Teoria dos Jogos

Hokama PhD

11 de abril de 2023

Referências

- Game Theory, Stanford University on Coursera. Matthew O. Jackson, Yoav Shoham e Kevin Leyton-Brown. `https://www.coursera.org/learn/game-theory-1`
- Algorithmic Game Theory, Stanford Fall 2013, Tim Roughgarden. `https://timroughgarden.org/f13/f13.html`
- Twenty lectures on algorithmic game theory. Tim Roughgarden. Cambridge University Press, 2016.
- Tópicos da Teoria dos Jogos em Computação. In: Anais do 30 o Colóquio Brasileiro de Matemática. Schouery, R. C. S., Lee, O., Miyazawa, F. K., e Xavier, E. C. Rio de Janeiro. Editora do IMPA, 2015.

Esportes profissionais

- Em esportes profissionais as estratégias mistas são adotadas para confundir o adversário.
- No jogo do pênalti, (0.5, 0.5) para ambos os jogadores é um equilíbrio de Nash. Se tanto o batedor quanto o goleiro forem bastante precisos. Ou seja, o batedor não chuta na trave em um jogo de quartas de final contra a Croácia.

		0.5	0.5
	b \ g	Esq	Dir
0.5	Esq	0, 1	1, 0
0.5	Dir	1, 0	0, 1

- Porém na vida real os atletas têm seus pontos fortes e fracos.
- Digamos que o o batedor, quando chuta para a direita (e o goleiro vai para a outra direção) acerta 3 a cada 4 chutes.

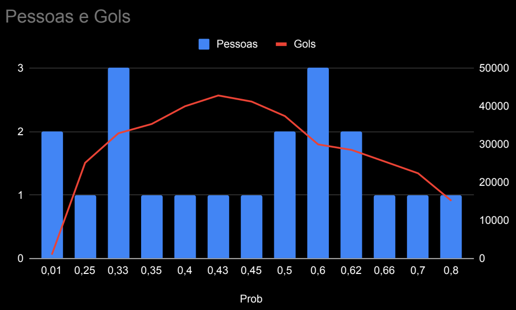
b \ g	Esq	Dir
Esq	0, 1	1, 0
Dir	0.75, 0.25	0, 1

- O goleiro deve pular mais para a esquerda ou mais para a direita, ou manter (0.50, 0.50)?
- O jogador deve chutar mais para a esquerda ou mais para a direita?

Jogo

- Você é o batedor que erra 1/4 das vezes chutando para a direita (quando o goleiro erra o lado).
- Você vai bater 100.000 gols contra um goleiro que anda te espionando. Com qual probabilidade você bate para a esquerda (seu lado bom)? JUSTIFIQUE.

b \ g	Esq	Dir
Esq	0, 1	1, 0
Dir	0.75, 0.25	0, 1




```
Ivan marcou 981 e perdeu 99019 com a estrategia (0.01, 0.99)
Adriel marcou 1023 e perdeu 98977 com a estrategia (0.01, 0.99)
Leonardo marcou 15162 e perdeu 84838 com a estrategia (0.80, 0.20)
Ana marcou 22360 e perdeu 77640 com a estrategia (0.70, 0.30)
Thiago P. marcou 25108 e perdeu 74892 com a estrategia (0.25, 0.75)
João V. marcou 25438 e perdeu 74562 com a estrategia (0.66, 0.34)
Leonardo V. marcou 28495 e perdeu 71505 com a estrategia (0.62, 0.38)
Julia B. marcou 28675 e perdeu 71325 com a estrategia (0.62, 0.38)
Thomas marcou 29930 e perdeu 70070 com a estrategia (0.60, 0.40)
José V. marcou 29968 e perdeu 70032 com a estrategia (0.60, 0.40)
Jubeto marcou 30195 e perdeu 69805 com a estrategia (0.60, 0.40)
Manoel V. marcou 32856 e perdeu 67144 com a estrategia (0.33, 0.67)
Isaac marcou 33079 e perdeu 66921 com a estrategia (0.33, 0.67)
Filipe marcou 33201 e perdeu 66799 com a estrategia (0.33, 0.67)
Ana M. marcou 35291 e perdeu 64709 com a estrategia (0.35, 0.65)
Diego R. marcou 37366 e perdeu 62634 com a estrategia (0.50, 0.50)
Amanda marcou 37692 e perdeu 62308 com a estrategia (0.50, 0.50)
Gabriel C. marcou 39938 e perdeu 60062 com a estrategia (0.40, 0.60)
Rodrigo L. marcou 41168 e perdeu 58832 com a estrategia (0.45, 0.55)
Hokama marcou 42768 e perdeu 57232 com a estrategia (0.43, 0.57)
```

	b \ g	Esq	Dir
q	Esq	0, 1	1, 0
$1-q$	Dir	0.75, 0.25	0, 1

- O batedor quer manter o goleiro indiferente.

