Teoria dos Jogos

Hokama PhD

18 de maio de 2023

Referências

- Game Theory, Stanford University on Coursera. Matthew O. Jackson, Yoav Shoham e Kevin Leyton-Brown. `https://www.coursera.org/learn/game-theory-1`
- Algorithmic Game Theory, Stanford Fall 2013, Tim Roughgarden. `https://timroughgarden.org/f13/f13.html`
- Twenty lectures on algorithmic game theory. Tim Roughgarden. Cambridge University Press, 2016.
- Tópicos da Teoria dos Jogos em Computação. In: Anais do 30 o Colóquio Brasileiro de Matemática. Schouery, R. C. S., Lee, O., Miyazawa, F. K., e Xavier, E. C. Rio de Janeiro. Editora do IMPA, 2015.

Teorema Popular

em jogos Repetidos Descontados

- Considere um jogo (de 1 estágio) na forma normal $G = (N, A, u)$.
- Seja $a = (a_1, \ldots, a_n)$ um Equilíbrio de Nash de G.

Teorema Popular

Se $a' = (a'_1, \ldots a'_n)$ é tal que $u_i(a') > u_i(a)$ para todo i, então existe um fator de desconto $\beta < 1$, tal que, se $\beta_i \geq \beta$ para todo i, então existe um equilíbrio perfeito em subjogo do jogo G repetido, que tem a' jogado em todo período no caminho do equilíbrio.

Prova:

- Jogar a' desde que todos tenham jogado a' no passado.
- Se qualquer jogador desviar, então jogue a para sempre. (Gatilho Sombrio)
- Verificaremos que isso é um equilíbrio perfeito em subjogos para fatores de desconto suficientemente altos.

- Alguém vai ganhar por desviar de a' se ninguém desviou no passado?
- Quanto qualquer jogador pode ganhar por desviar?

$$M = \max_{i, a_i''} u_i(a_i'', a_{-i}') - u_i(a')$$

- Quanto um jogador pode perder em cada periodo futuro?

$$m = \min_i u_i(a') - u_i(a)$$

- Então quem desviar pode ganhar no máximo

$$M - m\frac{\beta_i}{1-\beta_i}$$

- Note que consideramos que a partir do desvio, todos vão jogar um equilíbrio (não é ameaça vazia)
- Note que o jogador em M e m não necessariamente é mesmo e portante estamos calculando um limitante e não um valor exato.

$$M - m\frac{\beta_i}{1-\beta_i}$$

- Para o desvio não ser benéfico, o valor acima precisa ser negativo para todo i

$$M \leq m\frac{\beta_i}{1-\beta_i}$$

$$\beta_i \geq \frac{M}{M+m}$$

Complicações

por hora fora do escopo

	C	D
C	3,3	0,10
D	10,0	1,1

- Note que nesse jogo se os jogadores combinarem de jogar, (C, D), (D, C) repetidamente eles tem um beneficio maior do que só cooperar.
- Preocupação com regulação, considere 2 competidores em um leilão (repetido) combinando lances.

Jogos Bayesianos

- Se alguém desvia, e todos decidem puni-lo, levando o jogo para um equilíbrio que não é favorável.
- deveriam os jogadores perdoar o desviante e voltar ao acordo original?
- sabendo que será perdoado o jogador muda sua estratégia?

- Leilões, exemplos de leilões
- Em leilões sabemos as ações que cada jogador jogou.
- Porém não temos toda a informação do jogo. Por exemplo não temos informação da recompensa de cada jogador.

Definição

- Até agora vimos jogos em que todos os jogadores sabiam exatamente qual jogo estava sendo jogado.
  - o número de jogadores
  - as ações disponíveis para cada jogador
  - as recompensas associadas com cada vetor de ações (as ações que de fato foram/serão jogadas).
- Isso é verdade em um jogo de informação incompleta?

Agora vamos relaxar essas afirmações:

- O Jogador não sabe qual o jogo que está sendo jogado. Existem múltiplos jogos possíveis.
- Todos os jogos tem o mesmo n e o mesmo espaço de estratégias para cada agente. Diferindo apenas nas recompensas.
- É possível modelar jogos que não tenham o mesmo número de jogadores. Basta modelar todos os jogadores, e em alguns jogos eles não fazem diferença no jogo.

