

Resumo do artigo "Maximizing the Spread of Influence through a Social Network"

Autores: David Kempe, Jon Kleinberg e Éva Tardos

Kleber Oliveira

Seminário MO829
Teoria dos Jogos Algoritmica

20 de junho de 2017

Agenda

- 1 Problema
- 2 Modelos
 - Modelo de Limiar
 - Modelo de Cascata
 - Equivalência
- 3 Algoritmo
- 4 Experimentos
- 5 Referências

Problema

”Selecionar os k indivíduos que desencadeiam a maior cascata de adoções de uma determinada inovação ou produto numa rede”

Contexto

- Problema posto por Pedro Domingos e Matthew Richardson na conferência Knowledge Discovery and Data Mining (KDD) de 2001 e 2002

Contexto

- Problema posto por Pedro Domingos e Matthew Richardson na conferência Knowledge Discovery and Data Mining (KDD) de 2001 e 2002
- Compilação de trabalhos feitos anteriormente:
 - Paper de mesmo nome na KDD de 2003
 - "Influential nodes in a diffusion model for social networks" publicado no International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (ICALP) em 2005

Formulação original

- Há uma variável aleatória X para cada pessoa, associada a um nó na rede social, que indica se ela aderiu ao produto ou não

Formulação original

- Há uma variável aleatória X para cada pessoa, associada a um nó na rede social, que indica se ela aderiu ao produto ou não
- Campo aleatório de Markov: a aderência depende do que os vizinhos fazem

Formulação original

- Há uma variável aleatória X para cada pessoa, associada a um nó na rede social, que indica se ela aderiu ao produto ou não
- Campo aleatório de Markov: a aderência depende do que os vizinhos fazem
- Existe também uma ação de marketing correspondente para cada pessoa

Formulação original

- Há uma variável aleatória X para cada pessoa, associada a um nó na rede social, que indica se ela aderiu ao produto ou não
- Campo aleatório de Markov: a aderência depende do que os vizinhos fazem
- Existe também uma ação de marketing correspondente para cada pessoa
- Encontrar um vetor de ações que maximiza a receita obtida pelo resultado de todos os X

Formalização

Considere uma rede social caracterizada por um grafo direcionado $G(V, E)$.

Dado um timestamp t , há um conjunto $A_t \in V$ de nós *ativos*.

De t para $t + 1$, mais nós podem se tornar ativos, de acordo com o processo de difusão. Se de t' para $t' + 1$ nenhum nó se tornou ativo, diremos que a difusão parou e o resultado do processo é o conjunto $A_{t'}$.

Formalização

Considere uma rede social caracterizada por um grafo direcionado $G(V, E)$.

Dado um timestamp t , há um conjunto $A_t \in V$ de nós *ativos*.

De t para $t + 1$, mais nós podem se tornar ativos, de acordo com o processo de difusão. Se de t' para $t' + 1$ nenhum nó se tornou ativo, diremos que a difusão parou e o resultado do processo é o conjunto $A_{t'}$.

Definimos a *influência* $\sigma(A)$ sobre um conjunto inicial $A = A_0$ como o tamanho esperado do resultado $A_{t'}$, ou $\sigma(A) = \mathbb{E}[|A_{t'}|]$.

O **problema de maximização da influência** consiste em, dado um parâmetro k , encontrar um conjunto inicial A de tamanho k que maximiza $\sigma(A)$.

Modelos

- Consideraremos o caso progressivo no qual os nós podem mudar apenas de inativos para ativos.

Modelos

- Consideraremos o caso progressivo no qual os nós podem mudar apenas de inativos para ativos.
- A regra probabilística que torna um nó ativo a partir de outros ativos será formulada para dois modelos estocásticos diferentes: o **modelo de limiar** (*threshold model*) e o **modelo de cascata**.

Modelos

- Consideraremos o caso progressivo no qual os nós podem mudar apenas de inativos para ativos.
- A regra probabilística que torna um nó ativo a partir de outros ativos será formulada para dois modelos estocásticos diferentes: o **modelo de limiar** (*threshold model*) e o **modelo de cascata**.
- Estabeleceremos a dificuldade do problema em cada modelo e a equivalência dos dois.

