Algoritmos

Pedro Hokama

Fontes

- [*clrs*] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest, Ronald L. Rivest e Clifford Stein.
- [*timr*] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden

Apresentação Baseada:

- Stanford Algorithms
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V`
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6`
- Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
- Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420

Qualquer erro é de minha responsabilidade.

Árvore Geradora Mínima

Árvore Geradora Mínima: definição do problema

- Suponha que queiramos construir estradas para interligar n cidades, sendo que, a cada estrada entre duas cidades i e j que pode ser construída, há um custo de construção associado.
- *Como determinar eficientemente quais estradas devem ser construídas de forma a minimizar o custo total de interligação das cidades ?*
- Este problema pode ser modelado por um problema em grafos não orientados ponderados onde os vértices representam as cidades, as arestas representam as estradas que podem ser construídas e o peso de uma aresta representa o custo de construção da estrada.

Árvore Geradora Mínima: definição do problema

Nessa modelagem, o problema que queremos resolver é encontrar um **subgrafo gerador** (que contém todos os vértices do grafo original), **conexo** (para garantir a interligação de todas as cidades) e cuja soma dos custos de suas arestas seja a menor possível.

Mais formalmente, definimos o problema da seguinte forma:

Problema da Árvore Geradora Mínima:

Dado um grafo não orientado ponderado $G = (V, E)$, onde $w : E \to \mathbb{R}^+$ define os custos das arestas, encontrar um subgrafo gerador conexo T de G tal que, para todo subgrafo gerador conexo T' de G

$$\sum_{e \in T} w_e \leq \sum_{e \in T'} w_e.$$

Árvore Geradora Mínima

- Claramente, o problema só tem solução se G é conexo.
- **Portanto, a partir de agora, vamos supor que G é conexo.**
- Além disso, não é difícil ver que a solução para esse problema será sempre uma árvore: basta notar que T não conterá ciclos pois, caso contrário, poderíamos obter um outro subgrafo T', ainda conexo e com custo menor ou igual ao de T, removendo uma aresta do ciclo.
- Portanto, dizemos que este problema de otimização é o problema de encontrar a *Árvore Geradora Mínima* (AGM) em G.
- *Como projetamos um algoritmo para resolver esse problema ?*

Algoritmo para AGM

- Uma primeira abordagem exaustiva para solucionar o problema poderia ser enumerar todas as árvores geradoras do grafo, computar seus custos e retornar uma árvore de custo mínimo.
- No entanto, esse não é um bom algoritmo pois um grafo completo de n vértices possui um número **exponencial** (n^{n-2}) de árvores geradoras.
- Para obter um algoritmo eficiente (polinomial !) devemos então procurar alguma propriedade do problema que nos permita restringir o espaço de possíveis soluções a ser analisado.

Algoritmo genérico para AGMs

- Os dois algoritmos que serão vistos usam uma **estratégia gulosa**, diferindo apenas no modo em que esta é aplicada.
- A estratégia gulosa é resumida no *algoritmo genérico* mostrado a seguir, onde a AGM é construída aresta a aresta.
- A cada iteração do algoritmo é mantido um conjunto A de arestas que satisfaz à seguinte **invariante**:

  Antes de cada iteração, A é um subconjunto de arestas de *uma* AGM.

- Em cada iteração, determina-se ainda uma aresta (u, v) tal que $A \cup \{(u, v)\}$ que também satisfaz à invariante, i.e., está contido em alguma AGM. Tal aresta é dita ser **segura**.

Algoritmo genérico para AGMs

AGM-GENERICO(G, w)

1. $A \leftarrow \emptyset$;
2. **enquanto** A não forma uma árvore geradora **faça**
3. encontre uma aresta **segura** (u, v);
4. $A \leftarrow A \cup \{(u, v)\}$;
5. **retorne** A.

- A parte mais *engenhosa* do algoritmo é encontrar a aresta **segura** na linha 3.
- Esta aresta deve existir pois, por hipótese, no laço das linhas 2–4, A é um subconjunto **próprio** de uma árvore geradora T. Logo existe uma aresta segura $(u, v) \in T - A$.

Árvores geradoras: reconhecendo arestas seguras

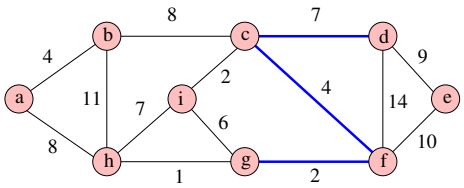
Notação:

Considere um grafo não orientado $G = (V, E)$ e tome $S \subseteq V$. O conjunto $V - S$ é denotado por $\overline{S}$.

Definição:

O *corte de arestas* de S, denotado por $\delta(S)$, é o conjunto de arestas de G com um extremo em S e outro em $\overline{S}$.

Exemplo: $S = \{a, b, c, g, h, i\}$.



Árvores geradoras: reconhecendo arestas seguras

Diz-se que um corte $\delta(S)$ **respeita** um conjunto de arestas A se $A \cap \delta(S)$ é vazio.

Diz-se que (u, v) é uma **aresta leve** de um corte $\delta(S)$ se $w_{uv} := \min_{(x,y)\in\delta(S)}\{w_{xy}\}$, i.e., (u, v) é a aresta de menor peso no corte $\delta(S)$.

Teorema 23.1: (Cormen 2ed)

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo não orientado ponderado nas arestas por uma função $w : E \to \mathbb{R}$. Seja A um subconjunto de E que está contido em alguma AGM de G, seja ainda $\delta(S)$ um corte de G que *respeita* A e (u, v) uma *aresta leve* de $\delta(S)$. Então, (u, v) é uma *aresta segura* para A.