$$u_g(\langle (q, 1-q), Esq \rangle) = u_b(\langle (q, 1-q), Dir \rangle)$$
$$q + 0.25(1-q) = 1 - q$$
$$q + 0.25 - 0.25q = 1 - q$$
$$1.75q = 0.75$$
$$q = \frac{0.75}{1.75} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{3}{7}$$

b \ g	p Esq	$1-p$ Dir
Esq	0, 1	1, 0
Dir	0.75, 0.25	0, 1

- Analogamente o goleiro também quer manter o batedor indiferente.

$$\begin{aligned} u_b(\langle Esq, (p, 1-p)\rangle) &= u_b(\langle Dir, (p, 1-p)\rangle) \\ 1 - p &= 0.75p \\ 1 &= \frac{7}{4}p \\ p &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

- Nesse cenário o goleiro ganha 4/7.
- Se o goleiro continuasse com a estratégia (0.5, 0.5) o batedor poderia chutar sempre para a Esquerda e ganharia 1/2 das vezes (ao invés de 3/7).
- Se o batedor aumentasse o chute para o lado Esq, o goleiro poderia só ir para o lado esquerdo e ganhando ainda mais.
- Será que esse tipo de análise é feita em esportes profissionais?
  - provavelmente sim, dado que é cada vez mais comum a presença de matemáticos e estatísticos na comissão técnica.
  - mas vamos ver com dados.

	b \ g	$\frac{4}{7}$ Esq	$\frac{3}{7}$ Dir
$\frac{3}{7}$	Esq	0, 1	1, 0
$\frac{4}{7}$	Dir	0.75, 0.25	0, 1

- De fato ambos os jogadores tiveram que mudar sua estratégia, mesmo o goleiro que não teve sua "habilidade" alterada.
- Curiosamente o jogador deve chutar mais para o lado que ele é mais fraco.

Futebol Profissional

- Ignacio Palacios-Heurta (2003) "Professionals Play Minimax", *Review of Economic Studies*. Volume 70, pp 395-415.
- Analisou 1417 pênaltis em jogos da Fifa
- Ele considerou os chutes e defesas para a esquerda, direita e centro, considerando a perna do batedor. Mas vamos pegar a versão simplificada que considera apenas esquerda e direita e ignora a perna do batedor.

b \ g	Esq	Dir
Esq	0.58, 0.42	0.95, 0.05
Dir	0.93, 0.07	0.70, 0.30

	Gol. Esq	Gol. Dir	Bat. Esq	Bat. Dir
Nash	0.42	0.58	0.38	0.62
Real	0.42	0.58	0.40	0.60

Além do equilíbrio de Nash

- Quais possíveis soluções para um jogo?
- Podem existir outros resultados que façam sentido além do equilíbrio de Nash.
- Como obter/encontrar esses resultados?

Raymonde Sullivan foi uma enfermeira durante a Segunda Guerra Mundial no exército americano,

- em 2022 ela decidiu comemorar seu 100º aniversário pulando de paraquedas.

- Pense nesse pulo como um jogo. O instrutor poderia fazer a verificação do equipamento com segurança, ou poderia optar por economizar um tempo deixando de fazer essa tarefa.

- Raymonde poderia escolher 2 ações, pular ou não.
- Em qualquer escolha dela. Caso o instrutor deixasse de verificar o equipamento, havia uma penalidade bem grande, não só para Raymonde, mas como para o instrutor.
- Dessa forma "não verificar o equipamento" era uma estratégia dominada para o instrutor.
- Raymonde, admitindo que o instrutor é um jogador racional, soube que ele não escolheria essa estratégia, então ela decidiu que pularia de paraquedas.
- Raymonde provavelmente não estava procurando um equilibrio de Nash, mas acabou encontrando.

Em jogos de Soma Zero os seguintes objetivos coincidem:

- Tentar maximizar a sua recompensa.
- Tentar prejudicar ao máximo seu adversário.
- Tentar encontrar um equilíbrio de Nash.