Modelo de Limiar

- Origem na sociologia matemática (Mark Granovetter e Thomas Schelling)

Modelo de Limiar

- Origem na sociologia matemática (Mark Granovetter e Thomas Schelling)
- Neste modelo, cada nó acumula influência exercida pelos vizinhos ativos

Modelo de Limiar

- Origem na sociologia matemática (Mark Granovetter e Thomas Schelling)
- Neste modelo, cada nó acumula influência exercida pelos vizinhos ativos
- Quando este acúmulo atinge um *limiar*, o nó se torna ativo

Modelo de Limiar

O nó u recebe influência de um vizinho v de acordo com um peso $b_{u,v} \in [0, 1]$.

Modelo de Limiar

O nó u recebe influência de um vizinho v de acordo com um peso $b_{u,v} \in [0, 1]$. Cada nó tem um limiar θ_u (também entre 0 e 1) e é ativado se e somente se:

$$\sum_{v \in S} b_{u,v} \geq \theta_u,$$

onde S é o conjunto dos nós *ativos* com arestas incidentes em u .

Modelo de Limiar

O nó u recebe influência de um vizinho v de acordo com um peso $b_{u,v} \in [0, 1]$. Cada nó tem um limiar θ_u (também entre 0 e 1) e é ativado se e somente se:

$$\sum_{v \in S} b_{u,v} \geq \theta_u,$$

onde S é o conjunto dos nós *ativos* com arestas incidentes em u .

Este modelo é chamado de modelo de limiar linear, pois a influência é acumulada linearmente.

Modelo de Limiar

O nó u recebe influência de um vizinho v de acordo com um peso $b_{u,v} \in [0, 1]$. Cada nó tem um limiar θ_u (também entre 0 e 1) e é ativado se e somente se:

$$\sum_{v \in S} b_{u,v} \geq \theta_u,$$

onde S é o conjunto dos nós *ativos* com arestas incidentes em u .

Este modelo é chamado de modelo de limiar linear, pois a influência é acumulada linearmente. **Mas como obter os valores dos pesos e limiares?**

Modelo de Limiar

- O artigo não fala sobre como determinar os pesos $b_{u,v}$.

Modelo de Limiar

- O artigo não fala sobre como determinar os pesos $b_{u,v}$.
- Por outro lado, os limiares θ_u podem ser modelados de três maneiras:
 - θ_u constante $\forall u$
 - θ_u fornecido como entrada do problema
 - θ_u uniformemente aleatório

Modelo de Limiar

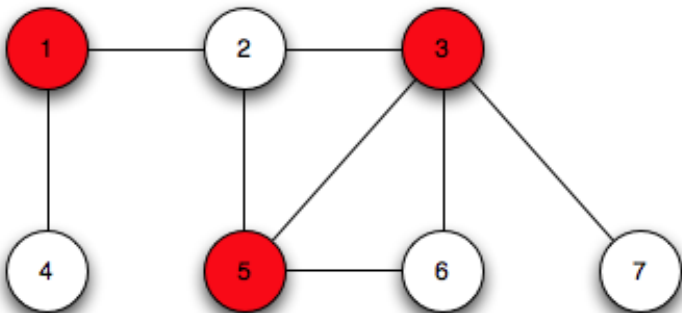
- O artigo não fala sobre como determinar os pesos $b_{u,v}$.
- Por outro lado, os limiares θ_u podem ser modelados de três maneiras:
 - θ_u constante $\forall u$
 - θ_u fornecido como entrada do problema
 - θ_u uniformemente aleatório ← **único caso tratável**

Modelo de Limiar Linear

Teorema

O problema de maximização de influência é NP-difícil para o modelo de limiar linear.

Prova: Reduziremos o problema de maximização de influência ao problema de **cobertura de vértices**.



Definição

Uma *cobertura de vértices* é um conjunto $S \subseteq V$ tal que $u \in S$ ou $v \in S$, $\forall \{u, v\} \in E$.

O problema de cobertura de vértices consiste em, dado um k , decidir se há uma cobertura de vértices de tamanho no máximo k . Este é um problema NP-completo.