- Os jogadores ainda tem crenças bem definidas sobre o que é possível no jogo.
- Os jogadores partem de um conhecimento comum a todos.
- Os jogadores usam sinais privados que dão uma dica de quais jogos podem estar sendo jogados.
- E formam uma crença a posteriori.
- Então em um jogo Bayesiano, temos um conjunto de jogos que podem acontecer, uma distribuição de probabilidade desses jogos acontecerem, e uma estrutura de partição sobre esses jogos para cada agente, de forma que jogos dentro de uma mesma parte são indistinguíveis para aquele jogador.

Um exemplo

$I_{1,1}$

$I_{2,1}$

CM

	E	D
A	2, 0	0, 2
B	0, 2	2, 0

$p = 0.3$

$I_{2,1}$

DP

	E	D
A	2, 2	0, 3
B	3, 0	1, 1

$p = 0.1$

$I_{1,2}$

Coord

	E	D
A	2, 2	0, 0
B	0, 0	1, 1

$p = 0.2$

BdR

	E	D
A	2, 1	0, 0
B	0, 0	1, 2

$p = 0.4$

Definição com Conjuntos de Informações

Definição: Jogos Bayesianos

Um **Jogo Bayesiano** é uma tupla $(N, A, \mathcal{G}, P, I)$, em que:

- N é um conjunto de agentes,
- $\mathcal{G}$ é um conjunto de jogos, com N os mesmos jogadores e mesmo espaço de estratégias.
- $P \in \Pi(\mathcal{G})$ é um conhecimento comum entre os jogos, em que $\Pi(\mathcal{G})$ é o conjunto de todas as distribuições de probabilidade sobre $\mathcal{G}$, e
- $I = (I_1, \ldots, I_n)$ é o conjunto de partições de $\mathcal{G}$, uma para cada agente.

Definição com Tipos Epistêmicos

Definição: Jogos Bayesianos

Um **Jogo Bayesiano** é uma tupla (N, A, Θ, p, u), em que:

- N é um conjunto de agentes,
- $A = (A_1, \ldots, A_n)$ em que A_i é o conjunto de ações disponíveis para o Jogador i,
- $\Theta = (\Theta_1, \ldots, \Theta_n)$ em que Θ_i é o conjunto de tipos do jogador i,
- $p : \Theta \to [0, 1]$ é o conhecimento comum sobre os tipos.
- $u = (u_1, \ldots, u_n)$, em que $u_i : A \times \Theta \to \mathbb{R}$ é a função de utilidade do jogador i

Jogo de Guerra

Considere o seguinte jogo:

- Dois exércitos disputam uma ilha. Cada um desses exércitos pode ser Forte ou Fraco.
- Caso conquistem uma ilha, ganham uma recompensa M.
- Um conflito causa custos, que é x se o exército é forte, e y se o exército é fraco. De forma que $x < y < M$.
- Um conflito entre um Forte e um Fraco, o Forte ganha. Um conflito entre iguais ninguém ganha a ilha.
- Uma conquista sem luta não tem custos.

		Forte (q)		Fraco ($1-q$)	
		A	N	A	N
Forte (p)	A	,	,	,	,
	N	,	,	,	,
Fraco ($1-p$)	A	,	,	,	,
	N	,	,	,	,

Dilema do Xerife

Um xerife (fictício) se encontra com um suspeito armado, e eles tem que simultaneamente decidir se atiram ou não um no outro (ficticiamente).

- O suspeito é criminoso com prob. p e não criminoso com prob. $1-p$
- O xerife prefere atirar caso o suspeito atira, mas prefere não atirar (sendo o suspeito criminoso ou não)
- O criminoso prefere atirar mesmo que o xerife não atire.
- O inocente prefere não atirar mesmo que o xerife atire.

