Leilões ascendentes para itens expirando gradualmente

Hugo Djemaa

Instituto da computaçao

8 de Junho 2017

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Sommaire

Itens

- M instancias do mesmo item com tempo de vencimento diferentes
- Um item t expira no momento t
- Um item nao pode ser comprado depois do seu tempo de vencimento
- Tem M unidades de tempo que correspondem aos M objetos

Jogadores

Um jogador i tem três atributos privados

- O tempo correspondendo a sua chegada no leilao $r(i)$
- O tempo de saida do leilao $d(i)$
- O valor estimado de uma instancia para o jogador $v(i)$

Um jogador i pode comprar um item t sse $r(i) \leq t \leq d(i)$

Notaçoes

- Um jogador i é ativo ao momento t se $r(i) \leq t \leq d(i)$ e se i nao comprou nenhum item antes de t
- Uma alocaçao é uma atribuiçao de uns itens para uns jogadores (respeitando as restriçoes)
- X_t é uma alocaçao dos itens de t até M
- $X_t\left[d\right]$ é o jogador que recebe o item d em X_t
- $X_t\left[d_1, d_2\right]$ o conjunto de jogadores recebendo os objetos de d_1 até d_2

Definiçoes

- O valor de uma alocaçao é $v(A) = \sum_{d \in A} v(A[d])$
- O bem-estar social de uma alocaçao é seu valor
- A utilidade de um jogador é o seu valor menos o preço que ele paga para o objeto que ganha
- Se nao ganhar, ele tem uma utilidade de zero

Vamos analisar nosso modelo como sendo a adaptaçao online de dois modelos ja existante e ver que achamos os mesmos resultados.

- O primeiro é o leilao a lance incremental
- O segundo é o leilao japones

Ambos sao leiloes de segundo preço, e ambos tem estrategias que permetem de atingir o maximo do bem estar social.

Leilao a lance incremental

- Todos os jogadores estao presentes no inicio do leilao ($t = 1$)
- O leilao sempre mante um preço p_t e um vencedor win_t para um objeto t
- Em t, um jogador i pode escolher um objeto $t' \geq t$, $p_{t'} \mid_{new} = p_{t'} \mid_{old} + \delta$, onde δ é um pequeno inteiro, $win'_t = i$
- Um jogador nao pode agir se ele ja é o vencedor temporario de um objeto
- Quando nenhum jogador de $\{i : \nexists t \setminus win_t = i\}$ deseja fazer mais ofertas, incrementamos o tempo
- Na hora de passar a t+1, win_t ganha o objeto t e paga $p_t - \delta$

Leilao japonês

- Os jogadores entram na arena no inicio do leilao ($t = 1$)
- O preço sube ao longo do tempo
- Um jogador pode sair de uma arena quando quiser sem poder mais reentrar
- O ultimo jogador a ficar numa arena ganha o objeto
- Neste caso tem uma arena por objeto, ela começa e acaba ao tempo t
- Quando um objeto foi vendido, incrementamos o tempo

A diferença entre essas modelizaçoes e o nosso modelo sao :

Leilao a lance incremental

Os jogadores entram e saiam ao longo do tempo, temos que adicionar este componente na definiçao do jogo.

Leilao japonês

Os jogadores entram e saiam ao longo do tempo e tem acesso a informaçao de quantos jogadores ja sairam de uma arena.

1. Definiçao do problema
   - O modelo
   - Dois modelos conhecidos
   - Diferença com nosso caso
   - Resultados conhecidos e adaptabilidade com o nosso caso

Existe estrategias para os modelos apresentados, que permitem atingir sempre o maximo do bem estar social. Sao chamadas de estrategias míopes.

Estrategia miope para o leilao a lance incremental

Um jogador i sempre tenta comprar o objeto de menor preço, se esse preço for inferior ao seu valor estimado $v(i)$, senao nao faz nada.

Estrategia miope para o leilao japonês

Um jogador i sai da arena quando o preço atinge $v(i)$ ou quando sobram exatamente $d(i) - t$ jogadores.

Problema : na adaptaçao para nosso modelo, esse resultado nao esta mais valido.

Example

Um jogador nao tem conhecimento sobre as estrategias dos jogadores que ainda nao estao presentes. Assim, ele pode querer dar a prioridade a um objeto que expira logo para anticipar a chegada de uns jogadores competitivos no futuro (valor estimada alta).

Example

Se tiver M jogadores com valor alta, uma estrategia boa pode ser esperar até o ultimo momento para fazer uma oferta, que o tempo de muitos jogadores expira. Se todos usam a mesma estrategia, muitos objetos nao vao ser vendidos e o bem estar social vai ficar bem longe do valor maximo.

Vamos focar unicamente sobre a adaptaçao do leilao a lance incremental, mesmo se os resultados podem ser achados pela adaptaçao do leilao japonês.

