s até t, nos próximos resultados sera assumido que o fluxo é viável.

Inicialmente cada agente começa com a percorrer um caminho aleatório. Em cada instante de tempo os agentes são pareados dois a dois, de forma aleatória é uniformemente distribuída. Então estes agentes comparam as latências de seus caminhos, o agente no caminho de menor latência pode mudar para o caminho de menor latência, com uma chance proporcional a diferença das latências.

4 Convergência para um quase equilíbrio

A seguir é dada a definição de um quase equilíbrio para esse jogo:

Definição Seja P_ϵ os caminhos com latência de pelo menos $(1+\epsilon)\bar{l}$ $(P_\epsilon = \{p \in P | l_p(\vec{x}) \geq (1+\epsilon)\bar{l}\})$ e seja $x_\epsilon = \sum_{p \in P_\epsilon} x_p$ a fração de agentes usando esses caminhos. O fluxo $\vec{x}$ é um equilíbrio ϵ-aproximado se $x_\epsilon \leq \epsilon$.

Agora sera apresentado um teorema sobre convergência para um quase equilíbrio para isso serão usadas as requintes funções:

A taxa de variação de fluxo em $p \in P$: $x'_p = \lambda(\vec{x}) x_p \left[\bar{l}(\vec{x}) - l_p(\vec{x})\right]$

$$\text{E a função potencia: } \Phi(\vec{x}) = l^* + \sum_{e \in E} \int_0^{x_e} l_e(u)du$$

Onde: $l^* = min_{\vec{x}} \bar{l}$ é a menor latência considerando todos os fluxos viáveis.

Teorema 4.1. *A dinamica de imitação converge para um equilibrio ϵ-aproximado em tempo $O(\epsilon^{-3} ln(l_{max}/l^*))$, l_{max} é a maior latência media considerando todos os fluxos viáveis.*

Demonstração. (ideia)

Utilizando a taxa de variação de fluxo, as definições apresentadas e a desigualdade de Jensen e possível obter que:

$$\Phi' \leq \lambda(\vec{x}) \frac{-\epsilon^3}{2} \bar{l}(\vec{x})^2 = -\frac{\epsilon^3}{2} \bar{l}(\vec{x}) \quad \text{(Utilizando } \lambda(\vec{x}) = \bar{l}(\vec{x})^{-1}\text{)}$$

Temos que $\bar{l} \geq \frac{\Phi}{2}$, pois:

$$\bar{l}(\vec{x}) = \sum_{p \in P} x_p l_p(\vec{x}) = \sum_{e \in E} x_e l_e(x_e) \geq \sum_{e \in E} \int_0^{x_e} l_e(u)du$$

E por definição $\bar{l} \geq l^*$

$$\text{Logo } \Phi' \leq -\frac{\epsilon^3 \Phi}{4} \implies \Phi(t) \leq \Phi(0) e^{\frac{-\epsilon^3 t}{4}}$$

Esta desigualdade vale enquanto não ocorrer um equilíbrio ϵ-aproximado. Seja Φ^* um valor pequeno o bastante de Φ para que a desigualdade não ocorra.

$$\Phi^* > \Phi(0) e^{\frac{-\epsilon^3 t}{4}} \implies \ln\left(\frac{\Phi(0)}{\Phi^*}\right) > \frac{\epsilon^3 t}{4} \implies t < 4\epsilon^{-3} \ln\left(\frac{\Phi(0)}{\Phi^*}\right)$$

Mas $\Phi^* \geq l^*$ e $\Phi(0) \leq 2l_{max} \implies t < 4\epsilon^{-3} \ln\left(\frac{2l_{max}}{l^*}\right) \implies t \in O\left(\epsilon^{-3} \ln\left(\frac{l_{max}}{l^*}\right)\right)$

$\square$