O problema de cobertura de vértices consiste em, dado um k , decidir se há uma cobertura de vértices de tamanho no máximo k . Este é um problema NP-completo.

Agora, considere uma instância deste problema definida por um grafo não-direcionado $G(V, E)$ e um inteiro k .

O problema de cobertura de vértices consiste em, dado um k , decidir se há uma cobertura de vértices de tamanho no máximo k . Este é um problema NP-completo.

Agora, considere uma instância deste problema definida por um grafo não-direcionado $G(V, E)$ e um inteiro k .

Definimos uma instância correspondente a essa no problema de maximização de influência fazendo:

- Todas as arestas $\{u, v\}$ vão nas duas direções
- $b_{u,v} = \frac{1}{\text{grau}(v)}$
- Se há uma cobertura de vértices S de tamanho k , tome o conjunto inicial $A = S \implies \sigma(A) = n$ deterministicamente

Precisamos agora seguir no sentido oposto.

Se algum par de nós adjacentes não tem nó no conjunto inicial A , então conforme limiares próximos de 1 são sorteados, estes nós poderão ficar inativos $\implies \sigma(A) < n$

Precisamos agora seguir no sentido oposto.

Se algum par de nós adjacentes não tem nó no conjunto inicial A , então conforme limiares próximos de 1 são sorteados, estes nós poderão ficar inativos $\implies \sigma(A) < n$

Nessa situação, ou não há cobertura S na instância do problema de cobertura de vértices, ou A não é ótimo.

Modelo de Limiar Geral

Note que, no modelo linear, um nó é ativado se $\sum_{v \in S} b_{u,v}$ excede o limiar θ_u . Chamamos

$$f_u(S) = \sum_{v \in S} b_{u,v}$$

de **função de ativação**. Mas podemos definir outras funções de ativação!

Modelo de Limiar Geral

Note que, no modelo linear, um nó é ativado se $\sum_{v \in S} b_{u,v}$ excede o limiar θ_u . Chamamos

$$f_u(S) = \sum_{v \in S} b_{u,v}$$

de **função de ativação**. Mas podemos definir outras funções de ativação!

Basta que $f_u(S)$ seja qualquer função monótona e que $f_u(\emptyset) = 0$. Em particular, há uma classe de funções que nos dão garantia de boas aproximações: as funções submodulares. Todas as funções f tais que

$$f(S \cup \{v\}) - f(S) \geq f(T \cup \{v\}) - f(T),$$

para todo $v \in V$ e $S \subseteq T$, são submodulares. Retomaremos esta classe de funções mais tarde.

Modelo de Cascata

- Origem da teoria da probabilidade (Richard Durrett e Thomas Liggett)

Modelo de Cascata

- Origem da teoria da probabilidade (Richard Durrett e Thomas Liggett)
- Quando um nó se torna ativo, há uma chance de ativar cada um de seus vizinhos inativos

Modelo de Cascata

- Origem da teoria da probabilidade (Richard Durrett e Thomas Liggett)
- Quando um nó se torna ativo, há uma chance de ativar cada um de seus vizinhos inativos
- A chance independe do que aconteceu anteriormente: isto é o mesmo de dizer que se trata de um processo markoviano (sem memória)

Modelo de Cascata

Considere um conjunto inicial A_0 de nós ativos. O processo segue em passos discretos:

Se o nó u se tornou ativo no tempo t , então ele pode ativar cada um dos seus vizinhos v com probabilidade $p_{u,v}$.

Modelo de Cascata

Considere um conjunto inicial A_0 de nós ativos. O processo segue em passos discretos:

Se o nó u se tornou ativo no tempo t , então ele pode ativar cada um dos seus vizinhos v com probabilidade $p_{u,v}$.

As **probabilidades de ativação** são parâmetros do sistema. Chamamos este modelo de modelo de cascata independente.

Caso obtenha êxito em ser ativado, um vizinho se tornará ativo no tempo $t + 1$.

Modelo de Cascata

Considere um conjunto inicial A_0 de nós ativos. O processo segue em passos discretos:

Se o nó u se tornou ativo no tempo t , então ele pode ativar cada um dos seus vizinhos v com probabilidade $p_{u,v}$.

