Seminário De MO829:
Teoria Dos Jogos Aplicada Em Gerenciamento Pelo Lado Da Demanda Para Redes Elétricas Inteligentes

Yulle Glebbyo

IC/UNICAMP

1° semestre/2017

”A Game Theory Approach to Demand Side Management in Smart Grids”

Nadine Hajj **Mariette Awad**

Intelligent Systems’ 2014 (conference paper)
Springer International Publishing
2015. 807-819

Agenda

1. Redes Elétricas Inteligentes
2. Gerenciamento Pelo Lado Da Demanda
3. Definição E Modelagem Do Jogo
4. Equilíbrio Puro De Nash
5. Existência e Unicidade do Equilíbrio
6. Algoritmos
7. Resolução Analítica Dos Modelos De Otimização
8. Discussão E Conclusões

Redes Elétricas Inteligentes

Utilização da tecnologia da informação para tornar o sistema de distribuição e armazenamento de energia mais eficiente e confiável.

Redes Elétricas Inteligentes

Utilização da tecnologia da informação para tornar o sistema de distribuição e armazenamento de energia mais eficiente e confiável.

Nestes sistemas, podemos ter:

Redes Elétricas Inteligentes

Utilização da tecnologia da informação para tornar o sistema de distribuição e armazenamento de energia mais eficiente e confiável.

Nestes sistemas, podemos ter:

- Sistemas de armazenamento de energia em ambos os lados;

Redes Elétricas Inteligentes

Utilização da tecnologia da informação para tornar o sistema de distribuição e armazenamento de energia mais eficiente e confiável.

Nestes sistemas, podemos ter:

- Sistemas de armazenamento de energia em ambos os lados;
- Comunicação integrada entre provedor e consumidor;

Redes Elétricas Inteligentes

Utilização da tecnologia da informação para tornar o sistema de distribuição e armazenamento de energia mais eficiente e confiável.

Nestes sistemas, podemos ter:

- Sistemas de armazenamento de energia em ambos os lados;
- Comunicação integrada entre provedor e consumidor;
- Geração de energia distribuida;

Redes Elétricas Inteligentes

Utilização da tecnologia da informação para tornar o sistema de distribuição e armazenamento de energia mais eficiente e confiável.

Nestes sistemas, podemos ter:

- Sistemas de armazenamento de energia em ambos os lados;
- Comunicação integrada entre provedor e consumidor;
- Geração de energia distribuida;
- Utilização e armazenamento de energia limpa;

Redes Elétricas Inteligentes

Utilização da tecnologia da informação para tornar o sistema de distribuição e armazenamento de energia mais eficiente e confiável.

Nestes sistemas, podemos ter:

- Sistemas de armazenamento de energia em ambos os lados;
- Comunicação integrada entre provedor e consumidor;
- Geração de energia distribuida;
- Utilização e armazenamento de energia limpa;
- Medições de energia em tempo-real;

Redes Elétricas Inteligentes

Utilização da tecnologia da informação para tornar o sistema de distribuição e armazenamento de energia mais eficiente e confiável.

Nestes sistemas, podemos ter:

- Sistemas de armazenamento de energia em ambos os lados;
- Comunicação integrada entre provedor e consumidor;
- Geração de energia distribuida;
- Utilização e armazenamento de energia limpa;
- Medições de energia em tempo-real;
- Respostas de demanda e taxas de utilidade.

Redes Elétricas Inteligentes

Utilização da tecnologia da informação para tornar o sistema de distribuição e armazenamento de energia mais eficiente e confiável.

Nestes sistemas, podemos ter:

- Sistemas de armazenamento de energia em ambos os lados;
- Comunicação integrada entre provedor e consumidor;
- Geração de energia distribuida;
- Utilização e armazenamento de energia limpa;
- Medições de energia em tempo-real;
- Respostas de demanda e taxas de utilidade.

Gerenciamento Pelo Lado da Demanda

É alcançado através da utilização de sensores nos aparelhos capazes de medir suas demandas de consumo. É possível que um sinal seja enviado para interromper ou iniciar os aparelhos em qualquer momento.

Gerenciamento Pelo Lado da Demanda

É alcançado através da utilização de sensores nos aparelhos capazes de medir suas demandas de consumo. É possível que um sinal seja enviado para interromper ou iniciar os aparelhos em qualquer momento.

Desta forma, o provedor de energia consegue medir a demanda de energia de seus usuários em um determinado intervalo de tempo, e cobrar um preço proporcional a esta demanda.

