Teoria dos Jogos

Hokama PhD

25 de maio de 2023

Referências

- Game Theory, Stanford University on Coursera. Matthew O. Jackson, Yoav Shoham e Kevin Leyton-Brown. `https://www.coursera.org/learn/game-theory-1`
- Algorithmic Game Theory, Stanford Fall 2013, Tim Roughgarden. `https://timroughgarden.org/f13/f13.html`
- Twenty lectures on algorithmic game theory. Tim Roughgarden. Cambridge University Press, 2016.
- Tópicos da Teoria dos Jogos em Computação. In: Anais do 30 o Colóquio Brasileiro de Matemática. Schouery, R. C. S., Lee, O., Miyazawa, F. K., e Xavier, E. C. Rio de Janeiro. Editora do IMPA, 2015.

Jogos de Coalizão

Motivação

- As vezes chamados de jogos de cooperação, mas esse não é um bom nome, uma vez que existe um fator de competição entre eles.
- Ao mesmo tempo que também não é um jogo de competição, já que depende de cooperação entre os jogadores.

Introdução

Jogos de Coalizão

- Nosso foco não é exatamente em como cada agente vai agir, mas em como **grupos de agentes** vão se comportar.
- Dado um conjunto de agentes, um jogo de coalizão define o quanto subgrupos (ou coalizões) de agentes podem se dar bem.
- Vamos tomar as recompensas de uma coalizão como dadas.

Definição

- Suposição de Utilidade Transferível:
  - Recompensas pode ser redistribuídas entre os membros da coalizão.
  - Satisfeita sempre que as recompensas forem dadas em uma moeda universal.
  - Para cada coalizão pode ser atribuída um único valor de recompensa.

Definição: Jogo de Coalizão

Um **Jogo de Coalizão com Utilidade Transferível** é um par (N, v), em que:

- N é um conjunto finito de jogadores
- $v : 2^N \to \mathbb{R}$ associa a cada coalizão $S \subset N$ um valor real de recompensa $v(S)$ que os membros da coalizão podem distribuir entre eles. Assumimos que $v(\emptyset) = 0$.

Questões que a teria dos jogos de coalizão podem ajudar a responder:

1. Quais coalizões vão se formar?
2. Como uma coalizão divide suas recompensas entre os agentes?
3. Como elaborador de regras: Quanto deve ser a recompensa de cada coalizão para incentivar certo comportamento?

A resposta para a pergunta 1 com frequência será "A grande coalizão"que são todos os agentes de N, isso pode depender de escolher bem sobre a questão 2.

Jogos Superaditivos

Definição: Jogo Superaditivo

Um jogo $G = (N, v)$ é **superaditivo** se para todo $S, T \subset N$, se $S \cap T = \emptyset$, então $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

- Superaditividade é justificada quando as coalizões podem sempre funcionar sem interferirem uma com a outra.
- O valor de união de duas coalizões não é menor que a soma dos seus valores individuais.
- Implica que a grande coalizão tem o maior valor.

Considere o seguinte jogo:

- 5 jogadores podem livremente fazer coalizões.
- As recompensas são as seguintes:
  - Coalizões de 1 agente ganham 100 pontos.
  - Coalizões de 2 agente ganham 250 pontos.
  - Coalizão de 3 agente ganham 450 pontos.
  - Coalizão de 4 agente ganham 700 pontos.
  - Coalizão de 5 agente ganham 1000 pontos.

Análises

5 times foram formados:

- Rapidamente os agentes perceberam que a melhor estratégia era formar a grande coalizão
- Perceberam que o jogo é superaditivo.
- Decidiram que a divisão seria por igual, 200 pontos para cada agente.

- Como a coalizão deveria dividir sua recompensa?
  - Para ser **justa**.
  - Para ser **estável** (ou seja, ninguém tem incentivo de desviar)

Valor de Shapley

- Uma das formas mais proeminentes de dividir o valor produtivo de um conjunto de indivíduos entre eles.
- Questão: qual é uma divisão "justa" para a coalizão dividir sua recompensa?
- O que é "justiça"
- Uma abordagem: identificar **axiomas** que expressão propriedades de uma divisão de recompensa justa.

- Ideia de Lloyd Shapley: Os membros devem receber pagamentos ou parcelas proporcionais a sua contribuição marginal.
- Mas isso pode ser complicado:
  - Suponha $v(N) = 1$ mas $v(S) = 0$ se $N \neq S$
  - Então $v(N) - v(N \setminus \{i\}) = 1$ para todo i: a contribuição marginal de todo mundo é 1, todo mundo é essencial para gerar qualquer valor.
  - Não podemos pagar 1 para todo mundo.
- Vamos usar um sistema de pesos para fazer essa distribuição.

