Matemática Discreta

Pedro Hokama

Fontes

- Gomide, Anamaria; Stolfi, Jorge. Elementos de Matematica Discreta para Computação.
- Rosen, Kenneth H. Discrete mathematics and its applications. McGraw-Hill Education, 8th Edition, 2019.

Contagem

- Um problema comum em matemática, e especialmente em computação, é contar objetos matemáticos (conjuntos, funções, sequências, etc.) com determinadas propriedades.
- Por exemplo, quantas maneiras diferentes há de escolher 5 cartas de um baralho com 52 cartas? Quantas palavras (com ou sem significado) podem ser formadas com 5 letras distintas? Quantas maneiras há de ordenar um arquivo de n nomes?
- Já encontramos alguns problemas desse tipo nos capítulos anteriores. Por exemplo, vimos que o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é 2^n.

- é importante notar se os objetos que aparecem no enunciado são considerados distintos ou não.
- Por exemplo, observe a questão "quantos resultados é possivel obter quando dois dados são lançados sobre uma mesa?"
- Se os dados são considerados distintos (por exemplo, um vermelho e um verde), a resposta é $6 \times 6 = 36$. Note que o resultado "2 no vermelho e 4 no verde" é considerado diferente de "4 no vermelho e 2 no verde".
- Porém, se os dados são considerados indistinguíveis, a resposta é apenas 21; pois, por exemplo, o resultado "2 em um dado e 4 no outro" é o mesmo que "4 em um dado e 2 no outro".

Exercício: Liste e conte todas as maneiras possíveis de colocar 3 bolas, rotuladas de 1 a 3, em duas caixas rotuladas A e B. Note que cada caixa pode ficar vazia ou com mais de uma bola.

Agora responda à mesma pergunta, supondo que

a) As bolas são todas iguais e sem rótulos, mas as caixas ainda são distintas;
b) As bolas são todas distintas, mas as caixas são iguais e sem rótulos;
c) As bolas são todas iguais e as caixas também, todas sem rótulos.

Contagem de relações

- Suponha que X e Y são conjuntos finitos, com $|X| = m$ e $|Y| = n$. Quantas relações existem de X para Y? Lembramos que uma relação de X para Y é um subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$, que tem mn elementos.
- Concluímos que a resposta é 2^{mn}. Pelo mesmo argumento, o número de relações sobre o conjunto X (isto é, de X para X) é 2^{m^2}.
- Quantas são as relações **reflexivas** sobre o conjunto X? Para responder a esta pergunta, basta lembrar que uma relação reflexiva sobre X deve conter a relação de identidade $\mathcal{I}_X$, que consiste dos pares (a, a) com $a \in X$. Então, cada relação que queremos contar consiste desses m pares, mais um subconjunto arbitrário dos demais $m^2 - m = m(m-1)$ pares de $X \times X$. Concluímos que o número de relações reflexivas sobre X é $2^{m(m-1)}$.

Contagem de funções

- Suponha ainda que X e Y são conjuntos finitos, com $|X| = m$ e $|Y| = n$. Quantas **funções** distintas existem de X para Y?
- Lembramos que, se $\mathcal{F}$ é uma dessas funções, então para cada elemento a de X deve existir um único par em $\mathcal{F}$ cujo primeiro membro é a.
- Portanto $\mathcal{F}$ tem apenas m pares. Além disso, em cada um desses pares, o segundo membro (o valor $\mathcal{F}(a)$ da função) pode ser qualquer um dos n elementos de Y.
- Temos então n valores possíveis da função para cada um dos m elementos de X. Concluímos que o número de funções de X para Y é n^m.

Exercício: Quantas maneiras há de empilhar cinco frutas, que podem ser laranjas (indistinguíveis entre si) ou maçãs (também indistinguíveis) dentro um vaso estreito de vidro?