Gerenciamento Pelo Lado da Demanda

É alcançado através da utilização de sensores nos aparelhos capazes de medir suas demandas de consumo. É possível que um sinal seja enviado para interromper ou iniciar os aparelhos em qualquer momento.

Desta forma, o provedor de energia consegue medir a demanda de energia de seus usuários em um determinado intervalo de tempo, e cobrar um preço proporcional a esta demanda.

Isto pode ser utilizado para minimizar os picos de consumo através do aumento dos preços para momentos de alta demanda, incentivando usuários a utilizar energia em outros momentos que sejam mais baratos, ou seja, momentos de demanda menor.

O Jogo Proposto

Jogadores:

O Jogo Proposto

Jogadores:

- N consumidores de energia conectados a rede elétrica;

O Jogo Proposto

Jogadores:

- N consumidores de energia conectados a rede elétrica;
- 1 provedor, empresa responsável pela geração e distribuição de energia.

O Jogo Proposto

Jogadores:

- N consumidores de energia conectados a rede elétrica;
- 1 provedor, empresa responsável pela geração e distribuição de energia.

Estratégias:

O Jogo Proposto

Jogadores:

- N consumidores de energia conectados a rede elétrica;
- 1 provedor, empresa responsável pela geração e distribuição de energia.

Estratégias:

- Consumidores:

O Jogo Proposto

Jogadores:

- N consumidores de energia conectados a rede elétrica;
- 1 provedor, empresa responsável pela geração e distribuição de energia.

Estratégias:

- Consumidores:
  - Definem uma demanda de consumo de energia para cada intervalo de tempo.

O Jogo Proposto

Jogadores:

- N consumidores de energia conectados a rede elétrica;
- 1 provedor, empresa responsável pela geração e distribuição de energia.

Estratégias:

- Consumidores:
  - Definem uma demanda de consumo de energia para cada intervalo de tempo.
- Provedor:

O Jogo Proposto

Jogadores:

- N consumidores de energia conectados a rede elétrica;
- 1 provedor, empresa responsável pela geração e distribuição de energia.

Estratégias:

- Consumidores:
  - Definem uma demanda de consumo de energia para cada intervalo de tempo.
- Provedor:
  - Define um preço baseado nas demandas dos consumidores para cada intervalo de tempo.

O Jogo Proposto

Jogadores:

- N consumidores de energia conectados a rede elétrica;
- 1 provedor, empresa responsável pela geração e distribuição de energia.

Estratégias:

- Consumidores:
  - Definem uma demanda de consumo de energia para cada intervalo de tempo.
- Provedor:
  - Define um preço baseado nas demandas dos consumidores para cada intervalo de tempo.

Objetivos/Utilidade:

O Jogo Proposto

Jogadores:

- N consumidores de energia conectados a rede elétrica;
- 1 provedor, empresa responsável pela geração e distribuição de energia.

Estratégias:

- Consumidores:
  - Definem uma demanda de consumo de energia para cada intervalo de tempo.
- Provedor:
  - Define um preço baseado nas demandas dos consumidores para cada intervalo de tempo.

Objetivos/Utilidade:

- Consumidores querem minimizar o preço pago pela energia que eles utilizam;

O Jogo Proposto

Jogadores:

- N consumidores de energia conectados a rede elétrica;
- 1 provedor, empresa responsável pela geração e distribuição de energia.

Estratégias:

- Consumidores:
  - Definem uma demanda de consumo de energia para cada intervalo de tempo.
- Provedor:
  - Define um preço baseado nas demandas dos consumidores para cada intervalo de tempo.

Objetivos/Utilidade:

- Consumidores querem minimizar o preço pago pela energia que eles utilizam;
- O provedor quer maximizar o lucro obtido e minimizar os picos de utilização.

O Jogo Proposto (Cont.)