No exemplo do chute de pênalti por exemplo. Também é possível que o batedor e o goleiro não estejam procurando um equilíbrio de Nash, apenas tentando maximizar sua própria recompensa.

Racionalidade

- Uma premissa básica é que jogadores são racionais, e portanto tentam maximizar a sua recompensa.
- Todos os jogadores sabem que os outros jogadores jogarão assim.
- E se eles sabem disso, eles sabem que os outros sabem disso.
- E claro que sabem que outros sabem que eles sabem que os outros sabem...

Remoção Iterativa

de estratégias estritamente dominadas

- Uma estratégia estritamente dominada nunca pode ser uma MR (melhor resposta)
- Vamos removê-las já que não serão jogadas.
- Com o jogo reduzido, podemos voltar a analisá-lo e repetir o processo.
- Esse processo é chamado de **Remoção Iterativa de estratégias estritamente dominadas**

Lembrando que uma estratégia $s_i' \in S_i$ é estritamente dominada por uma outra estratégia $s_i \in S_i$ se

$$u_i(s_i', s_{-i}) < u_i(s_i, s_{-1}), \quad \forall s_{-i} \in S_{-i}.$$

	E	C	D
A	3, 0	2, 1	0, 0
M	1, 1	1, 1	5, 0
B	0, 1	4, 2	0, 1

D é estritamente dominada por C

	E	C
A	3, 0	2, 1
M	1, 1	1, 1
B	0, 1	4, 2

M é estritamente dominada por A

	E	C
A	3, 0	2, 1
B	0, 1	4, 2

E é estritamente dominada por C

	C
A	2, 1
B	4, 2

A é estritamente dominada por B

	C
B	4, 2

De forma que apenas $\langle B, C \rangle$ é um resultado viável. Isso também mostra que esse é o único equilíbrio de Nash.

Outro exemplo:

	E	C	D
A	3, 1	0, 1	0, 0
M	1, 1	1, 1	5, 0
B	0, 1	4, 1	0, 0

D é estritamente dominada por C (e por E)

	E	C
A	3, 1	0, 1
M	1, 1	1, 1
B	0, 1	4, 1

Agora nenhuma estratégia pura domina estritamente outra. Entretanto observe a estratégia mista $(0.5, 0, 0.5)$ do jogador 1.

		E	C
0.5	A	3, 1	0, 1
	M	1, 1	1, 1
0.5	B	0, 1	4, 1
		1.5, 1	2, 1

Portanto essa estratégia mista domina M, e portante M pode ser removida.

	E	C
A	3, 1	0, 1
B	0, 1	4, 1

Agora não conseguimos reduzir mais o problema, e devemos seguir com outro tipo de análise para encontrar os equilíbrios. De fato, nesse jogo existe um número infinito de equilíbrios (talvez você esteja interessado em encontra pelo menos um).

A **Remoção Iterativa de estratégias estritamente dominadas**

- Preserva equilíbrios de Nash.
- Pode ser usado como um passo de pré-processamento antes de calcular os equilíbrios.
- Alguns jogos podem ser completamente resolvidos com essa técnica. Esses jogos são chamados de **solucionável por dominância**.
- A ordem de remoção das estratégias estritamente dominadas não importa.

- Podemos fazer a remoção de estratégias fracamente dominadas

Definição: Domínação fraca

s_i **domina fracamente** s_i' se
$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$ e
$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i})$, para algum $s_{-i} \in S_{-i}$.

- O problema é que estratégias fracamente dominadas ainda podem ser MR.
- Nesse caso a ordem das remoções importa.
- Pelo menos um equilíbrio é preservado.

Exercício

	E	C	D
A	4, 3	3, 5	3, 5
B	3, 4	5, 3	3, 4

- Qual(is) o(s) resultado(s) da remoção iterativa de estratégias fracamente dominadas?

Aplicação

Alimentando porcos

- Experimento de Baldwin e Meese (1979), "Social Behavior in Pigs Studied by Means of Operant Conditioning", *Animal Behavior*, Vol 27, pp 947-957. (veja também Harrington (2011) *Gamos, Strategies and Decision Making, Wroth Publishers*.)
- Dois porcos são colocados juntos, um é grande e o outro menor.
- É necessário pressionar uma alavanca para que a comida chegue. Mas alavanca e comida estão em lados opostos da sala.
- Os porcos então precisam pressionar a alavanca e correr para o outro lado.
- O porco que aperta a alavanca demora mais para chegar do outro lado.
- a cada 10 unidades de comida
  - se o porco grande chega primeiro, o pequeno como 1 e o grande 9
  - se o porquinho chega primeiro então ele come 4 e o grande 6
  - se eles chegam ao mesmo tempo, então o pequeno come 3 e o grande 7.
  - apertar a alavanca e correr consome calorias equivalente a 2 unidades de comida.

p \ g	Aperta	Espera
Aperta	1, 5	-1, 9
Espera	4, 4	0, 0

p \ g	Aperta	Espera
Aperta	1, 5	-1, 9
Espera	4, 4	0, 0

- o porquinho pequeno tem uma estratégia dominante de “Esperar”, restando ao porco grande apenas apertar a alavanca.

