Hedonic Clustering Games

Nome: Felipe Lemes Galvão
RA:116790

***Abstract*—Clustering, a partição de objetos conforme uma medida de similaridade, é tradicionalmente estudado como um problema de otimização global. Nós analisamos uma modelagem alternativa de clustering proposta por Feldman et al. [2] no contexto de teoria do jogos, que utiliza a categoria de jogos hedônicos para modelar alguns critérios de clustering. Em particular focamos no modelo do algoritmo de clustering k-medianas, onde os objetos são pontos num espaço métrico e agem como jogadores independentes se organizando em k clusters. Caracterizamos e verificamos a existência do equilíbrio de Nash, e mostramos limitantes para o preço da anarquia e o preço da estabilidade. Além do espaço métrico geral, também consideramos o espaço métrico em linha na análise.**

I. Introdução

Clustering é a partição de objetos conforme uma medida de similaridade. O objetivo de um algoritmo de clustering é fazer com que grupos de objetos mutualmente similares formem uma partição que os separem de outros objetos mais dissimilares. A maior parte dos trabalhos envolvendo clustering o trata como um problema de otimização global. Neste trabalho iremos analisar uma abordagem alternativa para o problema de clustering proposta por Feldman et al. [2] no contexto de teoria dos jogos que utiliza a classe de jogos hedônicos para definir os chamados jogos de clustering hedônicos.

Jogos hedônicos foram introduzidos na economia por Drèze e Greenberg [1] para modelar jogos de formação de coalização em que a utilidade de cada jogador depende apenas da identidade dos membros de sua coalização. Para os jogos de clustering hedônicos vemos cada objeto como um jogador independente e egoísta que interage com os demais jogadores para formar coalizões (clusters) onde sua utilidade segue o critério que define os jogos hedônicos.

Em [2] os jogos de clustering hedônico propostos são divididos em *clustering fixo* e *clustering de correlação*; os jogos de *clustering fixo* são ainda sub-divididos por dois critérios de clustering diferentes, o das *k-medianas* e o dos *k-centros*. Nesse trabalho focamos apenas nos jogos de *clustering fixo* baseado no critério das *k-medianas* e por simplicidade o uso do termo "jogo de clustering hedônico" daqui em diante se refere a esse modelo em particular.

Primeiro caracterizamos o jogo de clustering hedônico na seção II e então procedemos para analisar a existência e qualidade (preço da estabilidade e preço da anarquia) dos equilíbrios puros de Nash na seção III.

II. Descrição do jogo de clustering hedônico

Seja $\mathcal{N}$ um conjunto de n pontos num espaço métrico com função de distância $d(\cdot,\cdot)$, e $\mathcal{C}$ um conjunto de k clusters. Dizemos que um jogador i controla o ponto $u_i \in \mathcal{N}$ onde $\mathcal{N} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ (i.e. cada jogador controla um ponto) e que sua estratégia consiste em escolher um cluster $C \in \mathcal{C}$ para se juntar, ou seja, $S_i = \mathcal{C}$. Estabelecemos então uma função de atribuição $A : \mathcal{N} \to \mathcal{C}$ que nos diz qual cluster cada jogador escolheu numa rodada do jogo.

Dado uma atribuição A, dizemos que um cluster $C_j \in \mathcal{C}$ é o conjunto de pontos que o escolheram, ou seja, $C_j = \{u \in \mathcal{N} \mid A(u) = C_j\}$. Esse conjunto C_j é o que entendemos como coalização onde os $u \in C_j$ são seus membros. Cada cluster elege então um de seus pontos como representante (uma espécie de escolha social dentro da coalizão), onde o representante é definido como o centroide obtido na função $h : \mathcal{C} \to \mathcal{N}$ dada por $h(C) = \arg\min_{u\in C}\{\sum_{v\in C} d(u,v)\}$.