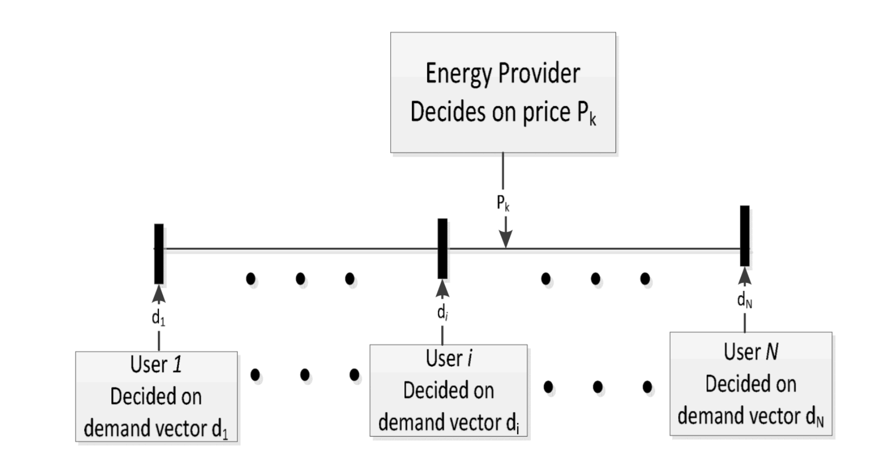

Figura: Configuração do Jogo

O Modelo

- N: número de consumidores da rede elétrica;

O Modelo

- N: número de consumidores da rede elétrica;
- K: número de intervalos de tempo para demanda;

O Modelo

- N: número de consumidores da rede elétrica;
- K: número de intervalos de tempo para demanda;
- d_{ik}: demanda de energia do consumidor i no intervalo de tempo k;

O Modelo

- N: número de consumidores da rede elétrica;
- K: número de intervalos de tempo para demanda;
- d_{ik}: demanda de energia do consumidor i no intervalo de tempo k;
- d^m: valor máximo que um cliente pode demandar em cada intervalo de tempo;

O Modelo

- N: número de consumidores da rede elétrica;
- K: número de intervalos de tempo para demanda;
- d_{ik}: demanda de energia do consumidor i no intervalo de tempo k;
- d^m: valor máximo que um cliente pode demandar em cada intervalo de tempo;
- E^m: capacidade máxima de geração de energia da rede elétrica em um intervalo de tempo;

O Modelo

- N: número de consumidores da rede elétrica;
- K: número de intervalos de tempo para demanda;
- d_{ik}: demanda de energia do consumidor i no intervalo de tempo k;
- d^m: valor máximo que um cliente pode demandar em cada intervalo de tempo;
- E^m: capacidade máxima de geração de energia da rede elétrica em um intervalo de tempo;
- p_k: preço que deve ser pago por unidade de energia no intervalo k;

O Modelo

- N: número de consumidores da rede elétrica;
- K: número de intervalos de tempo para demanda;
- d_{ik}: demanda de energia do consumidor i no intervalo de tempo k;
- d^m: valor máximo que um cliente pode demandar em cada intervalo de tempo;
- E^m: capacidade máxima de geração de energia da rede elétrica em um intervalo de tempo;
- p_k: preço que deve ser pago por unidade de energia no intervalo k;
- $\alpha_k > 0$: constante relativa ao objetivo do provedor;

O Modelo

- N: número de consumidores da rede elétrica;
- K: número de intervalos de tempo para demanda;
- d_{ik}: demanda de energia do consumidor i no intervalo de tempo k;
- d^m: valor máximo que um cliente pode demandar em cada intervalo de tempo;
- E^m: capacidade máxima de geração de energia da rede elétrica em um intervalo de tempo;
- p_k: preço que deve ser pago por unidade de energia no intervalo k;
- $\alpha_k > 0$: constante relativa ao objetivo do provedor;
- $\beta_i > 0$: constante relativa à utilidade de cada consumidor.

O Modelo (Cont.)

O custo do consumidor i pode ser modelado como:

$$C_i(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} (\beta_i d_{ik}^2 - d_{ik} p_k)$$

O Modelo (Cont.)

O custo do consumidor i pode ser modelado como:

$$C_i(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} (\beta_i d_{ik}^2 - d_{ik} p_k)$$

contando que as seguintes condições sejam satisfeitas:

O Modelo (Cont.)

O custo do consumidor i pode ser modelado como:

$$C_i(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} (\beta_i d_{ik}^2 - d_{ik} p_k)$$

contando que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$\begin{cases} 0 \leq d_{ik} \leq d^m \\ \sum_{i=1}^{N} d_{ik} \leq E^m \end{cases}$$

O Modelo (Cont.)

O custo do consumidor i pode ser modelado como:

$$C_i(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} (\beta_i d_{ik}^2 - d_{ik} p_k)$$

contando que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$\begin{cases} 0 \leq d_{ik} \leq d^m \\ \sum_{i=1}^{N} d_{ik} \leq E^m \end{cases}$$

E a utilidade do provedor é dada por:

O Modelo (Cont.)