Simetria

- i e j são **intercambiáveis** em relação a v se eles sempre contribuem com a mesma quantidade para toda a coalizão dos outros agentes. Ou seja, para todo S que não tenham i nem j:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}).$$

Axioma: Simetria

Para qualquer v, se i e j são **intercambiáveis** então $\psi_i(N, v) = \psi_j(N, v)$.

Em que $\psi_i(S, v)$ é o pagamento de i na coalizão S.

5 times foram formados para jogar o jogo, com o objetivo de ganhar o máximo de pontos possíveis. Chegaram a seguinte conclusão:

- O agente com peso 7 é necessário para qualquer coalizão ganhar os 1000 pontos. Portando já deixou claro que quer a maior fatia.
- Os agentes perceberam que o agente de peso 2 não conseguia contribuir para a coalizão. Portanto apenas era oferecido 0.
- No final uma coalizão com peso 14 se formou com os agentes 7, 4 e 3
- distribuição proposta foi: 7: 450, 4: 200 e 3: 250.

Exemplo:

- Considere o seguinte jogo de Coalizão:
- 5 agentes tem o seguintes pesos: $\{7, 4, 4', 3, 2\}$ (vou usar o peso para me referir ao agente)
- Cada coalizão ganha a seguinte recompensa:
  - Se os pesos dos agentes somar 14, eles ganham 1000 pontos
  - Se soma 13 ou menos, ganham 0.
- O que podemos analisar desse jogo?
- Quais coalizões serão formadas? Caso uma coalizão leve os 1000 pontos, como distribuirão os 1000 pontos?

Observações:

- Conforme esperado o time com peso 7 levou a maior fatia.
- O time com peso 3 ganhou mais que o time com peso 4. De fato podemos analisar que os times com peso 3 e 4 na verdade contribuem exatamente a mesma coisa para as coalizões, de forma que eles tem a mesma "força"
- O time com peso 2 é chamado de Jogador Nulo.

Jogador Nulo (Dummy Player)

- i é um **jogador nulo** se a quantidade que i contribui para qualquer coalizão é 0. Ou seja, para todo S.

$$v(S \cup \{i\}) = v(S).$$

Axioma: Jogador Nulo

Para qualquer v, se i é um jogador nulo então $\psi_i(N, v) = 0$.

Aditividade

- Se podemos separar um jogo em duas partes $v = v_1 + v_2$, então nós somos capazes de decompor os pagamentos:

Axioma: Aditividade

Para quaisquer v_1 e v_2, $\psi_i(N, v_1 + v_2) = \psi_i(N, v_1) + \psi(N, v_2)$ para cada i, em que o jogo $(N, v_1 + v_2)$ é definido por $(v_1 + v_2)(S) = v_1(S) + v_2(S)$ para toda coalizão S.

Valor de Shapley

Dado um jogo de coalizão (N, v), o **Valor de Shapley** divide a recompensa entre os jogadores de acordo com:

$$\phi_i(N, v) = \frac{1}{N!} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} |S|!(|N| - |S| - 1)! \left[v(S \cup \{i\}) - v(S) \right].$$

para cada agente i.

Teorema

Dado um jogo de coalizão (N, v), existe uma única divisão da recompensa $x(v) = \phi(N, v)$ que divide o pagamento completo da grande coalizão, e que satisfaz os axiomas da Simetria, Jogador Nulo e Aditividade: o Valor de Shapley.

Valor de Shapley

Exercício:

$$\begin{aligned} v(S : |S| = 1) &= 1 \\ v(S : |S| = 2) &= 2,5 \\ v(S : |S| = 3) &= 4,5 \end{aligned}$$

Valor de Shapley

Exemplo: Dois sócios dividindo os lucros:

$$v(\{1\}) = 1, v(\{2\}) = 2, v(\{1,2\}) = 4$$

$$\psi_1 = 1.5$$
$$\psi_2 = 2.5$$

Exemplo:

- Considere o seguinte jogo de Coalizão:
- 5 agentes tem o seguintes pesos: $\{6, 4, 4, 3, 2\}$
- Cada coalizão ganha a seguinte recompensa:
  - Se os pesos dos agentes somar 13, eles ganham 1000 pontos
  - Se soma 12 ou menos, ganham 0.
- O que podemos analisar desse jogo?
- Quais coalizões serão formadas? Caso uma coalizão leve os 1000 pontos, como distribuirão os 1000 pontos?

Valor de Shapley

- Aloca o valos de um grupo de acordo com sua contribuição marginal.
- Atende os axiomas razoáveis
- Outros axiomas uteis: Núcleo.

5 times foram formados para jogar o jogo, dessa vez a analise foi bem mais complicada:

- O agente com maior peso não é obrigatório para uma coalizão ganhar os 1000 pontos.
- Nessa situação o agente com peso 2 também não um jogador nulo.
- No final se formaram 3 coalizões: {6, 3}, {4, 4'}, {5}. Todas ganharam zero.