As **probabilidades de ativação** são parâmetros do sistema. Chamamos este modelo de modelo de cascata independente.

Caso obtenha êxito em ser ativado, um vizinho se tornará ativo no tempo $t + 1$.

Do tempo $t + 1$ em diante, o nó u não poderá ativar mais ninguém. A difusão segue até que não haja mais nenhuma ativação.

Modelo de Cascata Independente

Teorema

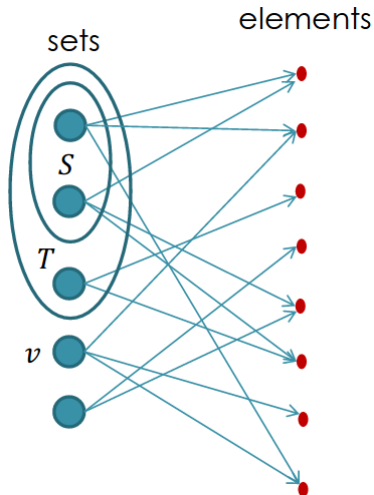
A aproximação do problema de maximização de influência por um fator melhor que $1 - \frac{1}{e}$ é NP-difícil pelo modelo de cascata independente.

Prova: Reduziremos o problema de maximização de influência ao problema de **máxima cobertura**.

Seja uma coleção S_1, S_2, \dots, S_m de subconjuntos de $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

No problema de máxima cobertura, devemos selecionar k subconjuntos que maximizam o tamanho da sua união, para dado um parâmetro k .

Este é um problema NP-difícil.



Tome uma instância do problema de máxima cobertura definida pelos subconjuntos S_j e elementos $u_i \in U$ e parâmetro k , com $j \in \{1, \dots, m\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ e $k < n < m$.

Tome uma instância do problema de máxima cobertura definida pelos subconjuntos S_j e elementos $u_i \in U$ e parâmetro k , com $j \in \{1, \dots, m\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ e $k < n < m$.

Vamos construí-la do modelo de cascata independente. Definimos um grafo bipartido de $m + n^2$ nós de maneira que:

- Para cada subconjunto S_j , há um nó j
- Para cada elemento u_i , há n nós v_1, v_2, \dots, v_n
- Se $u_i \in S_j$, então existe uma aresta direcionada $\{j, v_l\}$, $\forall l$ e $p_{j,v_l} = 1$

Tome uma instância do problema de máxima cobertura definida pelos subconjuntos S_j e elementos $u_i \in U$ e parâmetro k , com $j \in \{1, \dots, m\}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ e $k < n < m$.

Vamos construí-la do modelo de cascata independente. Definimos um grafo bipartido de $m + n^2$ nós de maneira que:

- Para cada subconjunto S_j , há um nó j
- Para cada elemento u_i , há n nós v_1, v_2, \dots, v_n
- Se $u_i \in S_j$, então existe uma aresta direcionada $\{j, v_l\}$, $\forall l$ e $p_{j,v_l} = 1$

Ao escolhermos o conjunto inicial A para X na partição dos S_j e $T \subseteq U$ na outra partição, onde X é formado por k subconjuntos S_j e T união dos v_l adjacentes aos S_j , obtemos deterministicamente $k + n|T|$ nós ativos.

Dessa maneira, r elementos serão cobertos por k subconjuntos apenas se $k + nr$ nós são ativados por um conjunto inicial de tamanho k na instância do modelo de cascata.

Dessa maneira, r elementos serão cobertos por k subconjuntos apenas se $k + nr$ nós são ativados por um conjunto inicial de tamanho k na instância do modelo de cascata.

No sentido oposto, se já temos um conjunto inicial A podemos dizer que:

- Os nós j de A correspondentes aos S_j são tantos quanto os k subconjuntos S_j ; se mais subconjuntos fossem selecionados para a cobertura, mais nós seriam ativados
- As arestas farão com que estes nós j ativem mais $n|T|$ nós com probabilidade 1, onde T são os elementos cobertos pelos S_j .

Assim, se r nós são cobertos, exatamente $k + nr$ nós foram ativados na instância do modelo de cascata.