O custo do consumidor i pode ser modelado como:

$$C_i(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} (\beta_i d_{ik}^2 - d_{ik} p_k)$$

contando que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$\begin{cases} 0 \leq d_{ik} \leq d^m \\ \sum_{i=1}^{N} d_{ik} \leq E^m \end{cases}$$

E a utilidade do provedor é dada por:

$$U_p(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} (-\alpha_k p_k^2 + p_k d_{ik} + PAR \cdot p_k)$$

O Modelo (Cont.)

O custo do consumidor i pode ser modelado como:

$$C_i(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} (\beta_i d_{ik}^2 - d_{ik} p_k)$$

contando que as seguintes condições sejam satisfeitas:

$$\begin{cases} 0 \leq d_{ik} \leq d^m \\ \sum_{i=1}^{N} d_{ik} \leq E^m \end{cases}$$

E a utilidade do provedor é dada por:

$$U_p(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} (-\alpha_k p_k^2 + p_k d_{ik} + PAR \cdot p_k)$$

considerando

$$PAR = \frac{\max_k \sum_{i=1}^{N} d_{ik}}{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} d_{ik}}$$

Equilíbrio Puro de Nash

Relembrando o que é um equilíbrio:

Equilíbrio Puro de Nash

Relembrando o que é um equilíbrio:

$$u_i(a^*) \geq u_i(a_i, a^*_{-i}) \qquad \forall a_i, i$$

Equilíbrio Puro de Nash

Relembrando o que é um equilíbrio:

$$u_i(a^*) \geq u_i(a_i, a^*_{-i}) \qquad \forall a_i, i$$

Em nosso jogo, um equilíbrio é dado por uma estratégia (d^*, p^*) tal que:

Equilíbrio Puro de Nash

Relembrando o que é um equilíbrio:

$$u_i(a^*) \geq u_i(a_i, a^*_{-i}) \qquad \forall a_i, i$$

Em nosso jogo, um equilíbrio é dado por uma estratégia (d^*, p^*) tal que:

$$\begin{cases} C_i(d_i^*, p_k^*) \leq C_i(d_i, p_k^*) & \forall d_i, i \\ U_p(d_i^*, p_k^*) \geq U_p(d_i^*, p_k) & \forall p_k \end{cases}$$

Equilíbrio Puro de Nash (Cont.)

Teorema: O equilíbrio do jogo proposto é a interseção das soluções ótimas de dois problemas de otimização.

Equilíbrio Puro de Nash (Cont.)

Teorema: O equilíbrio do jogo proposto é a interseção das soluções ótimas de dois problemas de otimização.

Para os consumidores, temos:

Equilíbrio Puro de Nash (Cont.)

Teorema: O equilíbrio do jogo proposto é a interseção das soluções ótimas de dois problemas de otimização.

Para os consumidores, temos:

$$C_i(d_i^*, p_k^*) \leq C_i(d_i, p_k^*)$$
$$\sum_{k=1}^{K}(\beta_i d_{ik}^{*2} + d_{ik}^* p_k^*) \leq \sum_{k=1}^{K}(\beta_i d_{ik}^2 + d_{ik} p_k^*)$$

Equilíbrio Puro de Nash (Cont.)

Teorema: O equilíbrio do jogo proposto é a interseção das soluções ótimas de dois problemas de otimização.

Para os consumidores, temos:

$$C_i(d_i^*, p_k^*) \leq C_i(d_i, p_k^*)$$

$$\sum_{k=1}^{K}(\beta_i d_{ik}^{*2} + d_{ik}^* p_k^*) \leq \sum_{k=1}^{K}(\beta_i d_{ik}^2 + d_{ik} p_k^*)$$

Que pode ser reescrito como:

Equilíbrio Puro de Nash (Cont.)

Teorema: O equilíbrio do jogo proposto é a interseção das soluções ótimas de dois problemas de otimização.

Para os consumidores, temos:

$$C_i(d_i^*, p_k^*) \leq C_i(d_i, p_k^*)$$
$$\sum_{k=1}^{K} (\beta_i d_{ik}^{*2} + d_{ik}^* p_k^*) \leq \sum_{k=1}^{K} (\beta_i d_{ik}^2 + d_{ik} p_k^*)$$

Que pode ser reescrito como:

$$\min_{d_{ik}} \sum_{k=1}^{k} (\beta_i d_{ik}^2 + d_{ik} p_k^*)$$

Equilíbrio Puro de Nash (Cont.)