- Deram aos porcos dez rodadas para aprender, e depois fizeram 15 minutos de medição, medindo o comportamento quando colocados sozinhos na sala, e quando colocados juntos.

	Sozinhos	Juntos
Grande Aperta	75	105
Pequeno Aperta	70	5

- Os porquinhos provavelmente não calcularam suas estratégias aplicando o método da remoção iterativa de estratégias estritamente dominadas.
- Mas eles parecem aprender e responder a incentivos.
- Eles devem aprender a não jogar estratégias estritamente dominadas.
- E devem aprender a não jogar estratégias estritamente dominadas do que sobra.
- Aprendizado, Evolução e sobrevivências dos mais aptos são ferramentas poderosas da Teoria dos Jogos.

Estratégias Maxmin

- A **estratégia maxmin** de um jogador i é a estratégia que maximiza a sua recompensa de pior-caso, na situação de que todos os outros jogadores $(-i)$ estão interessados em causar o maior prejuízo à i.
- O **valor maxmin** (ou **nível de segurança**) do jogador i é a recompensa garantida por essa estratégia.

Definição: Maxmin

A **estratégia maxmin** do jogador i é $\arg\max_{s_i} \min_{s_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$, e o **valor maxmin** do jogador i é $\max_{s_i} \min_{s_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})$.

	E	D
A	1, 2	4, 3
B	3, 2	2, 4

- Por que um jogador iria querer jogar uma estratégia maxmin?
  - Um jogador conservador pode estar maximizando sua recompensa no pior caso.
  - Um jogador pode não conhecer as recompensas para os outros jogadores.
  - Um jogador paranoico que acredita que todo mundo está atrás dele.

Estratégia Minmax

- A **estratégia minmax** de um jogador i contra um jogador $-i$ (em um jogo com 2 jogadores) é a estratégia que minimiza a recompensa de melhor-caso do jogador $-i$.
- O **valor minmax** do jogador $-i$ é a sua recompensa garantida.

Definição: Minmax com 2 jogadores

Em um jogo de 2 jogadores, a **estratégia minmax** do jogador i contra o jogador $-i$ é $\arg\min_{s_i} \max_{s_{-i}} u_{-i}(s_i, s_{-i})$, e o **valor minmax** do jogador $-i$ é $\min_{s_i} \max_{s_{-i}} u_{-i}(s_i, s_{-i})$.

- Por que um jogador iria querer jogar uma estratégia minmax?
  - Para prejudicar o adversário.
  - Um jogo de Soma zero, prejudicar o seu adversário significa maximizar o seu benefício.

Teorema Minmax

Teorema: Minimax (von Neumann, 1928)

Em qualquer jogo finito, de 2 jogadores e soma-zero, em qualquer equilíbrio de Nash, cada jogador recebe uma recompensa que é igual a ambos o seu **valor maxmin** e o seu **valor minmax**

1. O valor maxmin de cada jogador é igual ao seu valor minmax. O valor maxmin para o jogador 1 é chamado de **valor do jogo**.
2. Para ambos os jogadores, o conjunto de estratégias maxmin coincide com o conjunto de estratégias minmax.
3. Qualquer perfil de estratégia maxmin (ou minmax, já que são as mesmas) é um equilíbrio de Nash. Além disso, esses são todos os equilíbrios de Nash existentes. Consequentemente, todos os equilíbrios de Nash tem o mesmo vetor de recompensa (aqueles que o jogador 1 consegue o valor do jogo).

	E	D
A	2, 1	0, 2
B	1, 2	3, 0

- O que acontece se ambos jogarem Maxmin?
- O que acontece se ambos jogarem Minmax?

	Cara	Coroa
Cara	1, -1	-1, 1
Coroa	-1, 1	1, -1

- Qual a estratégia Maxmin para o jogador 1?