Dessa maneira, r elementos serão cobertos por k subconjuntos apenas se $k + nr$ nós são ativados por um conjunto inicial de tamanho k na instância do modelo de cascata.

No sentido oposto, se já temos um conjunto inicial A podemos dizer que:

- Os nós j de A correspondentes aos S_j são tantos quanto os k subconjuntos S_j ; se mais subconjuntos fossem selecionados para a cobertura, mais nós seriam ativados
- As arestas farão com que estes nós j ativem mais $n|T|$ nós com probabilidade 1, onde T são os elementos cobertos pelos S_j .

Assim, se r nós são cobertos, exatamente $k + nr$ nós foram ativados na instância do modelo de cascata.

Como o problema da cobertura máxima é difícil de se aproximar por um fator melhor que $1 - 1/e$, segue que o problema da maximização de influência também o é.

Modelo de Cascata Geral

Também podemos generalizar o modelo de cascata independente se permitirmos que as probabilidades de ativação dependam de cada nó que tentou a ativação anteriormente.

Modelo de Cascata Geral

Também podemos generalizar o modelo de cascata independente se permitirmos que as probabilidades de ativação dependam de cada nó que tentou a ativação anteriormente.

Definimos uma função incremental $p_u(v, S)$ onde S é um subconjunto da vizinhança de u e v não está em S . Quando v tenta ativar u , é necessário checar um conjunto S de vizinhos de u que já tentaram e falharam.

Modelo de Cascata Geral

Também podemos generalizar o modelo de cascata independente se permitirmos que as probabilidades de ativação dependam de cada nó que tentou a ativação anteriormente.

Definimos uma função incremental $p_u(v, S)$ onde S é um subconjunto da vizinhança de u e v não está em S . Quando v tenta ativar u , é necessário checar um conjunto S de vizinhos de u que já tentaram e falharam.

Tanto faz a ordem dos vizinhos que falharam; chamamos estas probabilidades de ativação de *ordem-independente*.

Modelo de Cascata Ponderado

Ainda, é possível que nem todos os nós tenham a mesma importância. Os autores citam uma extensão na qual o objetivo muda para capturar a informação de que alguns nós podem ser mais importantes no resultado final que outros.

Modelo de Cascata Ponderado

Ainda, é possível que nem todos os nós tenham a mesma importância. Os autores citam uma extensão na qual o objetivo muda para capturar a informação de que alguns nós podem ser mais importantes no resultado final que outros.

Como exemplo, se queremos vender um livro para professores universitários, pode ser interessante diferenciar aqueles que dão aula para mais alunos.

Modelo de Cascata Ponderado

Ainda, é possível que nem todos os nós tenham a mesma importância. Os autores citam uma extensão na qual o objetivo muda para capturar a informação de que alguns nós podem ser mais importantes no resultado final que outros.

Como exemplo, se queremos vender um livro para professores universitários, pode ser interessante diferenciar aqueles que dão aula para mais alunos.

Desta maneira, há um peso ω_u não-negativo para cada nó u e a função de influência ponderada se torna $\sigma_\omega(A) = \mathbb{E}[\sum_{u \in A_t} \omega_u]$.

Equivalência

É possível ir do modelo de limiar geral para o modelo de cascata geral e vice-versa. Observe as identidades:

Equivalência

É possível ir do modelo de limiar geral para o modelo de cascata geral e vice-versa. Observe as identidades:

$$f_u(S) = 1 - \prod_{i=1}^r (1 - p_u(u_i, S_i))$$

e

$$p_u(v, S) = \frac{f_u(S \cup \{u\}) - f_u(S)}{1 - f_u(S)},$$

onde $S = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ e $S_i = \{u_1, u_2, \dots, u_{i-1}\}$. Se $p_u(v, S)$ é ordem-independente, $f_u(S)$ está bem definida.