Teorema: O equilíbrio do jogo proposto é a interseção das soluções ótimas de dois problemas de otimização.

Equilíbrio Puro de Nash (Cont.)

Teorema: O equilíbrio do jogo proposto é a interseção das soluções ótimas de dois problemas de otimização.

E para o provedor, temos:

Equilíbrio Puro de Nash (Cont.)

Teorema: O equilíbrio do jogo proposto é a interseção das soluções ótimas de dois problemas de otimização.

E para o provedor, temos:

$$U_p(d_i^*, p_k^*) \geq U_p(d_i^*, p_k)$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N}(-\alpha_k p_k^{*2} + p_k^* d_{ik}^* + PAR \cdot p_k^*) \geq \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N}(-\alpha_k p_k^2 + p_k d_i^* ik + PAR \cdot p_k)$$

Equilíbrio Puro de Nash (Cont.)

Teorema: O equilíbrio do jogo proposto é a interseção das soluções ótimas de dois problemas de otimização.

E para o provedor, temos:

$$U_p(d_i^*, p_k^*) \geq U_p(d_i^*, p_k)$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N}(-\alpha_k p_k^{*2} + p_k^* d_{ik}^* + PAR \cdot p_k^*) \geq \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N}(-\alpha_k p_k^2 + p_k d_i^* ik + PAR \cdot p_k)$$

Que pode ser reescrito como:

Equilíbrio Puro de Nash (Cont.)

Teorema: O equilíbrio do jogo proposto é a interseção das soluções ótimas de dois problemas de otimização.

E para o provedor, temos:

$$U_p(d_i^*, p_k^*) \geq U_p(d_i^*, p_k)$$

$$\sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N}(-\alpha_k p_k^{*2} + p_k^* d_{ik}^* + PAR \cdot p_k^*) \geq \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=1}^{N}(-\alpha_k p_k^2 + p_k d_i^* ik + PAR \cdot p_k)$$

Que pode ser reescrito como:

$$\max_{p_k} \sum_{i=1}^{N}(-\alpha_k p_k^2 + p_k d_i^* ik + PAR \cdot p_k)$$

Existência e Unicidade do Equilíbrio

Como podemos perceber, a função de utilidade do provedor é côncava em relação a p_k:

Existência e Unicidade do Equilíbrio

Como podemos perceber, a função de utilidade do provedor é côncava em relação a p_k:

$$U_p(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} (-\alpha_k p_k^2 + p_k d_{ik} + PAR \cdot p_k)$$

Existência e Unicidade do Equilíbrio

Como podemos perceber, a função de utilidade do provedor é côncava em relação a p_k:

$$U_p(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} (-\alpha_k p_k^2 + p_k d_{ik} + PAR \cdot p_k)$$

De maneira semelhante, temos que a função de custo dos consumidores é convexa em relação a d_i, resultando em uma função de utilidade côncava para os consumidores:

Existência e Unicidade do Equilíbrio

Como podemos perceber, a função de utilidade do provedor é côncava em relação a p_k:

$$U_p(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} (-\alpha_k p_k^2 + p_k d_{ik} + PAR \cdot p_k)$$

De maneira semelhante, temos que a função de custo dos consumidores é convexa em relação a d_i, resultando em uma função de utilidade côncava para os consumidores:

$$C_i(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} (\beta_i d_{ik}^2 - d_{ik} p_k)$$

$$U_i(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} -\beta_i d_{ik}^2 + d_{ik} p_k$$

Existência e Unicidade do Equilíbrio (Cont.)

[Rosen, 1965. Theorem 1] Mostra que para todo jogo com n jogadores, onde as funções de utilidade de cada um destes jogadores são côncavas em relação a suas próprias estratégias, este jogo jogo possui um ponto de equilíbrio puro.

Existência e Unicidade do Equilíbrio (Cont.)

[Rosen, 1965. Theorem 1] Mostra que para todo jogo com n jogadores, onde as funções de utilidade de cada um destes jogadores são côncavas em relação a suas próprias estratégias, este jogo jogo possui um ponto de equilíbrio puro.

[Rosen, 1965. Theorems 2,3,4] Mostra que se as funções de utilidade para estes jogadores são estritamente côncavas, então este ponto de equilíbrio é único.