Com isso definimos o custo de um jogador $u \in \mathcal{N}$ como sua distância até o centroide de seu cluster, ou seja, $c(u) = d(u, h(A(u)))$. Também definimos o custo de um cluster $C \in \mathcal{C}$ como $c(C) = \sum_{u\in C} c(u) = \sum_{u\in C} d(u, h(C))$ e o custo social $CS = \sum_{u\in\mathcal{N}} c(u) = \sum_{C\in\mathcal{C}} c(C)$. Assim podemos interpretar $h(C)$ como o ponto que minimiza o custo $c(C)$ (ou os pontos como veremos mais adiante).

Os jogadores agem de forma egoísta visando minimizar seu custo $c(u)$. Sendo $C^{+u} = C \cup \{u\}$, o equilíbrio puro de Nash para esse problema ocorre quando $d(u, h(C_j^{+u})) \geq d(u, h(A(u)))$ para todo $u \in \mathcal{N}$ e $j = 1..k$. Em outras palavras, nenhum jogador melhora seu custo mudando para outro cluster (o qual pode ter seu centroide atualizado com a adição do jogador).

Para caracterizarmos esse jogo como hedônico precisamos primeiro considerar o que ocorre na função $h(C)$ quando mais de um ponto minimiza o custo

Pontos do cluster	Posição do centroide
$\{u, v\}$	u
$\{v, w\}$	v
$\{w, u\}$	w

TABLE I
CRITÉRIO DE DESEMPATE ESTÁTICO ENTRE TRÊS PONTOS

$c(C)$. Para ser puramente hedônico, esse desempate deve depender apenas dos membros de C, o que implica um chamado critério de desempate estático já que podemos enumerar os clusters possíveis e definir o que ocorre em cada caso. Mas observamos num caso simples onde $\mathcal{N} = \{u, v, w\}$ e $k = 2$ com o critério de desempate dado pela tabela I que um equilíbrio pode não existir independente do espaço métrico e pontos utilizados. Isso motiva um pequeno relaxamento do modelo de jogos hedônicos com o chamado critério de desempate baseado em histórico, onde nós priorizamos pontos que já eram centroides na rodada anterior para ser um novo centroide nos casos de empate.

III. ANÁLISE DO EQUILÍBRIO PURO DE NASH, PREÇO DA ESTABILIDADE E PREÇO DA ANARQUIA

Com exceção da análise de preço da anarquia que é válida para qualquer espaço métrico, faremos uma análise separada para espaços métrico gerais na seção III-A e outra para espaços métricos em linha na seção III-B. Lembramos que um espaço métrico pode ser descrito por um grafo não orientado onde os pontos são nós do grafo e a distância entre dois pontos é definida pelo caminho mínimo entre eles. O caso particular de espaço métrico em linha se dá quando o grafo forma uma árvore de altura máxima que também pode ser representado por pontos num espaço unidimensional.

Para um espaço métrico geral começamos mostrando que o jogo definido na seção II pode não ter equilíbrio, o que nos motiva a introduzir uma modificação da função de custo que adiciona uma penalidade para jogadores mudando de estratégia. Mostramos um jeito de definir essa penalidade de tal forma que um equilíbrio sempre exista e adicionalmente mostramos que o preço da estabilidade com essa penalidade é 1. Para o espaço métrico em linha iremos mostrar que sempre há um equilíbrio (mesmo sem uma penalidade adicional) e que o custo da estabilidade também é 1.

Para a análise do preço do anarquia começamos provando o seguinte teorema:

Teorema 1. *O preço da anarquia é ilimitado para o espaço métrico em linha.*

Prova. Mostramos com um exemplo. Seja $\mathcal{N} = \{0, 1, M\}$ um conjunto pontos definido num espaço unidimensional onde $M > 2$, e seja $k = 2$. O pior equilíbrio será $\mathcal{C} = \{\{0\}, \{1, M\}\}$ quando o centroide de $\{1, M\}$ é 1 e terá custo $M-1$. O equilíbrio ótimo será $\mathcal{C} = \{\{0, 1\}, \{M\}\}$ com custo 1. Como M é ilimitado, a razão do pior caso com o ótimo também é. □

Como o espaço métrico em linha é sub-conjunto de espaços métricos gerais, do exemplo do teorema 1 temos trivialmente o corolário:

Corolário 1. *O preço da anarquia é ilimitado para espaços métricos gerais.*

Seguimos então para a análise individual de cada tipo de espaço métrico.

