Algoritmos

Pedro Hokama

Fontes

- [*clrs*] Algoritmos: Teoria e Prática (Terceira Edição) Thomas H. Cormen, Charles Eric Leiserson, Ronald Rivest, Ronald L. Rivest e Clifford Stein.
- [*timr*] Algorithms Illuminated Series, Tim Roughgarden

Apresentação Baseada:

- Stanford Algorithms
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt7Q0xr1PIAriY5623cKiH7V`
  `https://www.youtube.com/playlist?list=PLXFMmlk03Dt5EMI2s2WQBsLsZl7A5HEK6`
- Conjunto de Slides dos Professores Cid C. de Souza, Cândida N. da Silva, Orlando Lee, Pedro J. de Rezende
- Conjunto de Slides do Professores Cid C. de Souza para a disciplina MO420

Qualquer erro é de minha responsabilidade.

John von Neumann

- John von Neumann (1903 - 1957) nascido na Hungria e de origem judaica. Naturalizado americano em 1937.
- Foi membro do Instituto de Estudos Avançados de Princeton, Nova Jérsei, do qual fazia parte Albert Einstein, Kurt Gödel e vários outros grandes cientistas.
- Dentre diversas contribuições para a matemática, ciência da computação, física, etc. Neumann descreveu em 1945 o algoritmo MergeSort.

MergeSort (Ordenação por Intercalação)

Por que veremos um algoritmo de 1945?

- É o algoritmo de escolha ainda hoje por ser realmente eficiente
- Muito melhor do que a complexidade quadrática (InsertionSort, SelectionSort, etc)

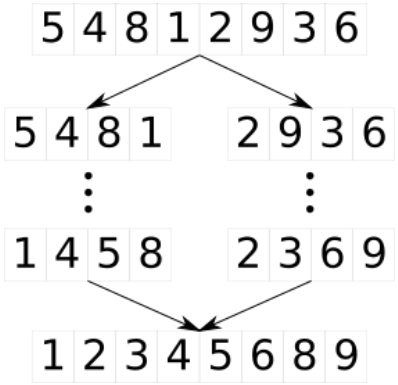
Por que veremos novamente o MergeSort?

- É claro sobre o método de divisão e conquista
- Vai preparar vocês para análises de complexidade mais complicadas.

Problema da Ordenação

Dado um arranjo de n inteiros distintos, encontrar o arranjo $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$ que contenha os mesmos elementos mas ordenados de maneira não decrescente, ou seja, $\pi_i \leq \pi_j$ para qualquer $i < j$ e $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

MergeSort



Pseudo-Código para o MergeSort:

Algoritmo 1: MergeSort

Entrada: Um arranjo com n
Saída: Um arranjo com os mesmos números ordenados

```
1 se n ≥ 2 então
2     A = Recursivamente ordenar a primeira metade do arranjo de entrada;
3     B = Recursivamente ordenar a segunda metade do arranjo de entrada;
4     C = Intercalar (Merge) as duas partes ordenadas A e B em uma;
5 devolva C;
```


Pseudo-Código para o Merge:

Algoritmo 2: Merge

Entrada: A e B arranjos ordenados com $m/2$
Saída: Arranjo C de tamanho m com os mesmos elementos de A e B mas ordenados

```
1  i = 1;
2  j = 1;
3  para k de 1 até m faça
4      se A[i] < B[j] então
5          C[k] = A[i];
6          i++;
7      senão
8          C[k] = B[j];
9          j++;
10 devolva C;
11 Exercício: verificar finalizações (se A ou B acabarem etc).
```

MergeSort

- Qual o tempo de execução do MergeSort? Quantas operações básicas faz o MergeSort? Qual o número de linhas de código executadas pelo MergeSort?
- Primeiro nos perguntaremos qual o tempo de execução do Merge?

Pseudo-Código para o Merge:

Algoritmo 3: Merge

Entrada: A e B arranjos ordenados com $m/2$
Saída: Arranjo C de tamanho m com os mesmos elementos de A e B mas ordenados

```
1  i = 1;
2  j = 1;
3  para k de 1 até m faça
4  |  se A[i] < B[j] então
5  |  |  C[k] = A[i];
6  |  |  i++;
7  |  senão
8  |  |  C[k] = B[j];
9  |  |  j++;
10 |  fim
11 fim
12 devolva C;
13 Exercício: verificar finalizações (se A ou B acabarem etc).
```