Existência e Unicidade do Equilíbrio (Cont.)

[Rosen, 1965. Theorem 1] Mostra que para todo jogo com n jogadores, onde as funções de utilidade de cada um destes jogadores são côncavas em relação a suas próprias estratégias, este jogo jogo possui um ponto de equilíbrio puro.

[Rosen, 1965. Theorems 2,3,4] Mostra que se as funções de utilidade para estes jogadores são estritamente côncavas, então este ponto de equilíbrio é único.

Prova:

Existência e Unicidade do Equilíbrio (Cont.)

[Rosen, 1965. Theorem 1] Mostra que para todo jogo com n jogadores, onde as funções de utilidade de cada um destes jogadores são côncavas em relação a suas próprias estratégias, este jogo jogo possui um ponto de equilíbrio puro.

[Rosen, 1965. Theorems 2,3,4] Mostra que se as funções de utilidade para estes jogadores são estritamente côncavas, então este ponto de equilíbrio é único.

Prova: Ver referência:
Rosen, J. Ben. *”Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games.”* Econometrica: Journal of the Econometric Society (1965): 520-534.

Existência e Unicidade do Equilíbrio (Cont.)

Portanto, como U_p é côncava em relação a p_k e U_i é côncava em relação a d_i para todo i, então este jogo sempre terá um ponto de equilíbrio como resultado direto de [Rosen, 1965. Theorem 1]

.

Existência e Unicidade do Equilíbrio (Cont.)

Portanto, como U_p é côncava em relação a p_k e U_i é côncava em relação a d_i para todo i, então este jogo sempre terá um ponto de equilíbrio como resultado direto de [Rosen, 1965. Theorem 1]

Além disso, como $\alpha_k > 0$, então U_p é estritamente côncava em relação a p_k. De maneira semelhante, temos que $\beta_i > 0$, então U_i também é estritamente côncava para todo i. Logo, existe apenas um ponto de equilíbrio para este jogo, de acordo com [Rosen, 1965. Theorems 2,3,4].

Algoritmos

Algorithm Executed by Energy Supplier

1. Initialization
2. Repeat
   a. For each time slot $k \in K$
      - Compute the best price p_k^* using (21)
      - Broadcast p_k

   b. Receive demand vectors d_i for all users
3. Until convergence

Figura: Algoritmo do Produtor

Algoritmos

Algorithm Executed by Consumers
1. Initialization
2. For each time slot $k \in K$
a. Receive the broadcasted price p_k
b. Update demand value $d_{i,k}$ using (21)
c. Communicate value to network
3. End

Figura: Algoritmo do Consumidor

Resolução Analítica dos Modelos

Problema de Minimização do Custo: Considerando um preço fixo p_k para cada k, e a estratégia fixa de todos os outros consumidores como d_{-i}. A melhor estratégia para o jogador i é dada pelo programa:

Resolução Analítica dos Modelos

Problema de Minimização do Custo: Considerando um preço fixo p_k para cada k, e a estratégia fixa de todos os outros consumidores como d_{-i}. A melhor estratégia para o jogador i é dada pelo programa:

$$\begin{aligned}
\max_{d_{ik}} & -(\beta_i d_{ik}^2 + d_{ik} p_k) \\
\text{s.t.} \quad & d_{ik} \geq 0 \\
& d^m - d_{ik} \geq 0 \\
& E^m - \sum_{j=1, j\neq i}^{N} d_{jk} - d_{ik} \geq 0
\end{aligned}$$

Resolução Analítica dos Modelos (Cont.)

Este modelo pode ser resolvido através dos multiplicadores de Lagrange e as condições de KKT.

Resolução Analítica dos Modelos (Cont.)

Este modelo pode ser resolvido através dos multiplicadores de Lagrange e as condições de KKT.

Basta construir a seguinte Lagrangeana:

Resolução Analítica dos Modelos (Cont.)

Este modelo pode ser resolvido através dos multiplicadores de Lagrange e as condições de KKT.

Basta construir a seguinte Lagrangeana:

$$L_i(d_{ik}, \lambda_1, \lambda_2) = -(\beta_i d_{ik}^2 + d_{ik} p_k) + \lambda_1 (d^m - d_{ik}) + \lambda_2 (E^m - \sum_{i=1}^{N} d_{ik})$$

Resolução Analítica dos Modelos (Cont.)

Este modelo pode ser resolvido através dos multiplicadores de Lagrange e as condições de KKT.

