

Referências

Teoria dos Jogos

Hokama PhD

17 de março de 2023

- ▶ Game Theory, Stanford University on Coursera. Matthew O. Jackson, Yoav Shoham e Kevin Leyton-Brown. <https://www.coursera.org/learn/game-theory-1>
- ▶ Algorithmic Game Theory, Stanford Fall 2013, Tim Roughgarden. <https://timroughgarden.org/f13/f13.html>
- ▶ Twenty lectures on algorithmic game theory. Tim Roughgarden. Cambridge University Press, 2016.
- ▶ Tópicos da Teoria dos Jogos em Computação. In: Anais do 30 o Colóquio Brasileiro de Matemática. Schouery, R. C. S., Lee, O., Miyazawa, F. K., e Xavier, E. C. Rio de Janeiro. Editora do IMPA, 2015.

O que é um Jogo?

- ▶ *jankenpon* (Pedra, papel e tesoura);
- ▶ poker;
- ▶ futebol;

Mas podemos considerar qualquer interação estratégica entre agentes egoístas, incluindo os jogos citados, mas também

- ▶ leilões
- ▶ mercado financeiro
- ▶ conflitos internacionais
- ▶ interações presa-predador

Teoria dos Jogos

- ▶ Tradicionalmente uma disciplina da economia, mas também muito importante para ciência social, ciência política, biologia, psicologia, etc.
- ▶ Então o que Computação tem haver com isso?
 - ▶ Muitas (talvez a maioria) das interações entre são feitas por computadores;
 - ▶ Aplicações como o leilão de palavras chaves no google;
 - ▶ Trocas de arquivos Peer to Peer;

Essas e várias outras aplicações exigem formas de modelar os problemas, e ainda formas computacionais de resolver esses problemas.

Exemplos

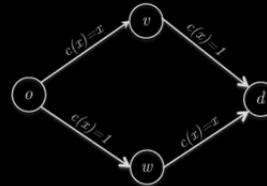
- ▶ A teoria dos jogos vai nos prover ferramentas para pensar como essas interações devem ser estruturadas, por um governo ou um desenvolvedor de sistemas, de forma a levar a um bom resultado.
 - ▶ Todo time quer a maior medalha que conseguir.
 - ▶ O comitê e patrocinadores querem as melhores partidas possíveis.
 - ▶ No grupo D, a dupla dinamarquesa Christinna Pedersen e Kamilla Rytter Juhl (PJ) conseguiu surpreendentemente ganhar da dupla chinesa Tian Qing e Zhao Yunlei (QY) consideradas (de longe) a melhor dupla do campeonato.
 - ▶ QY então ficaram em segundo lugar do grupo.
- Olimpíada de 2012, badmínton de Duplas Feminino
- ▶ Duas fases, a primeira de grupos, e a segunda de mata-mata.
 - ▶ 16 times divididos em 4 grupos. Em cada grupo todas as duplas se enfrentam. As duas duplas com mais pontos vencem e vão para o mata-mata.
 - ▶ Desalinhamento entre os interesses dos jogadores e do comitê olímpico (e patrocinadores).
 - ▶ Todo time quer a maior medalha que conseguir.
 - ▶ O comitê e patrocinadores querem as melhores partidas possíveis.
 - ▶ A próxima partida (Grupo A) era entre uma outra dupla Chinesa Wang Xiaoli e Yu Yang (XY) contra as coreanas Kim Ha-na e Jung Kyung-eun (HK). Ambas já estavam qualificadas, faltando apenas o jogo entre elas para decidir o grupo.
 - ▶ A dupla que ganhasse, ficaria em primeiro no grupo e enfrentaria QY nas semi-finais (se ambos chegassem lá).
 - ▶ Enquanto o Segundo lugar no grupo, enfrentaria QY apenas na final (garantindo pelo menos uma medalha de prata)
 - ▶ Tal diferença fez com que XY e HK deliberadamente tentassem perder a partida.