Princípio multiplicativo da contagem

- Quantas maneiras existem de enfileirar 7 crianças, sendo 4 meninas e 3 meninos, de modo a alternar meninos e meninas.
- Podemos pensar em formar a fila com 7 decisões sucessivas, onde na decisão número i escolhemos a criança que vai ficar na posição i da fila.
- Assim, começamos escolhendo uma das quatro meninas para ficar no começo da fila (pois se escolhermos um menino não será possível intercalar as demais).
- Em seguida temos que escolher um dos 3 meninos para ficar em segundo lugar.
- Depois temos que escolher outra menina, que não pode ser a que ficou em primeiro lugar; temos portanto apenas 3 alternativas possíveis nessa escolha.
- Analogamente, temos apenas 2 alternativas para o quarto lugar (um dos dois meninos ainda não escolhidos), 2 alternativas para o quinto (uma de duas meninas), e apenas 1 alternativa para o sexto e o sétimo lugares.
- Pode-se ver que qualquer disposição alternada das crianças pode ser obtida por esse processo; e que qualquer variação nas escolhas resultará em uma disposição diferente. Portanto, o numero de maneiras de arranjar as crianças é

$$4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 144 \tag{1}$$

Princípio multiplicativo da contagem

- O raciocínio usado neste problema é uma instância do **princípio multiplicativo da contagem**, ou **princípio fundamental da contagem**.
- Para usar esse princípio, temos que imaginar o processo de construção ou escolha de um dos objetos a contar como uma sequência finita de decisões $D_1, D_2, \ldots, D_r$, de tal forma que cada combinação diferente de escolhas nessas decisões produza um objeto diferente, e todos os objetos possam ser obtidos por esse processo.
- Nesse caso, se cada decisão D_i pode ter n_i escolhas distintas, então o número de objetos será

$$n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r \tag{2}$$

Exercício: Quantos números inteiros existem entre 1000 e 9999 (inclusive ambos) com todos os algarismos distintos?

Permutações

- Seja X um conjunto finito de n elementos. Informalmente, uma **permutação de** X é uma lista dos elementos de X em determinada ordem, sem repetições nem omissões.
- Mais precisamente, podemos definir uma permutação de X como uma função f bijetora do conjunto $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ para o conjunto X. Podemos interpretar o valor de $f(k)$ como o elemento que está na posição k da lista, contando a partir de 0.
- Por exemplo, suponha que X é o conjunto das vogais, $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{o}, \mathtt{u}\}$. A função

$$\{(0, \mathtt{u}), (1, \mathtt{e}), (2, \mathtt{i}), (3, \mathtt{a}), (4, \mathtt{o})\}$$

é uma permutação de X. Esta função pode ser escrita também como

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \mathtt{u} & \mathtt{e} & \mathtt{i} & \mathtt{a} & \mathtt{o} \end{pmatrix}$$

ou como a sequência $(\mathtt{u}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{a}, \mathtt{o})$ ou, simplesmente, $\mathtt{ueiao}$; ficando subentendido que os índices da sequência começam com 0. Duas outras permutações, distintas dessa, são $\mathtt{uieao} = (\mathtt{u}, \mathtt{i}, \mathtt{e}, \mathtt{a}, \mathtt{o})$ e $\mathtt{eaoiu} = (\mathtt{e}, \mathtt{a}, \mathtt{o}, \mathtt{i}, \mathtt{u})$.

- Quantas permutações de $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{o}, \mathtt{u}\}$ existem? Quando tentamos escrever uma permutação f, elemento a elemento, é fácil ver que temos n escolhas para o elemento $f(0)$ (qualquer elemento de X); $n-1$ escolhas para $f(1)$ (qualquer elemento de X, exceto $f(0)$); $n-2$ para $f(2)$ (qualquer elemento exceto $f(0)$ e $f(1)$); e assim por diante. Para o penúltimo elemento $f(n-2)$ temos apenas 2 possibilidades e para o último $f(n-1)$ temos apenas uma. Qualquer série de escolhas resulta em uma permutação distinta. Portanto o número de permutações distintas é

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1 = n! \tag{3}$$

- Assim, por exemplo, o número de permutações das cinco vogais é $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

- Observe que se o conjunto X é vazio (isto é, se $n = 0$) há apenas uma permutação possível, que é a sequência vazia $()$ (ou seja, o conjunto vazio de pares índice-elemento). Esta observação justifica a definição de $0!$ como sendo 1.
- O seguinte exemplo ilustra um uso menos trivial de permutações. Suponha que n pessoas (com $n \geq 2$) devem sentar em uma fila de n cadeiras, mas duas dessas pessoas, Alice e Beto, são um casal e devem ficar um ao lado do outro. De quantas maneiras isto pode ser feito?
- $2(n-1)!$

- O fatorial de n cresce muito rapidamente quando n aumenta. Por exemplo,

$$20! = 2.432.902.008.176.640.000$$

  ou seja, mais de dois quintilhões (bilhões de bilhões).
- O fatorial de 50 é aproximadamente 3.04×10^{64}, que é muito maior que o número de átomos no sistema solar.
- Assim, embora possamos facilmente calcular o **número** de permutações de um baralho de 52 cartas, é impossível **gerar** todas essas permutações em qualquer computador concebível atualmente.