Árvores geradoras: reconhecendo arestas seguras

O Teorema anterior deixa claro o funcionamento do algoritmo genérico para AGM. À medida que o algoritmo avança, o grafo induzido por A é acíclico (pois pertence à uma árvore). Ou seja $G_A = (V, A)$ é uma floresta, sendo que algumas árvores podem ter um único vértice. Cada aresta segura (u, v) conecta duas componentes distintas de G_A.

Inicialmente a floresta tem $|V|$ árvores formadas por vértices isolados. Cada iteração reduz o número de componentes da floresta de uma unidade. Portanto, após a inclusão de $|V| - 1$ arestas seguras, o algoritmo termina com uma única árvore.

Árvores geradoras: reconhecendo arestas seguras

Corolário 23.2: (Cormen 2ed)

Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo não orientado ponderado nas arestas por uma função $w : E \to \mathbb{R}$. Seja A um subconjunto de E que está contido em alguma AGM de G, e seja $C = (V_C, E_C)$ uma componente conexa (árvore) da floresta $G_A = (V, A)$. Se (u, v) é uma *aresta leve* de $\delta(C)$, então (u, v) é **segura** para A.

Os algoritmos de Prim e de Kruskal

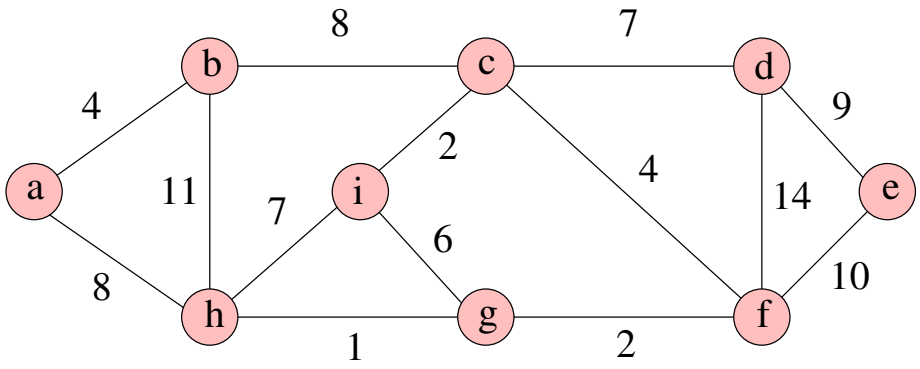
- Os algoritmos de Prim e de Kruskal especializam o algoritmo genérico para AGM visto anteriormente, fazendo uso Corolário 23.3.
- No *algoritmo de Prim*, o conjunto de arestas A é sempre uma **árvore**. A *aresta segura* adicionada a A é sempre uma *aresta leve* do corte $\delta(C)$, onde C é o conjunto de vértices que são extremidades de arestas em A.
- No *algoritmo de Kruskal*, o conjunto de arestas A é uma **floresta**. A *aresta segura* adicionada a A é sempre a aresta de menor peso dentre todas as arestas ligando dois vértices de componentes distintas de G_A.

O algoritmo de Prim

PRIM(G, w, r)

```
▷ r é um vértice escolhido para ser raiz da AGM
  Q é o conjunto de vértices a incluir na árvore
  dist[x]: peso da aresta mais leve ligando x a componente de r
 1.  dist[r] ← 0;        Q ← V;
 2.  para todo v ∈ V − {r} faça dist[v] ← ∞;
 3.  pred[r] ← nulo;
 4.  A ← {};        ▷ inicializa o conjunto de arestas da AGM
 5.  W ← 0;         ▷ inicializa o peso da AGM
 6.  enquanto (Q não for vazio) faça
 7.      Remover de Q o vértice u com o menor valor em dist;
 8.      W ← W + dist[u];
 9.      se pred[u] ≠ nulo, A ← A ∪ {(pred[u], u)};
         ▷ atualiza o valor de dist[.] para vértices adjacentes a u
10.      para todo v ∈ Adj[u] faça
11.          se (v ∈ Q) e (dist[v] > w[u, v]) então
12              { dist[v] ← w[u, v];    pred[v] ← u; }
13.  retorne (A,W).
```


O algoritmo de Prim: exemplo



O algoritmo de Prim: corretude

O algoritmo de Prim mantém a seguinte invariante, a qual é válida antes de cada execução do laço das linhas 6 a 12:

1. $A = \{(v, \texttt{pred}[v]) : v \in V - \{r\} - Q\}$.
2. Os vértices já colocados na AGM são aqueles em $V - Q$.
3. Para todos os vértices em Q, se $\texttt{pred}[v] \neq$ nulo, então $\texttt{dist}[v] < \infty$ e $\texttt{dist}[v]$ é o valor da aresta leve $(v, \texttt{pred}[v])$ que conecta v a algum vértice já pertencente a AGM.

O algoritmo de Prim: complexidade

- A complexidade depende de como o conjunto Q é *implementado*.
- Se Q for implementado como um vetor simples (Q poderia estar representado pelo próprio vetor `dist`), a complexidade do algoritmo será $O(|V|^2 + |E|) \equiv O(|V|^2)$.
- Se Q for implementado como um heap (Q poderia estar representado pelo próprio vetor `dist`), a complexidade do algoritmo será $O((|V| + |E|) \log |V|) \equiv O(|E| \log |V|)$.
- Portanto, para grafos *densos* ($|E| \in O(|V|^2)$), a melhor alternativa é implementar Q como um vetor simples, enquanto que para grafos *esparsos* ($|E| \in O(|V|)$), deve-se optar pela implementação de Q como uma fila de prioridades.
- Note que, com esta última opção, o algoritmo de Prim assemelha-se muito a uma busca em largura. A diferença entre os algoritmos fica praticamente restrita à troca de uma fila simples por uma fila de prioridades !