Exemplo 2

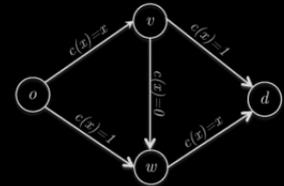
- ▶ No grupo C aconteceu exatamente a mesma coisa entre uma outra dupla coreana e a dupla da Indonésia.
- ▶ O resultado é que esses 4 times foram desclassificados e de fato QY ganharam o ouro.
- ▶ Moral da história: **As regras importam!**
- ▶ Assumir que os agente irão sempre agir pelo seu próprio interesse.

Quando o comportamento egoísta é bom?

- ▶ Considere a seguinte rota:



(a) Initial network



(b) Augmented network

Outros Exemplos

- ▶ O comportamento egoísta não minimiza o tempo total. 2 horas vs. $3/2$ horas.
- ▶ Essa razão entre o tempo de 2 horas e o tempo ótimo

$$\frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}$$

é chamada de o **preço da anarquia**.

Intuitivamente quanto mais perto de 1, mais robusto é o seu sistema.

- ▶ Molas e Cordas
- ▶ Pesagem em lutas (UFC, Boxe)

Agentes egoístas

- ▶ Não significa que os agentes são adversários, ou que apenas se importem com eles mesmos.
- ▶ mas o agente egoísta tem sua própria descrição dos possíveis resultados e age de acordo com essa descrição.

Cada agente tem uma **função de utilidade** que

- ▶ quantifica o grau de preferência entre as alternativas;
- ▶ explica o impacto da incerteza; (o quanto o agente prefere uma determinada probabilidade)
- ▶ Decisões racionais: os agentes agirão para maximizar a sua utilidade esperada.

- ▶ **Recompensas** que motivam os jogadores.
 - ▶ Só estão interessados no lucro?
 - ▶ Estão se importando com outros jogadores?
- ▶ O estudo da Teoria dos Jogos pode nos auxiliar a obter o melhor resultado dessas interações estratégicas.

Jogos - Definição

- ▶ **Jogadores** que estão tomando as decisões,
 - ▶ pessoas (fazendo uma compra por exemplo)
 - ▶ governos (negociando um tratado de comércio)
 - ▶ empresas (desenvolvendo novos produtos)
 - ▶ são funcionários das empresas (vale a pena detalhar o modelo?)
- ▶ **Ações** que os jogadores podem tomar,
 - ▶ dar um lance em um leilão;
 - ▶ fechar uma barganha;
 - ▶ decidir quando vender um papel no mercado;
 - ▶ decidir como votar.

Representações Padrões

- ▶ **Forma Normal** (Forma Matricial, Forma Estratégica) lista quais as recompensas em função das ações dos jogadores.
 - ▶ Funciona como se os jogadores se movessem simultaneamente;
 - ▶ Mas as estratégias podem representar várias coisas.
- ▶ **Forma Extensiva** inclui o tempo dos movimentos.
 - ▶ Os jogadores se movem sequencialmente, o que pode ser representado como uma árvore. Exemplo: No Xadrez, as brancas jogam primeiro, depois as negras, sabendo qual foi o movimento das brancas;
 - ▶ Mantém o que cada jogador sabe quando faz uma ação. Exemplo: No poker cada jogador apenas têm informações sobre suas cartas.

A Forma Normal

Um jogo finito com n jogadores na Forma normal será representado pela tripla $\langle N, A, u \rangle$, em que,

- ▶ $N = \{1, \dots, n\}$ é o conjunto finito de n jogadores, indexados por i ,
- ▶ O conjunto de ações de um jogador i é A_i ,
 - ▶ $a = (a_1, \dots, a_n) \in A = A_1 \times \dots \times A_n$ é chamado de um **perfil de ações**
- ▶ $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ é a **função de utilidade** para o jogador i .
 - ▶ $u = (u_1, \dots, u_n)$, é um perfil de funções de utilidade.

Jogo de 2 jogadores

Um jogo com apenas 2 jogadores e um conjunto pequeno de ações pode facilmente ser representado na Forma Normal utilizando uma matriz.