Algoritmo

- Não é possível estimar a função σ em tempo polinomial

Algoritmo

- Não é possível estimar a função σ em tempo polinomial
- Simulando a difusão um número suficiente de vezes, obtemos uma aproximação eficiente em torno de 63% do ótimo

Algoritmo

- Não é possível estimar a função σ em tempo polinomial
- Simulando a difusão um número suficiente de vezes, obtemos uma aproximação eficiente em torno de 63% do ótimo
- A qualidade da aproximação vem das funções submodulares

Teorema

Se o processo de difusão que começa com um conjunto A é simulado independentemente pelo menos $\Omega(\frac{n^2}{\varepsilon^2} \ln(1/\delta))$ vezes, então o número médio de nós ativados é uma $(1 \pm \varepsilon)$ -aproximação de $\sigma(A \cup \{x\})$ com probabilidade pelo menos $(1 - \delta)$.

Prova: Este resultado vem do **limite de Hoeffding**. Suponha que o processo de amostragem é repetido $T = \Omega\left(\frac{n^2}{\epsilon^2} \ln(1/\delta)\right)$ vezes.

Prova: Este resultado vem do **limite de Hoeffding**. Suponha que o processo de amostragem é repetido $T = \Omega(\frac{n^2}{\epsilon^2} \ln(1/\delta))$ vezes.

Sejam $X_1, X_2, \dots, X_T \in [0, 1]$ a fração de nós ativados em cada execução. Então $\sigma(A)$ é estimado por

$$\frac{n}{T} \sum_{i=1}^T X_i \implies \frac{n}{T} X$$

onde

$$X \equiv \sum_{i=1}^T X_i$$

e $\mathbb{E}[X] = \frac{T}{n} \sigma(A)$.

Limite de Hoeffding

Para $T\gamma > 0$,

$$P\left[\left|X - \frac{T}{n}\sigma(A)\right| \geq T\gamma\right] \leq 2e^{-2T\gamma^2}$$

Limite de Hoeffding

Para $T\gamma > 0$,

$$P\left[\left|X - \frac{T}{n}\sigma(A)\right| \geq T\gamma\right] \leq 2e^{-2T\gamma^2}$$

Então, se fizermos $\gamma = (2\varepsilon/n)\sigma(A) \geq 2\varepsilon/n$ e depois substituimos o T , o termo direito da inequação se torna

$$2e^{-2T(\varepsilon^2/n^2)} \leq 2e^{-2\frac{n^2}{\varepsilon^2}\ln(1/\delta)(2^2\varepsilon^2/n^2)} \leq \delta$$



Algorithm 1 Aproximação Gulosa

- 1: Comece com $A = \emptyset$.
 - 2: **enquanto** $|A| \leq k$ **faça**
 - 3: Para cada nó x , obtenha uma $(1 \pm \varepsilon)$ -aproximação de $\sigma(A \cup \{x\})$ com alta probabilidade através da amostragem repetida.
 - 4: Adicione o nó com a melhor estimativa para $\sigma(A \cup \{x\})$ em A .
 - 5: **termine enquanto**
 - 6: Retorne A .
-

Teorema

Nemhauser-Wolsey-Fisher (1978) Se $\sigma(\cdot)$ é uma função submodular, monótona e não-negativa, então o Algoritmo 1 produz um conjunto A de k elementos tal que

$$\sigma(A) \geq (1 - 1/e) \max_{|B|=k} \sigma(B)$$

- Este é um resultado da otimização de funções submodulares.

- Este é um resultado da otimização de funções submodulares.
- O artigo não oferece a prova e se preocupa em mostrar casos em que $\sigma(\cdot)$ é submodular.

- Este é um resultado da otimização de funções submodulares.
- O artigo não oferece a prova e se preocupa em mostrar casos em que $\sigma(\cdot)$ é submodular.
- Há também uma análise de processos não-progressivos.

Modelo de Cascata Decrescente

Um caso interessante de função submodular emerge para o **modelo de limiar** quando o seu equivalente de cascata é do tipo decrescente.

Modelo de Cascata Decrescente

Um caso interessante de função submodular emerge para o **modelo de limiar** quando o seu equivalente de cascata é do tipo decrescente.

Neste modelo, é mais difícil convencer um nó a se ativar quando mais vizinhos já tentaram e falharam.

Modelo de Cascata Decrescente

Um caso interessante de função submodular emerge para o **modelo de limiar** quando o seu equivalente de cascata é do tipo decrescente.