Fórmula de Stirling

- A fórmula $n \times (n-1) \times \ldots \times 2! \times 1!$ não é adequada para calcular $n!$ quando n é muito grande.
- Por exemplo, para calcular $1000000!$ temos que multiplicar 1000000 de números, e o produto vai crescendo a cada passo; o resultado tem mais de 5 milhões de algarismos.
- Uma fórmula que permite estimar o valor aproximado do fatorial com menos trabalho foi encontrada por Abraham de Moivre (1667–1754) e James Stirling (1692–1770):

$$\ln n! \approx n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln(2\pi n)$$

  onde $\ln$ é o logaritmo natural (na base $e = 2.7182818\ldots$). Aplicando $\exp(x) = e^x$ em ambos os lados temos

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Arranjos

- Dado um conjunto finito X de n elementos, e um inteiro $r \in \mathbb{N}$, definimos um **arranjo de** r **elementos de** X como uma sequência de elementos de X com comprimento r, em determinada ordem e sem repetições. Ou seja, uma função injetora dos inteiros $\{0..r-1\}$ para o conjunto X.

- Por exemplo, todos os arranjos de 3 elementos do conjunto $X = \{\mathtt{a}, \mathtt{e}, \mathtt{i}, \mathtt{o}, \mathtt{u}\}$ são

aei	aie	eai	eia	iae	iea
aeo	aoe	eao	eoa	oae	oea
aio	aoi	iao	ioa	oai	oia
aeu	aue	eau	eua	uae	uea
aiu	aui	iau	iua	uai	uia
aou	auo	oau	oua	uao	uoa
eio	eoi	ieo	ioe	oei	oie
eiu	eui	ieu	iue	uei	uie
eou	euo	oeu	oue	ueo	uoe
iou	iuo	oiu	oui	uio	uoi

onde aie significa a sequência $(\mathtt{a}, \mathtt{i}, \mathtt{e})$, ou seja a função

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \mathtt{a} & \mathtt{i} & \mathtt{e} \end{pmatrix}$$

e assim por diante.

- Concluímos que o número de tais arranjos (ou seja, o número de funções injetoras de um conjunto de r elementos para um conjunto de n elementos) é

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) \tag{4}$$

- Em muitos livros este número é denotado por A_n^r (lê-se "arranjos de n, tomados r a r"). Alguns autores usam a notação A_r^n. Outra notação, usada por Knuth, é $n^{\underline{r}}$ (lê-se "n à potência r caindo"). Este número pode ser calculado a partir de fatoriais, pela fórmula

$$\frac{n!}{(n-r)!} \tag{5}$$

- Note que os fatores do denominador cancelam uma parte dos fatores do numerador, deixando apenas os fatores da fórmula (**??**). Assim, por exemplo, o número de arranjos de 3 vogais, listados acima, é $5!/(5-3)! = 5 \times 4 \times 3 = 60$.

- Uma maneira de entender a fórmula $\frac{n!}{(n-r)!}$ é considerar todas as $n!$ permutações de n elementos, e imaginar o que ocorre se tomarmos apenas os r primeiros elementos de cada uma, para obter os arranjos. Note que duas permutações que diferem apenas na ordem dos $n-r$ elementos descartados produzem o mesmo arranjo. Há $(n-r)!$ maneiras de ordenar esses elementos descartados, sem mexer nos r primeiros. Portanto, das $n!$ permutações, $(n-r)!$ correspondem a um mesmo arranjo.