- ▶ O primeiro jogador é o jogador "linha", e o segundo jogador é o jogador "coluna";
- ▶ Cada linha corresponde à ação $a_1 \in A_1$, e cada coluna corresponde a uma ação $a_2 \in A_2$;
- ▶ Cada célula lista os valores de utilidade (recompensa), primeiro do jogador linha e depois do jogador coluna.

jankenpon

	Pedra	Papel	Tesoura
Pedra	0, 0	-1, 1	1, -1
Papel	1, -1	0, 0	-1, 1
Tesoura	-1, 1	1, -1	0, 0

Combinando Moedas

	Cara	Coroa
Cara	1, -1	-1, 1
Coroa	-1, 1	1, -1

Jogos de competição pura

Nesses jogos, assim como nos dois exemplos anteriores os jogadores tem interesses **exatamente opostos**

- ▶ Exatamente 2 jogadores.
- ▶ Para todos os perfis de ações $a \in A$, $u_1(a) + u_2(a) = c$ para alguma constante c . (se $c = 0$ chamamos de um jogo de soma zero)
- ▶ Podemos definir apenas a função utilidade para um jogador (já que o outro podemos inferir)

Jogos de Cooperação

Os jogadores tem **exatamente os mesmos** interesses

- ▶ sem conflitos.
- ▶ Para todos os perfis de ações $a \in A$, $\forall i, j$, $u_i(a) = u_j(a)$
- ▶ podemos escrever as recompensas com apenas um número em cada célula da matriz.

Escolhendo um lado da calçada

	Esq	Dir
Esq	1, 1	0, 0
Dir	0, 0	1, 1

Batalha do Relacionamento¹

- ▶ Em um relacionamento de duas pessoas é comum um deles querer ver um filme leve, como uma comédia romântica (CR).
- ▶ E o outro querer ver um mais pesado, como um terror (TR)

	CR	TR
CR	2, 1	0, 0
TR	0, 0	1, 2

- ▶ esse tipo de jogo combina elementos de cooperação e competição.

¹ou batalha dos sexos

O Jogo da Rebelião

- ▶ **Jogadores:** $N = \{1, \dots, 10.000.000\}$;
- ▶ **Ações** para cada jogador i ,
 $A_i = \{\text{Rebelar}, \text{Conformar}\}$
- ▶ **Função de utilidade** para o jogador i :
 - ▶ $u_i(a) = 1$ se $|\{j : a_j = \text{Rebelar}\}| \geq 2.000.000$
 - ▶ $u_i(a) = -1$ se $|\{j : a_j = \text{Rebelar}\}| < 2.000.000$ e $a_i = \text{Rebelar}$
 - ▶ $u_i(a) = 0$ se $|\{j : a_j = \text{Rebelar}\}| < 2.000.000$ e $a_i = \text{Conformar}$

Concurso de Beleza de Keynes

- ▶ Em um jornal britânico, entre várias fotos de mulheres, os jogadores deveriam dizer qual delas seria considerada a mais bonita pelos outros jogadores.

Prevendo o comportamento dos Jogadores

O economista britânico **John Maynard Keynes**

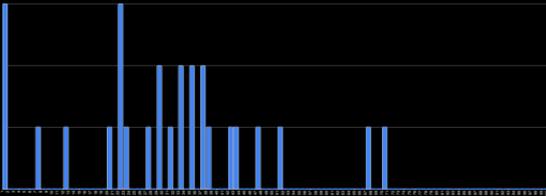
- ▶ Suponha que você tem uma papel (ação) de uma empresa e o preço está subindo
- ▶ Você acredita que o preço do papel está muito alto.
- ▶ Você quer vender esse papel, mas quer esperar até que o preço esteja perto do topo.
- ▶ Ou seja, você quer sair desse mercado pouco antes que todos os outros investidores saiam.
- ▶ Como os outros jogadores vão agir? O que você deve fazer em resposta?

Concurso de Beleza de Keynes - Estilizado

- ▶ Cada jogador vai escolher um inteiro entre 1 e 100.
- ▶ Vamos calcular a média, depois pegar dois terços.

$$X = \frac{2}{3} * \text{média}$$

- ▶ O jogador que escolher o inteiro mais próximo de X ganha um prêmio, os outros jogadores não ganham nada.
- ▶ Empates são resolvidos por sorteio.