Neste modelo, é mais difícil convencer um nó a se ativar quando mais vizinhos já tentaram e falharam.

Esta condição é expressa por $p_u(v, S) \geq p_u(v, T)$ quando $S \subseteq T$.

Modelo de Cascata Decrescente

Um caso interessante de função submodular emerge para o **modelo de limiar** quando o seu equivalente de cascata é do tipo decrescente.

Neste modelo, é mais difícil convencer um nó a se ativar quando mais vizinhos já tentaram e falharam.

Esta condição é expressa por $p_u(v, S) \geq p_u(v, T)$ quando $S \subseteq T$. Isto equivale a dizer que

$$\frac{f_u(S \cup \{u\}) - f_u(S)}{1 - f_u(S)} \geq \frac{f_u(T \cup \{u\}) - f_u(T)}{1 - f_u(T)},$$

o que representa uma submodularidade ainda mais forte para a função de ativação.

Implementação

Depois de dar garantias sobre a aproximação, os autores se preocuparam com a performance prática do algoritmo guloso.

Implementação

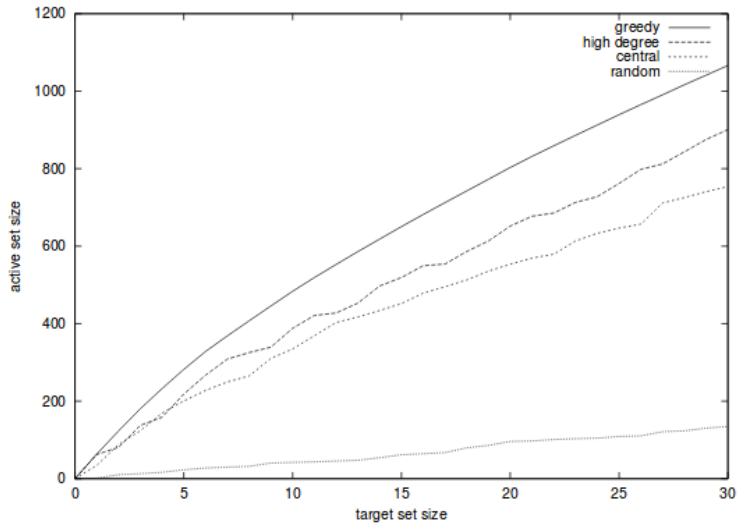
Depois de dar garantias sobre a aproximação, os autores se preocuparam com a performance prática do algoritmo guloso.

Estabeleceram a comparação com 3 heurísticas diferentes:

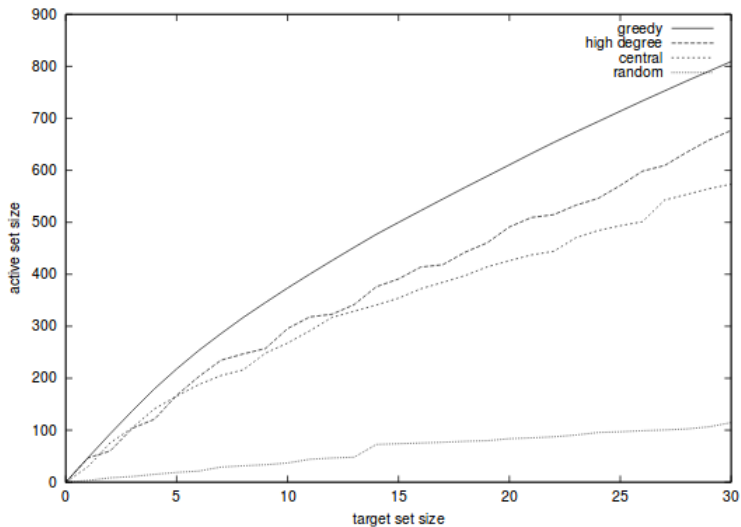
- Heurística de alto grau: escolha nós pelo grau em ordem decrescente
- Centralidade: nós ordenados pela sua distância média em relação aos outros nós
- Resultado aleatório: selecione nós aleatórios uniformemente

Foram executadas 10000 simulações para cada conjunto-alvo em grafos de $n = 10748$ nós, e $m \approx 53000$ arestas, re-escolhendo limiares pseudo-aleatoriamente entre 0 e 1, com k sempre variando de 1 a 30.