Sommaire

Porque nao analisar o modelo com mecanismos a prova de estratégia ?

Definition

- Seja T_i o dominio de um jogador valido $(r(i), v(i), d(i))$
- Seja $T_{-i} = \times_{j \neq i} T_j$
- Seja $b_i \in T_i$ uma alocaçao de atributos para um jogador
- Seja $v(i, b)$ o valor que o jogador i tira com b : $v(i)$ se o jogador consegue comprar um objeto, 0 senao.

Definition

Um mecanismo é a prova de estratégia se
$\exists p_i : T_1 \times \cdots \times T_n \to \Re \setminus \forall i, \forall b_{-i} \in T_{-i}, \forall b_i \in T_i, \forall \tilde{b}_i \neq b_i :$

$$v(i, b_i, b_{-i}) - p(b_i, b_{-i}) \geq v(i, \tilde{b}_i, b_{-i}) - p(\tilde{b}_i, b_{-i})$$

Theorem

Qualquer mecanismo a prova de estratégia para o modelo estudado nao pode sempre assurar um bem-estar social superior a $1/M$ do otimo.

Lema

Para um mecanismo a prova de estratégia que sempre obtem pelo menos $1/c$ do bem-estar social otimo, para um $c \geq 1$.
Para qualquer jogador i, com $r(i) = 1$, $\exists p_i : T_{-i} \rightarrow \Re$ funçao de preço tal que, para qualquer combinaçao de jogadores chegando ao tempo 1, b_{-i} :

- se $v(i) > p_i(b_{-i})$ entao i ganha o objeto 1 e paga $p_i(b_{-i})$
- se $v(i) < p_i(b_{-i})$ entao i nao ganha nenhum objeto

Prova

- Existencia de uma tal funçao
- Se o jogador i é tal que $v(i) > p_i(b_{-i})$, ele ganha um objeto
- Este objeto é o primeiro objeto
- Se o jogador i é tal que $v(i) < p_i(b_{-i})$, ele nao ganha nada

Existencia de uma tal funçao
Fixamos b_{-i} e supomos que $d(i) = 1$:
Obviamente existe um limiar $p_i^* = p_i^*(b_{-i})$ tal que :
i ganha e paga p_i^* se $v(i) > p_i^*$,
e perde e paga 0 se $v(i) < p_i^*$

Se o jogador i é tal que $v(i) > p_i(b_{-i})$, ele ganha um objeto

Prova

Vamos supor que nao ganha um objeto.
Se i declara um tempo de saida falso $\tilde{d}_i = 1$, i ganha um objeto e melhora sua utilidade
Como estamos num contexto de mecanismos a prova de estrategias, isso é impossivel.
i ganha um objeto

Se i tal que $v(i) > p_i(b_{-i})$, o objeto que ele ganha é o primeiro

Prova

- Caso i nao ganhar o primeiro objeto, e o jogo "mandar" jogadores com valores crescentes
- $\forall t > 1$ seja $x_t = \sum_{i, 1 \leq r(i) \leq t-1} v(i)$
- Seja $j, r(j) = d(j) = t, v(j) = (c+1)x_t$
- Se $win_t \neq j$ o jogo para de "mandar" novos jogadores
- $v(OPT) \geq (c+1)x_{ultimo}, v(ON) \leq x_{ultimo}$
- $\frac{v(ON)}{v(OPT)} \leq \frac{1}{c+1}$ (Contradiçao)

Como i tem que receber um objeto, ele recebe o primeiro.

Se i tal que $v(i) < p_i(b_{-i})$, ele nao ganha nada

Prova

- Vamos supor que i ganha um item
- O preço do objeto vale maximo $v(i) < p_i(b_{-i})$
- Agora imaginamos que i tivesse um valor $\tilde{v}(i) > p_i(b_{-i})$
- i melhora sua utilidade declarando seu valor como $\tilde{v}(i) = v(i)$
- Contradiçao porque contexto a prova de estratégia

Para uma funçao de preço $p_i : T_{-i} \rightarrow \Re$
Sejam M jogadores com
$r(i) = 1, d(i) = M, 1 \leq v(i) \leq 1 + \epsilon, v(i) \neq p_i(b_{-i}), \forall \epsilon > 0, \forall i$

- se $v(i) > p_i(b_{-i})$ entao i ganha o objeto 1 e paga $p_i(b_{-i})$
- se $v(i) < p_i(b_{-i})$ entao i nao ganha nenhum objeto

O bem estar social vale ao maximo $1 + \epsilon$ quando o otimo vale mais que M.

Sommaire

- Primeiramente vamos criar um conjunto de estratégias que um jogador vai ter interesse a seguir
- Vamos ver que se todos os jogadores jogam nesse conjunto de estratégia, o bem-estar social sempre vai estar ao minimo 1/3 do otimo.
- Alem disso vamos ver que esse conjunto é um equilibrio Nash-Conjunto, ou seja, que todos os jogadores tem interesse de jogar nesse conjunto.