Basta construir a seguinte Lagrangeana:

$$L_i(d_{ik}, \lambda_1, \lambda_2) = -(\beta_i d_{ik}^2 + d_{ik} p_k) + \lambda_1 (d^m - d_{ik}) + \lambda_2 (E^m - \sum_{i=1}^{N} d_{ik})$$

A solução do problema original é dada através da maximização de L_i em relação a d_{ik} e minimização de L_i em relação as variáveis λ, respeitando as condições de KKT.

Resolução Analítica dos Modelos (Cont.)

A partir disso, as autoras consideram quatro casos:

Resolução Analítica dos Modelos (Cont.)

A partir disso, as autoras consideram quatro casos:

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: Neste caso a demanda é dada por $\frac{p_k}{2\beta_i}$ com valor objetivo 0;

Resolução Analítica dos Modelos (Cont.)

A partir disso, as autoras consideram quatro casos:

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: Neste caso a demanda é dada por $\frac{p_k}{2\beta_i}$ com valor objetivo 0;
- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$: Resulta em uma solução inviável, pois existiria algum outro jogador excedendo sua demanda máxima;

Resolução Analítica dos Modelos (Cont.)

A partir disso, as autoras consideram quatro casos:

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: Neste caso a demanda é dada por $\frac{p_k}{2\beta_i}$ com valor objetivo 0;
- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$: Resulta em uma solução inviável, pois existiria algum outro jogador excedendo sua demanda máxima;
- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$: Resulta em uma solução inviável, pois a soma das demandas é maior que a capacidade de produção;

Resolução Analítica dos Modelos (Cont.)

A partir disso, as autoras consideram quatro casos:

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: Neste caso a demanda é dada por $\frac{p_k}{2\beta_i}$ com valor objetivo 0;
- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$: Resulta em uma solução inviável, pois existiria algum outro jogador excedendo sua demanda máxima;
- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$: Resulta em uma solução inviável, pois a soma das demandas é maior que a capacidade de produção;
- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$: A demanda é d^m, resultando em um objetivo negativo.

Resolução Analítica dos Modelos (Cont.)

A partir disso, as autoras consideram quatro casos:

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: Neste caso a demanda é dada por $\frac{p_k}{2\beta_i}$ com valor objetivo 0;
- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$: Resulta em uma solução inviável, pois existiria algum outro jogador excedendo sua demanda máxima;
- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$: Resulta em uma solução inviável, pois a soma das demandas é maior que a capacidade de produção;
- $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$: A demanda é d^m, resultando em um objetivo negativo.

Portanto, a estratégia ótima para o jogador i é escolher $d_{ik} = \frac{p_k}{2\beta_i}$.

Resolução Analítica dos Modelos (Cont.)

Problema de Maximização do Lucro: Considerando as estratégias de todos os consumidores como fixa em d, a melhor estratégia do provedor é dada pelo seguinte problema de otimização:

Resolução Analítica dos Modelos (Cont.)

Problema de Maximização do Lucro: Considerando as estratégias de todos os consumidores como fixa em d, a melhor estratégia do provedor é dada pelo seguinte problema de otimização:

$$\max_{p_k} f(p_k) = \sum_{i=1}^{N} (-\alpha_k p_k^2 + p_k d_{ik} + PAR \cdot p_k)$$

Resolução Analítica dos Modelos (Cont.)

Problema de Maximização do Lucro: Considerando as estratégias de todos os consumidores como fixa em d, a melhor estratégia do provedor é dada pelo seguinte problema de otimização:

$$\max_{p_k} f(p_k) = \sum_{i=1}^{N} (-\alpha_k p_k^2 + p_k d_{ik} + PAR \cdot p_k)$$

A solução ótima para este é problema é dada pelo ponto onde a derivada desta função é igual a zero:

Resolução Analítica dos Modelos (Cont.)