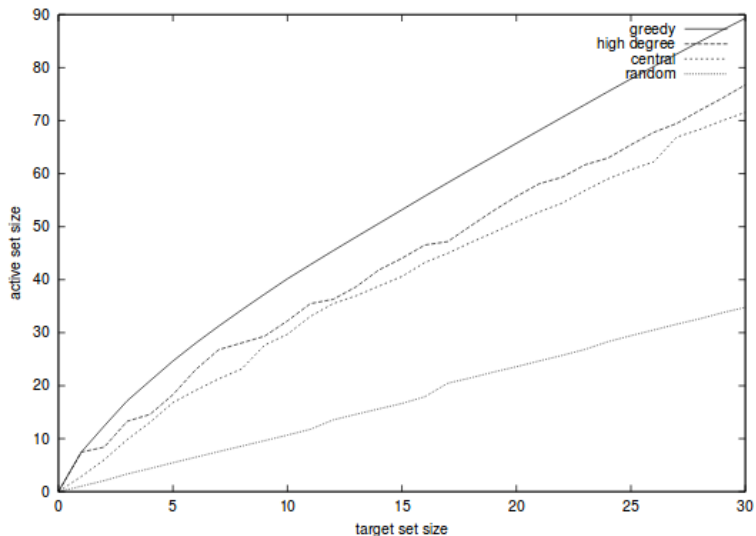
Limiar Linear



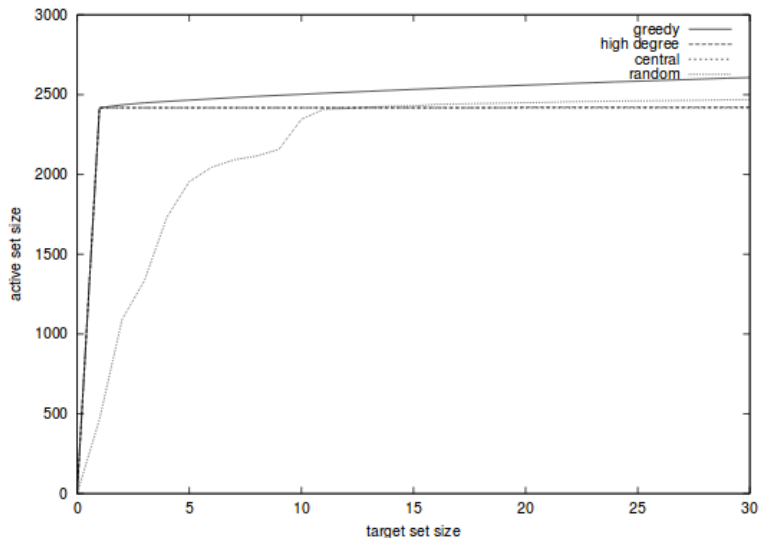
Cascata Ponderado



Cascata Independente com probabilidade 1%



Cascata Independente com probabilidade 10%



Referências

Kempe, David, Jon M. Kleinberg, and Éva Tardos. "Maximizing the Spread of Influence through a Social Network." *Theory of Computing* 11.4 (2015): 105-147.

Kempe, David, Jon Kleinberg, and Éva Tardos. "Maximizing the spread of influence through a social network." *Proceedings of the ninth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*. ACM, 2003.

Kempe, David, Jon Kleinberg, and Éva Tardos. "Influential nodes in a diffusion model for social networks." *International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*. Springer Berlin Heidelberg, 2005.

Domingos, Pedro, and Matt Richardson. "Mining the network value of customers." *Proceedings of the seventh ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*. ACM, 2001.

Richardson, Matthew, and Pedro Domingos. "Mining knowledge-sharing sites for viral marketing." *Proceedings of the eighth ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*. ACM, 2002.

Nemhauser, George L., Laurence A. Wolsey, and Marshall L. Fisher. "An analysis of approximations for maximizing submodular set functions—I." *Mathematical Programming* 14.1 (1978): 265-294.

Apêndice