		Xerife	
		A	N
Mau (p)	A	0, 0	2, -2
	N	-2, -1	-1, 1
Bom ($1-p$)	A	-3, -1	-1, -2
	N	-2, -1	0, 0

Se mau, atirar é uma estratégia dominante. Se bom, não atirar é uma estratégia dominante. Utilidade do xerife se atirar, -1(1-p). Utilidade do xerife se não atirar, -2p. Vale a pena atirar se:

$$-1(1-p) \geq -2p$$

Xerife

Mau (p)

	A	N
A	0, 0	2, -2
N	-2, -1	-1, 1

Bom ($(1-p)$)

	A	N
A	-3, -1	-1, -2
N	-2, -1	0, 0

$$
\begin{aligned}
-1(1-p) &\geq -2p \\
-1+p &\geq -2p \\
3p &\geq 1 \\
p &\geq 1/3
\end{aligned}
$$

Então se a probabilidade do J1 ser mau for maior que $\frac{1}{3}$, é melhor pro xerife atirar.

Equilíbrio de Nash Bayesiano

- Um plano de ação para cada jogador como uma função dos tipos que maximiza o utilidade esperada de cada tipo. (melhor resposta)
- Baseado nos possíveis tipos dos outros jogadores, qual seria a melhor resposta para eles?
- Como é uma função também em relação aos tipos dos outros jogadores, significa que sua utilidade esperada depende de informações que os outros possuem.

- Dado um jogo Bayesiano (N, A, Θ, p, u) finito. As estratégias são definidas da seguinte forma:
- **Estratégia Pura:** $s_i : \Theta_i \rightarrow A_i$
  - Uma escolha de 1 ação para cada possível tipo dele.
- **Estratégia Mista:** $s_i : \Theta_i \rightarrow \Pi(A_i)$
  - Uma distribuição de probabilidade para cada possível tipo do jogador.
  - $s_i(a_i|\theta_i)$ é a probabilidade do jogador i jogar a ação a_i dado que o tipo dele é θ_i na estratégia s_i.

Utilidade Esperada

A utilidade esperada pode ser entendida em 3 tempos diferentes.

- **ex-ante**: o agente não sabe nada sobre o tipo de ninguém (incluindo seu próprio)
- **interim**: o agente sabe seu próprio tipo, mas não sabe o tipo dos outros jogadores.
- **ex-post**: o agente sabe o tipo de todos os jogadores. (igual a um jogo comum)

Utilidade Esperada *Interim*

Dado um jogo Bayesiano (N, A, Θ, p, u) finito. A **utilidade esperada** *interim* do jogador i com respeito ao tipo θ_i e um perfil de estratégia mista s é:

$$UE_i(s|\theta_i) = \sum_{\theta_{-i}\in\Theta_{-i}} p(\theta_{-i}|\theta_i) \sum_{a\in A} \left(\prod_{j\in N} s_j(a_j|\theta_j)\right) u_i(a, \theta_i, \theta_{-i}).$$

Utilidade Esperada *ex-ante*

Dado um jogo Bayesiano (N, A, Θ, p, u) finito. A **utilidade esperada** *ex-ante* do jogador i em um perfil de estratégia mista s é:

$$UE_i(s) = \sum_{\theta_i\in\Theta_i} p(\theta_i) UE_i(s|\theta_i).$$

Equilíbrio de Nash Bayesiano

Um **Equlíbrio de Nash Bayesiano** é um perfil de estratégia mista s que satisfaz:

$$s_i \in \arg\max_{s_i'} UE_i(s_i', s_{-i}|\theta_i)$$

para cada i e $\theta_i \in \Theta_i$.
Essa definição é em um tempo *interim*, em um tempo *ex-ante* se a probabilidade de $p(\theta_i) > 0$ para todo $\theta_i \in \Theta_i$, então é equivalente à:

$$s_i \in \arg\max_{s_i'} UE_i(s_i', s_{-i}) = \arg\max_{s_i'} \sum_{\theta_i} p(\theta_i) UE_i(s_i', s_{-i}|\theta_i)$$

para cada i.

Um equlíbrio de Nash Bayesiano,

- explicitamente modela o comportamento dos jogadores em um ambiente com incertezas.
- Jogadores escolher suas estratégias para maximizar suas recompensas em resposta aos outros de acordo com:
  - incerteza sobre o que os outros vão jogar
  - incerteza sobre qual a recompensa sobre suas ações.