- ▶ Se fosse permitido mudar seu palpite, para qual você mudaria?
- ▶ Repita esse processo, para todo mundo, qual o resultado esperado?
- ▶ Quando ninguém mais gostaria de mudar de palpite?

Equilíbrio de Nash

- ▶ **John Nash** foi um matemático americano, professor de Princeton.
- ▶ Ganhou o Nobel de economia pelo seu trabalho em teoria dos jogos em economia.
- ▶ Em um Equilíbrio de Nash:
 - ▶ A ação de cada jogador maximiza a sua recompensa, dado a ação dos outros jogadores.
 - ▶ Deve ser auto-consistente ou estável.
 - ▶ Ninguém tem um incentivo de mudar sua ação se um equilíbrio é jogado.
 - ▶ Alguém sempre vai ter um incentivo de mudar de ação se o jogo não estiver em um equilíbrio.

Equilíbrio de Nash

- ▶ Devemos esperar que um equilíbrio seja jogado?
- ▶ Devemos esperar que um não-equilíbrio seja jogado?

Melhor Resposta

- ▶ Se você (jogador) soubesse o que todos os demais jogadores farão, seria fácil escolher a sua ação.
- ▶ Seja $a_{-i} = \langle a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \rangle$, então $a = (a_{-i}, a_i)$;

Definição: Melhor Resposta
 $a_i^* \in MR(a_{-i})$ se e somente se
 $\forall a_i \in A_i, u_i(a_i^*, a_{-i}) \geq u_i(a_i, a_{-i})$.

Considere o seguinte jogo:

j1 \ j2	Rebelar	Conformar
Rebelar	2, 2	-1, 1
Conformar	1, -1	0, 0

Quando o Jogador 1 decide se conformar, qual a Melhor Resposta para o Jogador 2? Resp: Conformar

Considere o seguinte jogo:

j1 \ j2	x	y	z
a	1, 2	2, 2	5, 1
b	4, 1	3, 5	3, 3
c	5, 2	4, 4	7, 0
d	2, 3	0, 4	3, 0

Quando o Jogador 1 joga d, quais as Melhores Respostas para o Jogador 2? Resp: y

Equilíbrio de Nash

- ▶ Mas nenhum agente sabe o que os outros farão
- ▶ O que podemos dizer sobre as ações que serão tomadas?
- ▶ A ideia é olhar para os perfis de ações **estáveis**.

Definição: Equilíbrio de Nash
 $a = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ é um **equilíbrio de Nash** (“de estratégia pura”) se e somente se $\forall i, a_i \in MR(a_{-i})$.

Exemplo: O Dilema do Prisioneiro

- ▶ Dois contraventores foram pegos pela polícia.
- ▶ Eles são colocados em salas separadas na delegacia.
- ▶ Para cada um deles é oferecido duas possibilidades:
 - ▶ 1) ficar 1 anos na cadeia por um crime menor que a policia já tem provas o suficiente.
 - ▶ 2) Contar sobre o crime maior que cometeram, e assim por contribuir com a policia ele fica livre da cadeia e o comparça fica 4 anos preso.
- ▶ Porém se ambos detalharem o crime, ambos ficam presos por 3 anos.

j1 \ j2	Calar	Delatar
Calar	-1, -1	-4, 0
Delatar	0, -4	-3, -3

O que será que cada prisioneiro vai fazer?
 Informalmente, o Equilibrio de Nash são as células que nenhum jogador gostaria de mudar sozinho, ou seja, não mudar só de linha ou só de coluna.

	Esq	Dir
Esq	1, 1	0, 0
Dir	0, 0	1, 1

	CR	TR
CR	2, 1	0, 0
TR	0, 0	1, 2

	Cara	Coroa
Cara	1, -1	-1, 1
Coroa	-1, 1	1, -1

Considere o seguinte jogo:

j1 \ j2	x	y	z
a	1, 2	2, 2	5, 1
b	4, 1	3, 5	3, 3
c	5, 2	4, 4	7, 0
d	2, 3	0, 4	3, 0

Quais estados formam um equilibrio de Nash? Resp: (c, y)