A. *Espaço métrico geral*

Primeiro mostramos que um equilíbrio pode não existir pelo seguinte teorema:

Teorema 2. *Existe uma instância do problema com $n = 9$ e $k = 2$ onde não há equilíbrio puro de Nash.*

Uma dessa instâncias é mostrada na figura 1. A prova completa é por casos e consiste em mostrar que qualquer potencial par de centroides entra em um de dois casos: um dos centroides não é ótimo para os clusters formados, ou algum nó diminui seu custo mudando de cluster. Por ser extensa, omitimos a prova completa e só mostramos um exemplo da análise descrita para um certo par de nós na figura 2.

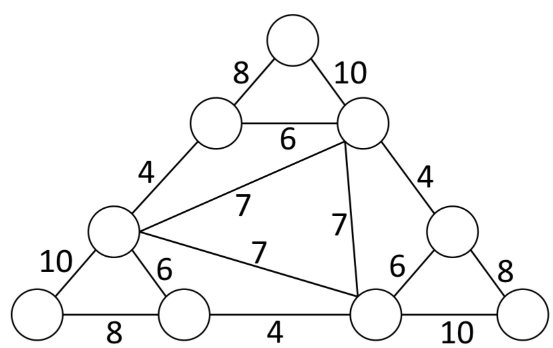

Fig. 1. Instância sem equilíbrio.

Isso nos motiva a tentar forçar um equilíbrio impondo um custo adicional para nós que queiram mudar de cluster. Intuitivamente sabemos que isso é possível pois um custo infinito implicaria num equilíbrio para qualquer configuração, mas desejamos definir esse custo de forma razoável. Para isso usamos uma penalidade inspirada no mecanismo VCG onde um nó se juntando a um novo cluster paga pela externalidade que causa, representada pela distância do centroide do cluster alvo antes e

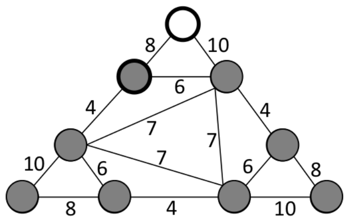

Fig. 2. Exemplo de par de centroides. Os nós destacados são os centroides dos clusters representados pelas cores branco e cinza. O cluster cinza consegue melhorar seu custo escolhendo o nó do canto inferior esquerdo como centroide.

depois da mudança de estratégia. Usando a notação $C^{+u} = C \cup \{u\}$ e supondo que o jogador u quer se mover para o cluster C, o custo total após a mudança fica $c(u) = d(u, h(C^{+u})) + d(h(C), h(C^{+u}))$.

Queremos mostrar que essa penalidade é suficiente para garantir um equilíbrio. Para isso começamos provando o seguinte lema:

Lema 1. *Na versão do problema com penalidade, um jogador u só muda sua estratégia de um cluster C_1 para um cluster C_2 caso $d(u, h(C_2)) < d(u, h(C_1))$.*

Prova. u só deseja mudar para C_2 caso haja diminuição do custo, ou seja, $d(u, h(C_2^{+u})) + d(h(C_2), h(C_2^{+u})) < d(u, h(C_1))$. Além disso, por desigualdade triangular temos que $d(u, h(C_2)) \leq d(u, h(C_2^{+u})) + d(h(C_2), h(C_2^{+u}))$. Juntando ambas as desigualdades chegamos em $d(u, h(C_2)) < d(u, h(C_1))$. □

Com isso provamos o seguinte teorema:

Teorema 3. *Na versão do problema com penalidade, qualquer mudança de estratégia que reduz o custo de um jogador u também reduz o custo social.*