Um incremento de k e uma comparação

Essas 2 ou essas 2

m vezes

Um total de 4m + 2 ⩽ 6m

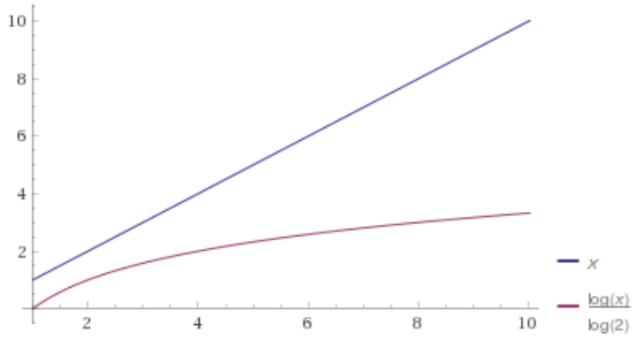
- Analisar o MergeSort é um pouco mais desafiador pois cada problema faz 2 chamadas recursivas, causando uma explosão de subproblemas. A boa notícia é que cada vez que dividimos um subproblema em dois, cada um deles tem metade do tamanho.
- De fato é esse equilíbrio entre a quantidade de subproblemas e o tamanho de cada subproblema que vai ditar a complexidade de um algoritmo recursivo.

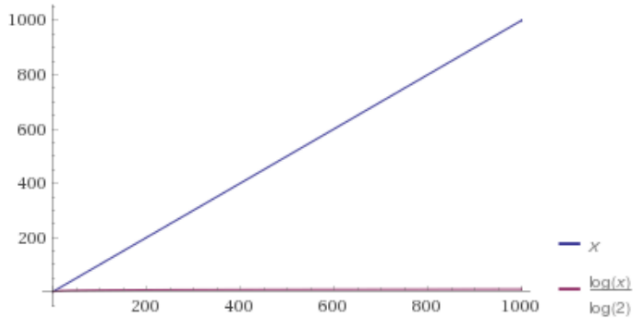
Complexidade do MergeSort

Teorema

MergeSort exige menos de $6n\log_2 n + 6n$ *operações para ordenar* n *números.*

- Antes de provar esse teorema, nos perguntamos, será que esse limitante é bom?
- Relembre que os algoritmos mais triviais exigiam uma contante vezes n^2, enquanto o MergeSort é uma constante vezes $n\log_2 n$.
- Outra breve lembrança é do que é um $\log_2$, de maneira informal podemos dizer que $\log_2$ de um número, é a quantidade de vezes que você precisa dividir por 2 até chegar em 1.
- Então o $\log_2 4$ é 2, $\log_2 8 = 3$, $\log_2 16384 = 14$. Ou seja $\log_2 n$ é uma função que cresce devagar.

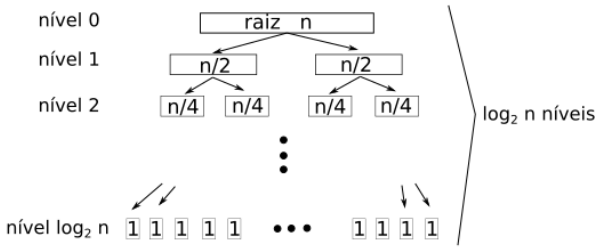




Complexidade do MergeSort

- Para demonstrar a complexidade do MergeSort iremos usar um recurso conhecido como árvore de recursão
- Ressalva: Alguns autores não consideram uma árvore de recursão como uma prova completa para uma afirmação.

Árvore de Recursão



Aproximadamente quantos níveis tem essa árvore de recursão? Sendo n o número de elementos no vetor.

a) Um número constante (independente de n)
b) $\log_2 n$
c) $\sqrt{n}$
d) n

Resposta:

- $\log_2 n + 1$ (nível 0)

Qual o padrão? Em cada nível $j = 0, 1, \ldots, \log_2 n$, existem ___ subproblemas, cada um com tamanho ___.

a) 2^j e 2^j
b) $n/2^j$ e $n/2^j$
c) 2^j e $n/2^j$
d) $n/2^j$ e 2^j

Teorema

MergeSort exige menos de $6n \log_2 n + 6n$ operações para ordenar n números.

Demonstração.

- Em cada nível $j = 0, 1, \ldots, \log_2 n$ existem 2^j subproblemas, cada um de tamanho $n/2^j$.
- Total de operações no nível j:

$$\leq 2^j \cdot 6\left(\frac{n}{2^j}\right)$$

$$= 6(n)$$

- Total de operações: número de níveis · operações por nível

$$(\log_2 n + 1)6n$$

$$6n \log_2 n + 6n$$

□