3 Estrutura de teoria dos jogos

- Definiçoes(bem-estar social)
- Bem-estar social
- Definiçoes(equilibrio)
- Analise estratégias

Definition

Um jogador i é semi miope se quando jogar, ele faz um lance para o item t com $p(t) \leq v(i)$ e $r(i) \leq t \leq d(i)$, se nao existe tal item, i para de participar. (O objeto nao é necessariamente o de menor preço)

Contexto para alocaçao semi miope

- A_t : jogadores ativos no tempo t.
- S_t : melhor alocaçao atual, alocaçao de maior valor dentro das alocaçoes dos itens de t até M para os jogadores de A_t.
- f_t : o conjunto de jogadores que podem receber o objeto t.
- $f_t = \{j \in S_t \mid S_t \setminus \text{j independante em relaçao aos itens de t+1 até M}\}$

S é independante em relaçao aos itens de t até M se existe uma alocaçao tal que tudo jogador de S recebe um objeto diferente entre t e M.

$$v_t^* = \begin{cases} 0 & S_t \text{ é independante / itens de t+1 até M} \\ min_{j \in f_t}\{v(j)\} & \text{senao} \end{cases}$$

Definition

Uma regra de alocaçao é semi miope se tudo t é vendido ao tempo t para um jogador j com $v(j) \geq v_t^*$. Se $v_t^* = 0$ a regra de alocaçao pode escolher de nao dar o objeto para ninguem
Ademais, o jogador de S_t que vai receber o objeto vai pagar exatamente v_t^*.

3 Estrutura de teoria dos jogos

- Definiçoes(bem-estar social)
- Bem-estar social
- Definiçoes(equilibrio)
- Analise estratégias

Queremos mostrar que se todos os jogadores seguem estratégias recomandadas (semi miopes), o bem-estar social sera de pelo menos 1/3 do valor do bem-estar otimo.

Theorem

Se todos os jogadores sao semi miopes, entao o leilao ascendante online consegue um bem-estar social com um valor pelo menos um terço o do bem-estar otimo, mais um valor que tende para zero junto com o δ do leilao :

$$v(OPT) \leq 3 \cdot v(ON) + 2 \cdot M \cdot \delta$$

Theorem

O leilao ascendante online com jogadores semi miopes é uma regra de alocaçao semi miope.

Prova :

- Caso $v_t^* = 0$, $v(win_t) \geq v_t^* - \delta$ é obvio
- $v_t^* > 0 \Leftrightarrow f_t$ nao é independante
- $\exists j \in f_t$ tq j nao ganha um objeto entre t+1 e M
- Como j esta em $f_t, v(j) \geq v_t^*$ j ganha o objeto
- Ou nao ganha, $p(t) > v(j) \geq v_t^*$
- Se $i = win_t, v(i) \geq p(t) - \delta \Rightarrow v(win_t) \geq v_t^* - \delta$

Theorem

Qualquer regra de alocaçao semi miope obtem pelo menos um terço do valor do bem-estar social otimo.

Prova

- $\forall$ regra de alocaçao que produz ON :
  $v(OPT \setminus ON) \leq 2\sum_{t=1}^{M} v_t^*$
- Como para regra de alocaçao semi miope $v(ON[t]) \geq v_t^*$:
- $v(OPT) \leq v(OPT \setminus ON) + v(ON) \leq 2\sum_{t=1}^{M} v_t^* + v(ON) \leq 2 \cdot v(ON) + v(ON) = 3 \cdot v(ON)$

Dos dois teoremas precedentes vem o resultado que nos interessa sobre o bem-estar social nesse tipo de leilao, com estratégias semi miopes.

Theorem

Se todos os jogadores sao semi miopes, entao o leilao ascendante online consegue um bem-estar social com um valor pelo menos um terço o do bem-estar otimo, mais um valor que tende para zero junto com o δ do leilao :

$$v(OPT) \leq 3 \cdot v(ON) + 2 \cdot M \cdot \delta$$

3 Estrutura de teoria dos jogos
- Definiçoes(bem-estar social)
- Bem-estar social
- Definiçoes(equilibrio)
- Analise estratégias

Estamos querendo definir um conjunto de estratégias tal que jogar uma estratégia dentro desse conjunto seja intuitivo para qualquer jogador, desviar dessas estratégias se paga por um custo maior (ou uma utilidade menor).

Definition

Digamos que R_i é um equilibrio Nash-Conjunto se para qualquer i, qualquer $s_{-i} \in R_{-i}$ e qualquer $s_i \in S_i$,
$\exists r_i \in R_i / u_i(r_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s - i)$
Ou seja, para qualquer conjunto de estratégias recomandadas dos outros jogadores, a melhor resposta esta dentro do conjunto de estratégias recomandadas.