Combinações

- Outro problema muito comum é contar o número de subconjuntos de tamanho r de um conjunto X de n elementos. Note que este problema é diferente de contar os arranjos de r elementos de X: em ambos os casos desejamos tomar r elementos de X, sem repetições; mas neste caso a ordem dos elementos em cada subconjunto não interessa.
- Estes subconjuntos são também chamados de **combinações** de r elementos de X. Assim, por exemplo, as combinações de 3 vogais são

aei	aeo	aio	aeu	aiu
aou	eio	eiu	eou	iou

onde aiu significa o sub-conjunto $\{\mathtt{a}, \mathtt{i}, \mathtt{u}\}$, e assim por diante.

- O número de tais combinações acima é denotado por C_n^r (ou C_r^n) por alguns autores, porém a notação mais comum é $\binom{n}{r}$, que se lê "combinações de n, tomados r a r".
- Para contar as combinações, podemos determinar o número de arranjos de r elementos, e contar apenas uma vez todos os arranjos que diferem apenas na ordem dos elementos. Por exemplo, os seis arranjos `aio`, `aoi`, `iao`, `ioa`, `oai` e `oia` correspondem à mesma combinação $\{\mathtt{a}, \mathtt{i}, \mathtt{o}\}$.

- Como temos r elementos em cada arranjo, concluímos que cada combinação corresponde a $r!$ arranjos diferentes. Portanto, o número de combinações é

$$\frac{A_n^r}{r!} = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}{r \times (r-1) \times \cdots \times 1} \tag{6}$$

Esta fórmula pode ser escrita em termos de fatoriais

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \tag{7}$$

Exercício: Quantas "mãos" diferentes de cinco cartas podem ser obtidas de um baralho de 52 cartas?

Casos especiais

- Alguns casos especiais são dignos de nota. Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

- Para todo inteiro n positivo,

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

- e, para todo inteiro n maior que 1,

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

- Além disso, é óbvio que $\binom{n}{r}$ é zero se r é maior que n.
- A definição de $\binom{n}{r}$ não faz muito sentido quando n e/ou r são negativos. Porém, a experiência mostra que muitos teoremas e fórmulas ficam mais simples quando definimos $\binom{n}{r} = 0$ quando $n < 0$ ou $r < 0$.

Propriedades

- A função $\binom{n}{r}$ tem várias propriedades interessantes. Por exemplo, para todo $n, r \in \mathbb{N}$, temos

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

- Para demonstrar esta identidade, considere um conjunto X de n elementos, e observe que para cada conjunto de r elementos existe um único conjunto de $n-r$ elementos que é seu complemento, e vice-versa.
- Ou seja, a operação de complemento em relação a X é uma bijeção entre o conjunto dos subconjuntos de r elementos e o conjunto dos subconjuntos de $n-r$ elementos.

- Outra propriedade importante é a **identidade de Pascal**:

$$\binom{n+1}{r+1} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1}$$

Para provar esta identidade, considere um conjunto X' de $n+1$ elementos e escolha um elemento arbitrário x de X'. Seja X o conjunto dos demais elementos, $X = X' \setminus \{x\}$. Considere agora todos os subconjuntos de X' com $r+1$ elementos. Eles podem ser separados em dois grupos: aqueles que contém o elemento escolhido x, e aqueles que não contém x. Os primeiros são exatamente os $\binom{n}{r}$ subconjuntos de X de tamanho r, cada um deles acrescido do elemento x. Os segundos são exatamente os $\binom{n}{r+1}$ subconjuntos de X de tamanho $r+1$.

Podemos enunciar esta propriedade graficamente, dispondo os valores de $\binom{n}{r}$ na forma de um triângulo infinito

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & & & & & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & & & & & & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & & & & & & & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & & & & & & & & \\
 & & & & & & \cdots & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & & \cdots & & & & & & &
\end{array}$$

A identidade de Pascal diz que cada número deste diagrama é a soma dos dois vizinhos mais próximos da linha acima. Por exemplo, $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$.

Fórmula do Binômio de Newton

- Uma das propriedades mais famosas das combinações é a fórmula de Newton para as potências de um binômio (soma de dois termos):

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

Por exemplo, temos

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= \binom{4}{0}a^4b^0 + \binom{4}{1}a^3b^1 + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}a^1b^3 + \binom{4}{4}a^0b^4 \\
&= 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4
\end{aligned}$$

Por conta desta fórmula, os números $\binom{n}{r}$ são também chamados de **coeficientes binomiais**.