Prova. Supondo que a mudança de estratégia de u seja de um cluster C_1 para um cluster C_2, podemos separar essa mudança em dois passos: primeiro o jogador troca de cluster e segundo os centroides são atualizados. No primeiro passo os únicos afetados são u, C_1 e C_2, onde C_1 diminui seu custo em $d(u, h(C_1))$ e C_2 aumenta seu custo em $d(u, h(C_2))$; pelo lema 1 sabemos que $d(u, h(C_2)) < d(u, h(C_1))$, o que implica uma diminuição estrita do custo social. No segundo passo temos pela definição do centroide que a mudança só ocorre caso haja uma melhoria de custo, portanto os custos de C_1 e C_2 não podem aumentar com a atualização. Juntando os dois passo observamos então que há uma diminuição estrita do custo social com a mudança de estratégia. □

Como o jogo é finito, o teorema 3 nos diz que uma dinâmica de respostas ótimas sempre diminui o custo social até chegar num equilíbrio puro de Nash. Adicionalmente podemos usar esse teorema para provar o seguinte corolário quanto ao preço da estabilidade:

Corolário 2. *Na versão do problema com penalidade, o custo da estabilidade é 1.*

Prova. Mostramos por contradição. Suponha que exista um ótimo que não seja equilíbrio, então existe um jogador que consegue melhorar seu custo mudando de estratégia. Mas pelo teorema 3 sabemos que essa mudança de estratégia vai melhorar o custo social, uma contradição da suposição de ser um ótimo. □

B. Espaço métrico em linha

Para a análise do espaço métrico em linha vamos usar a representação de pontos num espaço unidimensional. Nesse contexto a nossa definição do centroide pela função h coincide com o conceito de mediana em estatística, do qual temos as seguintes propriedades básicas que nos serão úteis:

Propriedade 1. *Para um conjunto $\mathcal{P}$ de pontos onde $|\mathcal{P}|$ é ímpar, a mediana é única e divide o conjunto ao meio com $(|\mathcal{P}| - 1)/2$ pontos menores que a mediana e $(|\mathcal{P}| - 1)/2$ pontos maiores que a mediana.*

Propriedade 2. *Para um conjunto $\mathcal{P}$ de pontos onde $|\mathcal{P}|$ é par, existem duas possíveis medianas e a partir delas podemos dividir o conjunto ao meio com $(|\mathcal{P}|)/2$ pontos menores ou iguais à menor possível mediana e $(|\mathcal{P}|)/2$ pontos maiores ou iguais à maior possível mediana.*

No nosso contexto de jogos de clustering hedônicos esses conjuntos de pontos são nossos clusters $C \in \mathcal{C}$. Por conveniência nos referimos a pontos menores como pontos à esquerda e similarmente, pontos maiores como pontos à direita. Para diferenciar as duas medianas da propriedade 2 usamos a notação $h_L(C)$ para a mediana da esquerda e a notação $h_R(C)$ para a mediana da direita.

Começamos com um lema que será necessário mais adiante:

Lema 2. *Seja C um cluster com um número par de elementos e sejam u e v dois pontos quaisquer no intervalo $[h_L(C), h_R(C)]$. Nesse caso $\sum_{w \in C} d(u, w) = \sum_{w \in C} d(v, w)$ para quaisquer u e w (incluindo $h_L(C)$ e $h_R(C)$).* [1].