Isso vale para jogos a informaçao completa, mas os jogadores tem atributos privados.

Um jogador i tem um tipo privado $t_i \in T_i$
A utilidade de um jogador depende desse tipo : $u_i(t_i, s_i, s_{-i})$ e junto o conjunto de estratégias recomandadas :

Estratégias Recomandadas para nosso leilao

$R_i : T_i \rightarrow 2^{S_i}$
$R_i(*) = \cup_{t_i \in T_i} R_i(t_i)$

Definition

$\bar{G} = (T, \bar{S}, \bar{u})$ é uma extensao de $G = (T, S, u)$ se $\forall i, S_i \subseteq \bar{S}_i \; \forall s \in S, \forall t_i \in T_i : \bar{u}_i(t_i, s) = u_i(t_i, s)$

A melhor resposta de um jogo pode nao ser a melhor resposta da extensao desse jogo, pois as novas estratégias podem ser melhores.

Definition

$\bar{G}$ é uma extensao ignoravel de G se os conjuntos recomandados $R_i(t_i) = S_i, \forall i$ formam um equilibrio Nash-Conjunto de $\bar{G}$.

Uma extensao ignoravel nao permite melhores estratégias.

Definition

Seja A o conjunto das alocaçoes validas.
Uma escolha social $F : T \rightarrow 2^A$ é uma c-aproximaçao do bem-estar social se $\forall t \in T$, o bem estar social de uma alocaçao $a \in F(t)$ vale pelo menos 1/c do bem-estar otimo em relaçao a t.

Proposiçao

Se $\{R_i(\cdot)\}_i$ sao um equilibrio Nash-Conjunto de G e $\bar{G}$ é uma extensao ignoravel de G, entao $\{R_i(\cdot)\}$ sao um equilibrio Nash-Conjunto de $\bar{G}$.

Definiçao de mecanismos semi miope :

- Espaço de estratégia
- Determinaçao do vencedor ao tempo t
- Preços
- Estrategia recomendada

Espaço de estratégia

Cada jogador declara quando chega, seu valor, seu tempo de chegada e de saida, e um tempo de saida t entre sua chegada e sua saida. Esse tempo esta em $d(i,t)$. Se ele nao o declara ou se t é superior a seu tempo de saida, $d(i,t) = d(i)$

Determinaçao do vencedor ao tempo t

A_t : se torna os jogadores ativos no tempo t com tempo de saida d(i,t) $\forall i$.
O mecanismo aloca o objeto t a um jogador em f_t

Preços

$\forall i$, o mecanismo cria um preço de tentativa para cada tempo t
$p_t(i)$ assim :
se $i \notin S_t, p_t(i) = 0$
$\forall i \in S_t, c_t(i) =$
$max\{v(j) \mid j \in A_t \setminus S_t, S_t \setminus i \cup j$ independante / itens t até M$\}$
Para tudo $i \in f_t$ o mecanismo fixa $p_t(i) = c_t(i)$
Se i ganha t, i paga $max_{r(i) \leq t' \leq t} p_{t'}(i)$

Estrategia recomendada

Em uma estratégia recomendada, i declara seu verdadeiro valor e tempo de saida, e pode declarar um tempo de saida “tentativa”.

3. Estrutura de teoria dos jogos
   - Definiçoes(bem-estar social)
   - Bem-estar social
   - Definiçoes(equilibrio)
   - Analise estratégias

Lemma

Quando todos os jogadores jogam nas estratégias recomendadas, entao a alocaçao de qualquer mecanismo semi miope é uma regra de alocaçao semi miope.

Theorem

As estratégias recomendadas para o mecanismo semi miope formam um equilibrio Nash-Conjunto.

Theorem

O leilao ascendente online é uma extensao ignoravel de um mecanismo semi miope

Proposiçao

Se $\{R_i(\cdot)\}_i$ sao um equilibrio Nash-Conjunto de G e $\bar{G}$ é uma extensao ignoravel de G, entao $\{R_i(\cdot)\}$ sao um equilibrio Nash-Conjunto de $\bar{G}$.

Sommaire

- Existe conjuntos de estratégias preferaveis para os jogadores de um “ leilao ascendente para itens expirando gradualmente ”.
- Preferaveis porque a melhor resposta para um jogador a uma combinaçao de estratégias dentro desse conjunto esta nesse mesmo conjunto.
- Uma alocaçao onde todos jogadores seguem estratégias dentro desse conjunto tem um bem-estar social com valor pelo menos um terço do bem-estar maximo no conjunto das alocaçoes validas.

[Lavi, 2014] Ron Lavi, Noam Nisan
Online ascending auctions for gradually expiring items

[Demange, 1994] G. Demange, D. Gale, M. Sotomayor
Multi-item auctions