Evaluating gambles using dynamics (O. Peters e M. Gell-Mann)

MC918 - 1º semestre de 2017
Antonio José Pinheiro Prado - RA: 134988

Roteiro

- Motivações
- Definições
- A perspectiva dinâmica
- Desenvolvimento histórico
- Conclusão

Motivações

Motivações

- Paradoxo de São Petersburgo

- Jogo do 1,5 - 0,6

Definições

Valor Esperado

O valor esperado de uma observável é a média dentre N medidas da variável, no limite de N tendendo ao infinito.

Aposta (gamble)

Uma aposta é um conjunto de possíveis retornos líquidos, $D(n)$, com suas probabilidades $p(n)$ associadas.

O retorno líquido pode ser calculado por:

$$D(n) = G(n) - F$$

Em que $G(n)$ é o ganho no resultado n e F é a taxa para participar da aposta.

Ergodicidade (ergodic property)

Uma observável possui a propriedade ergódica se seu valor esperado é uma constante (independente do tempo) e sua média a tempo finito (com N observações) converge para essa constante com probabilidade 1 quando N tende ao infinito.

A perspectiva dinâmica

Dinâmica: movimento

Distinção entre análise considerando o espaço de possibilidades (mundos paralelos) e análise comparando desempenho ao longo do tempo.

Jogos são em geral considerados únicos e independentes do tempo, mas isso não necessariamente reflete a realidade.

Busca por uma variável aleatória estacionária

1. Repetição Aditiva

2. Repetição Multiplicativa

Repetição Aditiva

$$x(t + T\delta t) = x(t) + \sum_{\tau=1}^{T} D(n_\tau), \qquad (1)$$

A função não é ergódica, mas sua diferença numa iteração é:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T\delta t}\left[x(t + T\delta t) - x(t)\right] = \frac{1}{\delta t}\langle \delta x \rangle. \qquad (2)$$

Isto é, de acordo com a dinâmica aditiva, a taxa de variação de riqueza é uma observável ergódica.

Repetição Aditiva

Mas será que a repetição aditiva é um bom modelo para análise de jogos entendidos como investimentos?

Por esse entendimento, a chance de um incremento fixo de riqueza, por exemplo $10.000, é independente da riqueza inicial dos participantes.

Repetição Multiplicativa

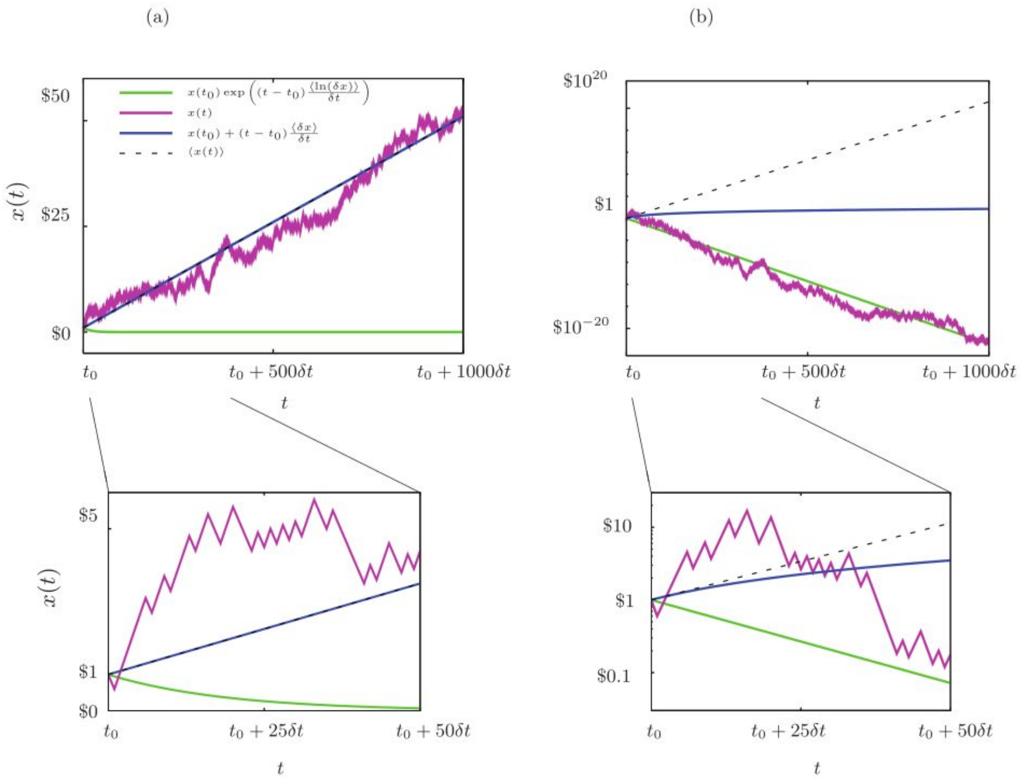
$$x(t + T\delta t) = x(t) \prod_{\tau=1}^{T} r(n_\tau), \qquad (3)$$

$$x(t + T\delta t) = x(t) \exp\left[\sum_{\tau=1}^{T} \ln r(n_\tau)\right]. \qquad (4)$$

A observável ergódica nesse caso é a mudança relativa de riqueza

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T\delta t} \ln\left(\frac{x(t + T\delta t)}{x(t)}\right) = \frac{1}{\delta t}\langle \delta \ln x \rangle. \qquad (5)$$

Análise do jogo do 1,5 - 0,6



A perspectiva histórica

Até 1713: Riqueza esperada

Critério de Hyugens: Maximizar a taxa de mudança no valor esperado da riqueza

$$\frac{1}{\delta t}\langle \delta x \rangle . \tag{6}$$

1738 - 1814: Utilidade

Critério de Bernoulli: vale a pena participar de uma aposta caso a seguinte quantidade seja positiva:

$$\langle \delta u_B{}^{+} \rangle - \langle \delta u_B{}^{-} \rangle = \left[\sum_{n}^{n_{\max}} p(n) \ln \left(\frac{x + G(n)}{x} \right) \right] - \ln \left(\frac{x}{x - F} \right). \qquad (7)$$

1814 - 1934: Utilidade esperada

Critério de Laplace: Maximizar a taxa de mudança na utilidade logarítmica:

$$\frac{1}{\delta t}\delta u_B(x) = \frac{1}{\delta t}\sum_{n}^{n_{\max}} p(n)\left[\ln(x + G(n) - F) - \ln(x)\right]. \qquad (8)$$

Após 1934: Utilidade limitada

Argumento de Menger:

1. Alguns paradoxos podem ser resolvidos por uma utilidade logarítmica pois transformam o crescimento exponencial dos prêmios em linear de utilidade.
2. Se os prêmios crescerem mais rápido ainda, a utilidade se manterá exponencial e o paradoxo se mantém.
3. Para tais jogos, qualquer valor finito de entrada F é aceitável.

Conclusão

Conclusão

1. Defesa da abordagem logarítmica para os resultados dos jogos: não apenas porque estabelece limitantes ou simula utilidades, mas porque simula comportamento ao longo do tempo.
2. Refutação da utilidade limitada de Menger, por considerar artificial e desnecessária.