Prova. Pela propriedade 2 sabemos que C pode ser particionado em dois sub-conjuntos de tamanho $|C|/2$ que iremos chamar de $C_L = \{w_1^L, w_2^L, \ldots, w_{|C|/2}^L\}$ e $C_R = \{w_1^R, w_2^R, \ldots, w_{|C|/2}^R\}$ tal que $\forall w^L \in C_L, w^L \leq h_L(C)$

[1]Essa demonstração é diferente da apresentada em [2].

e $\forall w^R \in C_R, w^R \geq h_R(C)$. Consideramos sem perda de generalidade um emparelhamento de C_L e C_R definido por $E = \{(w_1^L, w_1^R), (w_2^L, w_2^R), \ldots (w_{|C|/2}^L, w_{|C|/2}^R)\}$. Por definição, quaisquer pontos $u, v \in [h_L(C), h_R(C)]$ estão entre os dois elementos de um par $(w^L, w^R) \in E$ de forma que $d(w^L, w^R) = d(w^L, u) + d(u, w^R) = d(w^L, v) + d(v, w^R)$. Podemos então encontrar a igualdade $\sum_{w \in C} d(u, w) = \sum_{w^L \in C_L} d(u, w^L) + \sum_{w^R \in C} d(u, w^R) = \sum_{(w^L, w^R) \in E} d(w^L, u) + d(u, w^R) = \sum_{(w^L, w^R) \in E} d(w^L, v) + d(v, w^R) = \sum_{w^L \in C_L} d(v, w^L) + \sum_{w^R \in C} d(v, w^R) = \sum_{w \in C} d(v, w)$. □

Esse lema nos auxilia a provar o seguinte teorema:

Teorema 4. *Para um espaço métrico em linha, qualquer mudança de estratégia que reduz o custo de um jogador u também reduz o custo social.*

Prova. Iremos mostrar que o conjunto de nós afetados pela mudança de estratégia de u não podem aumentar o custo social. Supondo que a mudança de estratégia de u seja mover do cluster C_1 ao cluster C_2, usamos a notação $C_1^{-u} = C_1 - \{u\}$ e $C_2^{+u} = C_1 + \{u\}$ para nos referir ao estados dos dois clusters após a mudança de estratégia. Temos três grupos afetados pela mudança: os nós que ficam em C_1^{-u}, o próprio u e o nós que estavam em C_2. Pela definição do centroide sabemos que $c(C_1^{-u}) \leq c(C_1)$, então esse grupo não piora. Se u quer mudar de estratégia temos por definição que ele diminui seu custo, ou seja, $d(u, h(C_2^{+u})) < d(u, h(C_1))$.

Para os pontos de C_2 temos dois casos conforme a paridade de $|C_2|$. Se $|C_2|$ for ímpar, a mediana (que é única pela propriedade 1) continua sendo a centroide devido ao critério de desempate baseado em histórico e o custo dos pontos em C_2 não muda. Se $|C_2|$ for par ficamos entre três situações conforme a posição de u em relação a $h_L(C_2)$ e $h_R(C_2)$: u está a esquerda de $h_L(C_2)$ e o novo centroide é $h_L(C_2)$, ou u está entre $h_L(C_2)$ e $h_R(C_2)$ e o novo centroide é u, ou u está a direita de $h_R(C_2)$ e o novo centroide é $h_R(C_2)$. Pelo lema 2 sabemos que em todos os três casos o custo de C_2 é o mesmo. Como o custo de u reduz estritamente e a soma dos custos dos demais pontos não aumenta, temos então que o custo social reduz estritamente. □

Observamos que nesse caso não podemos usar o argumento do teorema 3 pois em geral não é verdade que $d(u, h(C_2)) < d(u, h(C_1))$. Contudo, chegamos na mesma conclusão: como o jogo é finito, o teorema 4 nos diz que uma dinâmica de respostas ótimas sempre diminui o custo social até chegar num equilíbrio puro de Nash. Similarmente temos o seguinte corolário quanto ao preço da estabilidade:

Corolário 3. *Para um espaço métrico em linha, o custo da estabilidade é 1.*

Prova. Análoga à prova do corolário 2, mas usando o teorema 4. □

References

[1] Jacques H Dreze and Joseph Greenberg. Hedonic coalitions: Optimality and stability. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pages 987–1003, 1980.

[2] Moran Feldman, Liane Lewin-Eytan, and Joseph Seffi Naor. Hedonic clustering games. *ACM Transactions on Parallel Computing*, 2(1):4, 2015.