Problema de Maximização do Lucro: Considerando as estratégias de todos os consumidores como fixa em d, a melhor estratégia do provedor é dada pelo seguinte problema de otimização:

$$\max_{p_k} f(p_k) = \sum_{i=1}^{N} (-\alpha_k p_k^2 + p_k d_{ik} + PAR \cdot p_k)$$

A solução ótima para este é problema é dada pelo ponto onde a derivada desta função é igual a zero:

$$\frac{\partial f(p_k)}{\partial p_k} = 0 \implies \sum_{i=1}^{N} (-2\alpha_k p_k + d_{ik} + PAR) = 0$$

$$\implies p_k = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_{ik} + PAR}{2\alpha_k}$$

Discussão e Conclusões

U_p e C_i são artificialmente projetadas para satisfazer as condições de concavidade, e não são justificadas economicamente:

Discussão e Conclusões

U_p e C_i são artificialmente projetadas para satisfazer as condições de concavidade, e não são justificadas economicamente:

$$U_p(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} (-\alpha_k p_k^2 + p_k d_{ik} + PAR \cdot p_k)$$

$$C_i(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} (\beta_i d_{ik}^2 - d_{ik} p_k)$$

Discussão e Conclusões (Cont.)

Inconsistência de definição de C_i de maneira conveniente:

Discussão e Conclusões (Cont.)

Inconsistência de definição de C_i de maneira conveniente:

$$C_i(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K}(\beta_i d_{ik}^2 - d_{ik}p_k)$$

$$U_i(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} -(\beta_i d_{ik}^2 + d_{ik}p_k)$$

Discussão e Conclusões (Cont.)

Uso desnecessário de KKT e multiplicadores de Lagrange para resolver o problema de minimização de custos.

Discussão e Conclusões (Cont.)

Uso desnecessário de KKT e multiplicadores de Lagrange para resolver o problema de minimização de custos.

No problema de minimização de custo, procura-se o ponto que maximiza uma parábola de concavidade para baixo.

Discussão e Conclusões (Cont.)

As autoras concluem que a estratégia ótima para cada consumidor i é:

Discussão e Conclusões (Cont.)

As autoras concluem que a estratégia ótima para cada consumidor i é:

- $d_{ik} = \frac{p_k}{2\beta_i}$

Discussão e Conclusões (Cont.)

As autoras concluem que a estratégia ótima para cada consumidor i é:

- $d_{ik} = \frac{p_k}{2\beta_i}$

E a estratégia ótima para o provedor é:

Discussão e Conclusões (Cont.)

As autoras concluem que a estratégia ótima para cada consumidor i é:

- $d_{ik} = \frac{p_k}{2\beta_i}$

E a estratégia ótima para o provedor é:

- $p_k = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_{ik} + PAR}{2\alpha_k}$

Discussão e Conclusões (Cont.)

As autoras concluem que a estratégia ótima para cada consumidor i é:

- $d_{ik} = \frac{p_k}{2\beta_i}$ cresce com o preço!

E a estratégia ótima para o provedor é:

- $p_k = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_{ik} + PAR}{2\alpha_k}$

Discussão e Conclusões (Cont.)

As autoras concluem que a estratégia ótima para cada consumidor i é:

- $d_{ik} = \frac{p_k}{2\beta_i}$ cresce com o preço!

E a estratégia ótima para o provedor é:

- $p_k = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_{ik} + PAR}{2\alpha_k}$ cresce com a demanda e PAR

Discussão e Conclusões (Cont.)

Alternativamente, poderíamos considerar um modelo que define o custo de cada consumidor i como:

Discussão e Conclusões (Cont.)

Alternativamente, poderíamos considerar um modelo que define o custo de cada consumidor i como:

$$C_i(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} -\beta_i d_{ik}^2 + d_{ik} p_k$$

Discussão e Conclusões (Cont.)

Alternativamente, poderíamos considerar um modelo que define o custo de cada consumidor i como:

$$C_i(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} -\beta_i d_{ik}^2 + d_{ik} p_k$$

Neste caso, a estratégia ótima de i seria: $d_{ik} = \frac{-p_k}{2\beta_i}$, em que o usuário só aumenta sua demanda quando p_k é negativo.

Discussão e Conclusões (Cont.)

Alternativamente, poderíamos considerar um modelo que define o custo de cada consumidor i como:

$$C_i(d_i, p_k) = \sum_{k=1}^{K} -\beta_i d_{ik}^2 + d_{ik} p_k$$

Neste caso, a estratégia ótima de i seria: $d_{ik} = \frac{-p_k}{2\beta_i}$, em que o usuário só aumenta sua demanda quando p_k é negativo.

Entretanto, isso resultaria em uma função de utilidade convexa para cada consumidor i em relação a sua própria demanda, logo, não poderíamos concluir nada sobre a existência ou unicidade do equilíbrio.

Yulle Glebbyo

glebbyo@ic.unicamp.br

IC/UNICAMP